

La estabilidad de la cúpula de S. Pedro: el informe de los tres matemáticos

Gema López Manzanares

La cúpula de la basílica de San Pedro, en Roma, es una de las grandes obras del Renacimiento. Ya en el momento de su construcción, que se prolongó a lo largo de todo el s. XVI, se apreciaron daños en los arcos torales, pero será en el s. XVII cuando aparezcan en la cúpula propiamente dicha. Algunos, como Baldinucci, sabían que se producían daños de ese tipo en todas las cúpulas debidos al asiento de la fábrica al fraguar el mortero.¹ Sin embargo, el problema se agravó, motivando nuevas inspecciones en la cúpula y la publicación, en 1694, de *Il Tempio Vaticano e sua origine*, de Carlo Fontana, en el que se reafirmaba la solidez del edificio.²

A comienzos del s. XVIII se rehízo el estuco de algunas fisuras, y se colocaron testigos de mármol para medir el avance de las grietas. Pero en 1742, se reabrió la polémica. Benedicto XIV decide entonces acudir a tres prestigiosos matemáticos, Francesco Jacquier, Tommaso Le Seur y Ruggiero Giuseppe Boscovich, y les encarga un informe acerca del problema de la estabilidad de la cúpula. Su título es: *Parere di tre matematici sopra i danni, che fi sono trovati nella cupola di S. Pietro, sul fine dell' Anno MDCCXLII*.³ Este informe es el objeto de nuestra investigación. Supone una contribución muy significativa en el campo de la teoría de estructuras, ya que es el primer acercamiento científico a un problema real de la importancia y singularidad de la cúpula de San Pedro. Precisamente por su tamaño no era fácil encontrar muchos casos similares de los que deducir principios de intervención válidos. Esto justificaba

un planteamiento teórico, campo al que pertenecían estos tres seguidores de las teorías de Newton.

Posteriormente, Giovanni Poleni considera valioso el informe de los tres matemáticos, pero será él quien ponga fin a la polémica prescribiendo la colocación de zunchos. También se encargaría de recopilar todos los documentos relativos a la obra y su restauración en *Memorie Istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano, e de danni di essa, e de ristoramenti loro*.⁴

DESCRIPCIÓN DE LA CÚPULA

En la construcción de la cúpula se podrían distinguir tres etapas. De 1506 a 1514 Bramante comienza las obras levantando los pilares y los arcos torales. Establece así con su proyecto las dimensiones generales y la idea básica de un templo con planta de cruz griega coronado por una gran cúpula. Tras su muerte se realizan diversas labores de refuerzo en la cimentación. Habrá que esperar a la llegada de Miguel Ángel en 1546 para que se acometa con decisión la construcción de la cúpula según un nuevo proyecto, del que sólo vería concluir el tambor. Desde 1564, año en que muere Miguel Ángel, se interrumpen pues, nuevamente, los trabajos en la cúpula. Serán Giacomo della Porta y Domenico Fontana quienes, tan sólo en dos años, de 1588 a 1590 concluyan la cúpula, según el proyecto que Miguel Ángel había dejado plasmado en su modelo de madera, aunque con un perfil ligeramente más apuntado.⁵

El proyecto

La cúpula consiste en una doble bóveda construida entre dieciséis costillas y coronada por una linterna. El conjunto se eleva sobre el tambor, entre cuyas ventanas sobresalen contrafuertes en correspondencia con el esqueleto estructural, que a su vez descansan sobre una base cilíndrica y un cuerpo octogonal de transición, figura 1.

Según Fontana, el diámetro de la cúpula es de 190 palmos romanos (42,59 m), y el de la linterna, aproximadamente un sexto, es decir, 32 palmos (7,15 m). La altura total, desde la base hasta la linterna, ambas incluidas, es de unos 78 m.⁶

Por lo que al perfil se refiere la forma es apuntada, pero no existe una ley que ligue claramente la posición de los centros de curvatura del intradós y el trasdós. Fontana indica la existencia de dos centros, uno

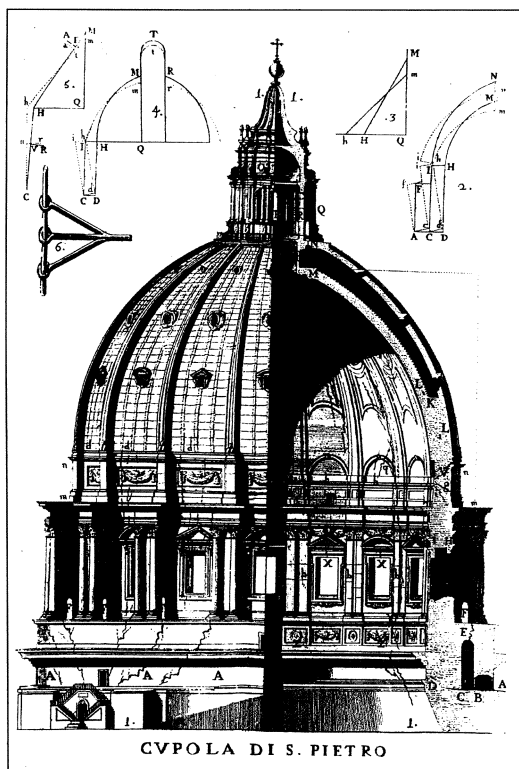


Figura 1
 Parere de tre mattematici (1743)

de ellos separado del eje central en una distancia igual al radio de la linterna. Para deducir esto contó con las cimbras y las trazas, que fueron dibujadas sobre el pavimento de San Pablo Extramuros.⁷ La versión de Letarouilly, en 1882, no refleja ningún tipo de relación geométrica, y si obtenemos sus centros no coinciden con los de Fontana, resultando una cúpula menos apuntada.⁸ Por otra parte ha sido objeto de debate la verdadera intención de Miguel Ángel acerca del perfil de la cúpula.⁹

La cúpula

La sección de la cúpula se desdobra en dos cáscaras aproximadamente a un tercio del arranque. El perfil de las costillas entre las que se construyeron es más ancho en su encuentro con la linterna, es decir, en ese punto las cáscaras adquieren su mayor separación. La interior tiene un espesor aproximado de 1,38 m,¹⁰ y su sección presenta gradas para poder ascender a la linterna a través del espacio que queda entre ambas cáscaras. La exterior, con 0,93 m,¹¹ está perforada en cada uno de los gajos por tres huecos, que permiten la iluminación y la ventilación de ese espacio.

Tanto las costillas como las cáscaras son de ladrillo, éstas últimas con un aparejo en espina de pez, a 45°, de clara influencia romana y bizantina. Parece ser que se construyeron arcos de descarga en el arranque de la cúpula, entre las costillas y sobre las ventanas del tambor. Las costillas presentan una serie de resaltes, que reducen su espesor en forma telescópica, y que sirvieron de apoyo en la construcción de las cáscaras, sobresaliendo al exterior de la cúpula, revestida de plomo, con un espesor en el arranque de 2,53 m.¹²

Aunque los datos conocidos no son muchos, Carlo Fontana¹³ indica que primero se levantaron las costillas y después, las cáscaras intermedias, con la ayuda de dieciséis cimbras de madera apoyadas sobre el ático del tambor, y cuyos restos al parecer todavía pudo encontrar él un siglo después de la terminación de las obras, figura 2. Después, utilizando todo el cimbrado y las propias costillas, se construyeron las cáscaras. El sistema es, pues, claramente diferente al empleado por Brunelleschi, que no requería de ninguna cimbra.

La linterna se realizó seguramente con ladrillo, como se aprecia en la maqueta de 1558.¹⁴ Se levanta

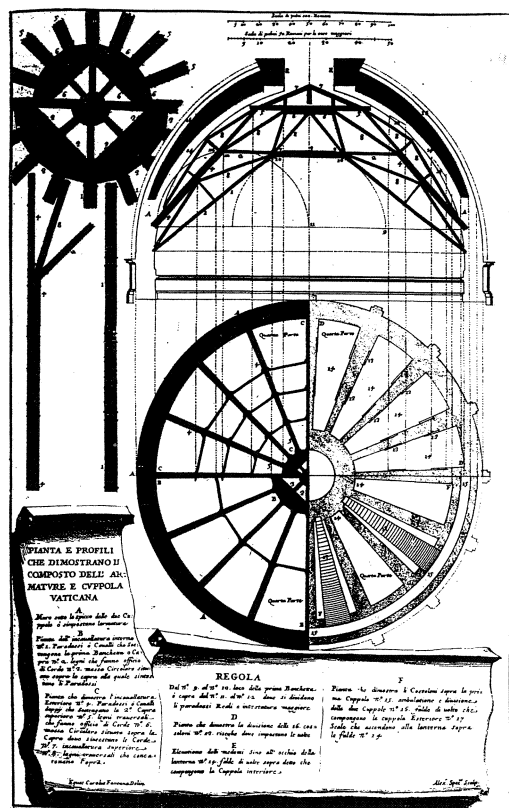


Figura 2
Fontana (1694)

sobre un anillo que bordea el óculo y solidariza las costillas. También se compone de un tambor, con dieciséis ventanas entre contrafuertes adornados por dos columnas, y horadados por un pequeño arco. Sobre él se apoya una pequeña cúpula, con un remate cónico al exterior. Entre ambos aparece un nuevo espacio intersticial. Y coronándolo todo una esfera hueca y una cruz de hierro.

Tambor, base y contrafuertes

La cúpula se apoya sobre el tambor por medio de un cuerpo intermedio llamado ático. Como ya hemos dicho, dieciséis ventanas perforan el tambor, permitiendo un aumento de la iluminación que aporta la linter-

na. Las costillas se prolongan formalmente en pilstras dobles por la parte interior, y exteriormente en contrafuertes. Estos se componen de un muro, transversal al del tambor, que se remata con dos columnas. Un arco perfora la base del muro del contrafuerte. El espesor del tambor es de 3,13 m,¹⁵ y el del muro del contrafuerte es de 0,73 m,¹⁶ diferencia que supone la inutilización del mismo. Esta fue la parte que construyó el propio Miguel Ángel antes de morir. El núcleo es de mampostería de ladrillo, cal y puzolana, y los contrafuertes, de travertino. Gottgetreu, en 1880, habla de mampostería de piedra en el núcleo, no sólo en el tambor sino incluso en el ático, revestida por paredes de peperino y travertino, al interior y exterior, respectivamente.¹⁷ Pero los testimonios del mismo Carlo Fontana, a finales del s. XVII y de los expertos del s. XVIII, los tres matemáticos y Poleni, hablan siempre de mampostería de ladrillo. Quizá fuera una mezcla de ambos materiales, o se emplearan ladrillos de diferente densidad. En la base y la plataforma octogonal se había empleado el mismo tipo de construcción.

Zunchos

Otro aspecto de la construcción, importante a considerar, es el de los zunchos. Al parecer se colocaron tres zunchos de hierro, mediante barras enlazadas por cuñas o pestillos, durante el proceso constructivo, y no a posteriori.¹⁸ Pudieron tener el papel de ayudar a la fábrica en la retracción del mortero. Estaban colocados, uno en la linterna, y los otros dos en la zona de arranque de la cúpula, señalados con la letra L en la figura 1. Su función estructural es bastante más dudosa, pero los tres matemáticos los tuvieron en cuenta.

«**PARERE DI TRE MATTEMATICI...**»

Datos biográficos

Tommaso Le Seur y Francesco Jacquier pertenecían a la orden de Mínimos, fundada por San Francisco de Paula. Ambos eran de origen francés y profesores de Matemáticas. Entre otros libros publicaron juntos el *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica auctore Isaaco Newtono*, comentario sobre las teorías de Newton, que ayudaron a difundir.

Ruggiero Giuseppe Boscovich era miembro de la compañía de Jesús, y profesor de Matemáticas en el Colegio Romano. Procedía de Ragusa, en Dalmacia,¹⁹ pero después se trasladó a Italia. También fue uno de los primeros seguidores y defensores de Newton. En 1765 sería llamado en calidad de experto por el capítulo de la catedral de Milán, para dar su opinión sobre el proyecto para el «Tiburio» o aguja de la catedral.²⁰ En este informe anticipa el tema de los máximos y los mínimos tratado en el ensayo de Coulomb de 1773,²¹ y que se aplica a la localización de las rótulas en los arcos y cúpulas. Benvenuto también le atribuye la aplicación de la fórmula que relaciona la tracción con el empuje resistido por una barra dispuesta en círculo, y que veremos al hablar del cálculo de los zunchos.²²

El informe

El 8 de enero de 1743 hacían entrega de su informe los tres matemáticos.²³ Su esquema, que también resulta modélico para este tipo de documentos, es el siguiente: descripción de la cúpula y de los daños, recorrido por la historia de las patologías y las sucesivas interpretaciones sobre sus causas, elaboración de un modelo y análisis del mismo. Para terminar, realizan un comentario sobre las diversas soluciones propuestas y justifican la elección de la más conveniente a su juicio: añadir nuevos zunchos y llevar a cabo obras de reparación, sobre todo en los contrafuertes.

1. Descripción de la cúpula y de los daños

En primer lugar describen la cúpula y los daños que pudieron observar en aquel momento, a lo largo de treinta y dos párrafos. Sobre un plano de la cúpula, en el que una de las mitades representa el alzado y la otra la sección, identifican las diferentes grietas con letras, figura 1.

En la base las grietas eran verticales al exterior, y se prolongaban después por el tambor e incluso el ático, para desaparecer por debajo de la cubierta de plomo de la cúpula. Su anchura crecía al parecer hacia la parte superior y por la inferior convergían hacia los pilares. Pero la grieta más importante era la que atravesaba la bóveda del corredor verticalmente

en la clave, dividiendo el zócalo en dos bloques independientes. Además, la parte exterior de la base había girado en A, separándose del pavimento.

La grieta en la bóveda de la base se había transmitido a los contrafuertes, que en algunos casos se habían inclinado hacia fuera. Los dinteles y jambas de las ventanas del tambor, así como, las escaleras de caracol, presentaban también daños considerables.

Al pasar a la cúpula propiamente dicha se observaban grietas verticales en los gajos, entre las costillas, que arrancaban aproximadamente del ático y llegaban prácticamente hasta la linterna. Estas grietas eran visibles tanto desde la basílica como desde el espacio entre las cáscaras, destacando por su gravedad la del pilar de la Verónica. Las costillas también presentaban grietas horizontales en la zona del anillo del óculo.

Hablan de otros daños menores, del movimiento de los zunchos y los daños en los arcos torales. También dan algunas medidas de las grietas y de los desplomes. Y citan una grieta horizontal, en la zona del ático, que más tarde Poleni no cita, y en la que los tres matemáticos se basan para colocar una de las rótulas de su modelo.

2. Causas de los daños

Los daños descritos no tienen relación con la cimentación, ni con los pilares, ni con los arcos torales. Es decir, piensan que los daños de la cúpula nacen de ella misma. Esta opinión no va a ser compartida por todos sus contemporáneos, lo que les obligará a escribir un segundo informe sobre la reunión celebrada para debatir el tema.²⁴

También hacen un resumen cronológico sobre la aparición de los daños, que se descubren en 1635 por primera vez. Hablan, sobre todo, de la polémica surgida en 1680 acerca de la responsabilidad de Bernini en los daños de la cúpula, y que comenta Baldinucci en su biografía. Baldinucci consideraba muy antiguos los daños, producidos por el asiento habitual de la fábrica y la cimentación, pero los tres matemáticos le rectifican, ya que ciertos daños habían seguido avanzando, y los zunchos se habían movido. Prueba de ello eran los testigos de mármol en cola de milano, rotos o separados, que se habían colocado a principios de siglo.

3. El modelo

Una vez descritos los daños de la cúpula, los tres matemáticos van a elaborar un modelo que explique el movimiento experimentado por la cúpula. Como podemos ver en la Fig. 2 de la figura 3, cada costilla con la doble cáscara correspondiente ha descendido en la clave, desplazándose en su extremo inferior y empujando hacia fuera al tramo correspondiente de tambor, que gira en torno al borde exterior de la base. También ponen el ejemplo más sencillo de una barra inclinada o bastón, apoyado en un plano vertical por uno de sus extremos, y en uno horizontal, por el otro, Fig. 3 en la figura 4. Su propio peso le obliga a descender y si aplicamos un peso en el extremo superior, como sería el de la linterna, la barra tiende a descender más aún. Para que exista equilibrio, tendremos que aplicar una fuerza horizontal en la base que contrarreste ese empuje. En la cúpula las zonas encargadas de contrarrestar el empuje serán el ático, el tambor, los contrafuertes y la base, con su propio peso, además de los zunchos. El análisis de la estabilidad va a consistir, por tanto, en comprobar que el mecanismo está en equilibrio, no ya el del simple bastón, sino el de la Fig. 4 en la figura 4, o mejor, el que obtendríamos haciendo pasar barras por los puntos M, H y C, es decir, el de la figura 6.²⁵

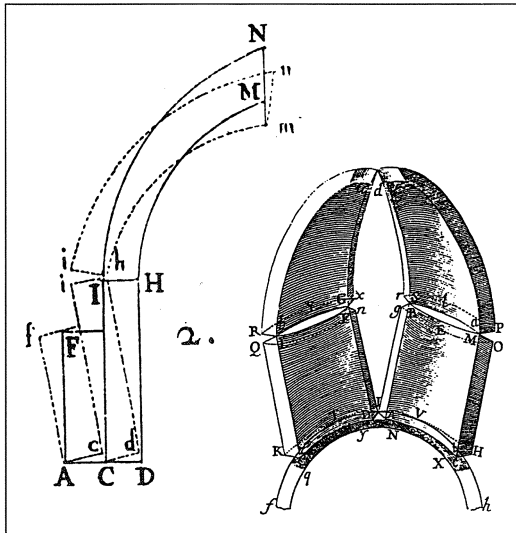


Figura 3
Parere (1743)
A la derecha, el modelo de Poleni (1748)

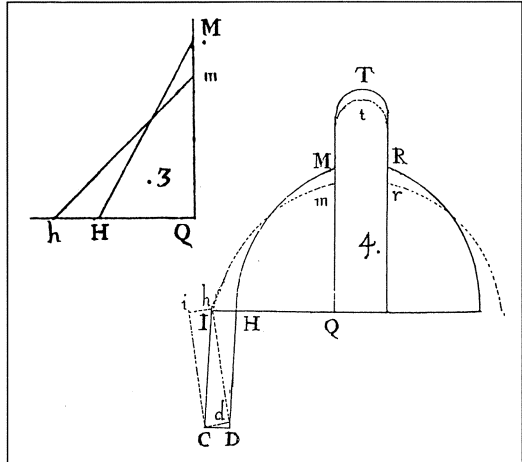


Figura 4
Parere (1743)

4. Análisis

Establecido el modelo (un mecanismo de colapso), el proceso de análisis consiste en calcular las fuerzas que intervienen en el equilibrio, esto es, el peso de las diferentes partes y la fuerza que son capaces de resistir los zunchos, para después aplicar el principio de los trabajos virtuales.

Cálculo de los pesos

En primer lugar era necesario conocer los volúmenes de cada una de las partes, que, según sus palabras, calculan de acuerdo con las medidas indicadas por los mejores dibujos y verificadas en su mayor parte por ellos mismos, aunque sin dar ningún nombre, ni cifras concretas.²⁶ Dan directamente los pesos totales, en la tabla de la figura 5, que se obtienen multiplicando esos volúmenes por la densidad de los materiales. Es interesante señalar que, para determinar ésta, hicieron sus propios ensayos con un bloque de travertino y otro de muro de ladrillo, cal y puzolana, obteniendo para el travertino una densidad de 72 libras/palmo³ (2.190 kg/m³) y para el bloque de mampostería de ladrillo, 50 (1.520 kg/m³). También tuvieron en cuenta el recubrimiento exterior de plomo de la cúpula, con un grosor de 2 minutos (7,5 mm).²⁷

Una prueba de la exactitud de los cálculos es que Poleni toma los pesos calculados por los tres matemáticos para realizar su propio análisis, concretamente el de la linterna y la cúpula con las costillas.

Por otra parte, hemos deducido la densidad que tomaron para los diversos elementos calculando su volumen según una sección de Letarouilly. La de la linterna resulta muy elevada en relación al resto de la estructura, que es aproximadamente homogénea, de modo que el peso total es prácticamente el doble del obtenido para una linterna de ladrillo con elementos de hierro.

Cálculo de los zunchos

Los tres matemáticos también consideran la contribución de los dos zunchos de hierro existentes, que no creen rotos. En primer lugar, «para tener la fuerza absoluta de los zunchos, conviene determinar aquella fuerza que puede ser soportada por una barra de hierro de determinado grosor sin ser rota.»²⁸ Citan a Musschenbroek, quien en su tratado sobre la cohesión de los cuerpos²⁹ dice que el peso que rompe (a tracción) un hilo circular de hierro de espesor una décima parte de un dedo de pie renano es de 450 libras renanas, o lo que es igual 600 libras romanas (expresado como tensión, 2751,53 kg/cm2). «Debiendo ser la resistencia en el hierro de diversos espesores en proporción al número de las fibras, que deben romperse,»³⁰ establecen una proporción entre el área de una sección circular de diámetro igual a la décima

parte de un pie renano (0,0214 onzas²) y la sección de cada uno de los zunchos, obteniendo así la fuerza T, de máxima tracción, figura 5.

Ahora bien, «supuesto este principio, en primer lugar parece, que la energía de una cadena de hierro curvada a modo de zuncho deba crecer sobre aquella fuerza absoluta, que habría si la extensión fuese en línea recta, en aquella misma proporción, que tiene la circunferencia del círculo al radio, esto es, poco más de seis veces.»³¹ Es decir, no les interesa tanto la fuerza en tracción que son capaces de resistir los zunchos, como la acción exterior que la provocaría, que es un empuje horizontal (la expresión exacta es $H = 2 T$, donde H es la resultante de una carga radial aplicada al zuncho, 2 Qr). En la misma tabla anterior se puede ver el empuje H que es capaz de resistir cada zuncho.

Principio de los trabajos virtuales

Una vez calculados los pesos y la resistencia de los zunchos, los tres matemáticos van a comprobar la estabilidad del mecanismo de la figura 6. Van a aplicar así por primera vez el principio de los trabajos virtuales a una estructura de fábrica, en este caso una cúpula, considerando el mecanismo global de colapso.

Entre los antecesores teóricos, los tres matemáticos sólo citan a La Hire y Couplet. Sin embargo, en Frézier, pocos años antes, encontramos la definición del principio según Johann Bernoulli: «En todo equi-

<i>Pesos</i>	
Linterna	4.081.461 Ib (1.384.023 kg)
Cúpula, con las costillas	50.138.000 Ib (17.001.796 kg)
Támbor, con el orden ático	48.013.750 Ib (16.281.463 kg)
Contrafuertes	13.342.081 Ib (4.524.300 kg)
Base	50.087.359 Ib (16.984.623 kg)
<i>Zunchos</i>	
Alto $As = 4 \times 3$ onzas ² , T = 336.863 Ib (114.230 kg)	H = 2.116.571 Ib (717.729 kg)
Bajo $As = 4 \times 2^{1/2}$ onzas ¹ , T = 280.719 Ib (95.192 kg)	H = 1.763.809 Ib (598.108 kg)

Figura 5
Pesos y empuje resistido por los zunchos según el *Parere* (1743)

librio de fuerzas, sea cual sea el modo en que están aplicadas, o la dirección en que ellas actúan las unas respecto a las otras, estén próximas o no, la suma de energías afirmativas será igual a la suma de energías negativas tomadas afirmativamente,»³² o dicho de una forma más clara, en una estructura en equilibrio, para cualquier cambio arbitrario de forma, coherente con el que sufriría en caso de colapso, el trabajo de las fuerzas exteriores es igual al de las fuerzas interiores, donde el trabajo se define como el producto de la fuerza por el desplazamiento en su misma dirección.

Sin embargo, lo que más nos interesa es el comentario de Frézier acerca de la posible aplicación de ese principio al problema del empuje de las bóvedas, que él hace para el modelo de la cuña de La Hire. Como sabemos, La Hire establecía el equilibrio entre el momento producido por el empuje de las bóvedas y el que opone el peso del estribo al vuelco de éste.³³ Pero se analizaba sólo el equilibrio en el estribo, y para ello había que establecer hipótesis acerca de la dirección y punto de aplicación del empuje de la bóveda. Ahora, sin embargo, los tres matemáticos tratan de evaluar el equilibrio aplicando ese principio a toda la estructura, no sólo al muro del tambor. Ya no hay que establecer la dirección del empuje, que en la hipótesis sin rozamiento y en este caso concreto por la posición de la rótula en el arranque hubiera sido paralelo al muro del tambor. Solamente intervienen las fuerzas exteriores, los pesos y el empuje resistido por los zunchos, puesto que el empuje en la clave no sufre desplazamientos en dirección horizontal y la reacción en el apoyo se supone aplicada en el punto de vuelco, fijo. Por el comportamiento del material, tampoco influyen los esfuerzos internos,³⁴ lo que significa que ha de haber equilibrio entre los trabajos de las fuerzas externas. De este modo, si damos un pequeño desplazamiento arbitrario al mecanismo, el punto de aplicación de las fuerzas también se desplaza, figura 6. Al desplazarse paralelamente a su dirección las fuerzas producen un trabajo. Si el sentido es el mismo, es decir, si los pesos descienden, el trabajo producido será desestabilizante. Ellos le van a dar signo negativo. Y, al revés, cuando un peso asciende, el trabajo es estabilizante, y tiene signo positivo.

Los tres matemáticos aplicaron en realidad el principio a dos mecanismos distintos. Primero suponen que no existe la grieta que divide los contrafuertes y el tambor. Ello haría que el vuelco del bloque com-

pleto, de tambor, base y contrafuertes, se produjese en torno a un punto común, en la parte exterior de la base, lo que supondría no sólo el ascenso de su centro de gravedad, sino incluso el de la cúpula y, por tanto, la estabilidad del conjunto. Es decir, la cúpula sería sobradamente estable si no se hubiera producido la grieta que separa los contrafuertes del tambor, y que afecta también a la base. Y, por tanto, no se habría podido mover hacia fuera el apoyo, y ni producirse daños.

Pero el estado real de la cúpula no permitía suponer eso. Existía una separación real entre los contrafuertes y el tambor, y la parte correspondiente de la base, debido a la excesiva debilidad de los mismos.³⁵ Por tanto, había que suponer dos bloques independientes girando en torno a sus puntos de apoyo exteriores respectivos. Además, en esta segunda hipótesis van a considerar que la mampostería de ladrillo del tambor se ha comprimido, lo que modifica ligeramente la geometría del movimiento haciendo que H se desplace sólo horizontalmente y que se acorte la longitud de la barra CH, en la figura 6.³⁶ Los resultados obtenidos en este caso indicaban que no había equilibrio, como se puede ver en la tabla de la misma figura.³⁷

El balance negativo de los trabajos era pues, la causa de las patologías en la cúpula. En definitiva, tanto los zunchos como el contrarresto del tambor

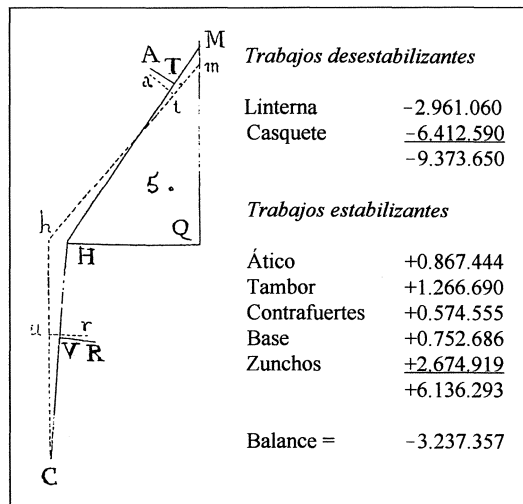


Figura 6
Resultados del análisis. *Parere* (1743)

eran insuficientes. Incluso creían que se habría llegado al colapso de no ser porque el anillo de la linterna, en el punto superior N, estaba comprimido, impidiendo un mayor descenso. Esa compresión es la que había producido la grieta OP en las costillas, figura 1. Aún así podían seguir produciéndose daños, que combinados con otros agentes, pequeños terremotos, rayos, etc., causarían definitivamente la ruina. Era necesario pues intervenir con rapidez.

Remedios

En la última parte hablan de los remedios con los que pretendían, no sólo asegurar, sino redoblar la resistencia, actuando tanto sobre la cúpula como sobre el apoyo. La manera más fácil de anular ese balance negativo era colocando tres nuevos zunchos: en la imposta, que aportaría 3.174.857 lb, en la cáscara externa, cerca de la linterna, y a la mitad de la altura de la cúpula. Proponían colocar tres zunchos más en la base del tambor, y la inserción de barras de hierro que solidarizaran los contrafuertes y el tambor, Fig. 6 en la figura 1. En cuanto a otras propuestas de las que habían tenido noticia rechazaron aquellas que hacían peligrar la estética.

CONCLUSIONES

Los resultados desfavorables obtenidos por los tres matemáticos no se deben a ningún error aritmético o de procedimiento, como cabía esperar de tres expertos, sino de planteamiento. Hemos revisado los cálculos, que ellos no detallan, calculando los desplazamientos virtuales sufridos por los pesos totales y el empuje resistido por los zunchos, según el mecanismo de colapso de la figura 6, donde M se encuentra en la parte de intradós (y no del trasdós) en la clave, H en el arranque de la cúpula y C en el borde exterior de la base agrietada del tambor. Suponiendo que el mecanismo sufre los desplazamientos manteniendo la longitud de las barras CH y HM, resulta que la relación entre los trabajos estabilizantes y desestabilizantes, $Te/Td = 2,23 > 1$, es decir, la estructura es estable sin tener en cuenta ni la contribución de los zunchos ni de los contrafuertes, ya que incluso asciende el centro de gravedad de la cúpula.³⁸ Pero si suponemos como ellos que al comprimirse la fábrica

de ladrillo del tambor, se desplaza horizontalmente el extremo H de la barra MH, como en el bastón de la figura 4, obtenemos un resultado contrario a la estabilidad, aunque ligeramente más favorable que el suyo, donde $Te/Td = 0,67$ (que incluye el trabajo de zunchos y contrafuertes).³⁹

En conclusión, al introducir la compresión de la fábrica de ladrillo o sea la deformación del material tenían que haber contado con la contribución de los esfuerzos internos al trabajo resistente, o si no, haber hecho abstracción del material y analizar el equilibrio del mecanismo de barras rígidas. Ésta es la razón de los resultados negativos obtenidos por los tres matemáticos.

Por lo demás, consideran hipótesis más desfavorables, en general. Por ejemplo, el peso de la linterna parece muy grande en relación con el resto de la estructura (no sabemos si mayorada conscientemente); toman una densidad homogénea para toda la estructura y colocan la rótula de la clave en el intradós. Sin embargo, la posición de la rótula intermedia no era la más desfavorable, y en realidad la rótula más baja deberían haberla colocado en el borde exterior del tambor, no de la base. En este sentido, como ellos mismos reconocen, el caso de la cúpula de San Pedro exigía un estudio particular y por eso, no podían tomar sin más el mecanismo de colapso de los arcos propuesto por Couplet en 1730,⁴⁰ sino el que les permitía deducir el propio estado de la cúpula. En cuanto a la contribución de los zunchos es perfectamente válido suponer que incrementan los trabajos estabilizantes, ya que empiezan a trabajar a la máxima tensión con una deformación muy pequeña de la estructura, que de hecho se había producido. Ahora bien, no hay que confundir esta deformación con los desplazamientos virtuales, por lo que las tracciones que se consideran son las que están actuando en ese momento, sin tener en cuenta el comportamiento elástico del material, es decir, tomando un valor constante y máximo para el empuje resistido.⁴¹

El método de los trabajos virtuales lo vuelve a utilizar Boscovich en 1765 al analizar la estabilidad del Tiburio de Milán.⁴² Después Gauthey, en 1798, lo redescubre precisamente a través del *Parere*, y lo aplica a las bóvedas, en general, considerando las cúpulas como arcos de espesor variable yuxtapuestos.⁴³ Interpreta el principio de los trabajos virtuales como un equilibrio de momentos aplicado a un mecanismo de colapso, coloca la rótula de la clave en el trasdós

y se da cuenta de que es posible tantear la posición más desfavorable de la rótula intermedia, pero resuelve el equilibrio de las fuerzas en la barra superior de forma incorrecta. Será en el s. XIX cuando, analizando la estabilidad de la cúpula de San Petersburgo, Lamé y Clapeyron resuelvan correctamente el problema del equilibrio de momentos del mecanismo, hallando además la posición real de la rótula intermedia, que es la que corresponde al empuje mínimo.⁴⁴ Aun así el método no quedará completo hasta que a esta comprobación de estabilidad se añada la de que la línea de empujes que corresponde al mecanismo no pasa en ningún momento fuera de la sección de la estructura.

El informe de los tres matemáticos resulta pues modélico como documento en los trabajos de restauración y desde el punto de vista de la historia del cálculo de estructuras el primer ejemplo concreto de aplicación de la teoría de bóvedas.

NOTAS

- Baldinucci, F. *Vita del cavaliere Gio. Lorenzo Bernino, scultore, architetto e pittore*. (Florenca: Vincenzo Vangelisti, 1682).
- Fontana, C. *Il Tempio Vaticano e sua origine* (Roma: Nella Stamperia de G. Francesco Buagni, 1694).
- Le Seur, T., Jacquier, F. y Boscovich, R.G. *Parere di tre matematici sopra i danni, che fi fono trovati nella cupola di S. Pietro* (Roma: s.i., 1743).
- Poleni, G. *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano* (Padua: Stamperia del Seminario, 1748).
- Di Stefano, R. *La cupola di San Pietro: storia della costruzione e dei restauri*. 2ª ed. rev. (Nápoles: Edizione Scientifiche Italiane, 1980).
- Fontana, *op. cit.*, p. 329. Es la tercera cúpula en tamaño. Según W. B. Parsons, *Engineers and Engineering in the Renaissance* (Londres: The MIT Press, 1976), apéndice B, 1 palmo romano = 0,2234 m., 1 minuto romano = 0,3720 cm y 1 libra romana = 0,3391 kg.
- Fontana, *ibidem*.
- Letarouilly, P. M. *Le Vatican et la Basilique de Saint Pierre de Rome* (París: Lemoreux, 1882).
- Brandi, C. «La curva della cupola di S.Pietro.» *Struttura e architettura* (Turín: Giulio Einaudi, 1971), pp. 242-66.
- Wittkower, R. «La cúpula de San Pedro de Miguel Angel.» *Sobre la arquitectura en la edad del humanismo* (Madrid: Gustavo Gili, 1979), pp. 467-524.
- «6 palmos 2 onzas.» Fontana, *op. cit.*, p. 316.
- «4 palmos 2 onzas.» *Ibidem*.
- «11 palmos 4 onzas.» *Ibidem*.
- Fontana, *op. cit.*, p. 317, pl. 321.
- Argan, G. C. y Contardi, B. *Michelangelo architetto* (Milán: Electa, 1990), p. 287.
- «14 palmos.» *Parere*, p. 5.
- «3 1/4 palmos.» *Ibidem*.
- Gottgetreu, R. «Stabilitätsuntersuchung der Peterskuppel zu Rom.» *Lehrbuch der Hochbaukonstruktionen. Vol. I: Konstruktionen in Stein* (Berlín: Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn., 1880-8), pp. 254-72, lám. 29.
- Poleni, *op. cit.*, p. 29.
- Straub, H. *A History of Civil Engineering* (Londres: Leonard Hill, 1952), p. 159.
- Boscovich, R. G. «Sentimento sulla solidità della nuova Guglia del Duomo di Milano o si consideri in se stessa, o rispetto al rimanente del vasto Tempio, esposto a richiesta del Nobilissimo e Vigilantissimo Capitolo che soprintende alla sua grande fabbrica, 1765.» *Relazione dei restauri intrapresi alla gran guglia del Duomo di Milano* (de A. Nava. Milán: Tipografia Valentini E.C., 1845), pp. 53-64.
- Coulomb, C. A. «Essai sur une application de règles de maximis et minimis a quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture.» *Mémoires de Mathématique et de Physique présentés à l'Académie Royale de Sciences par divers Savans, et lus dans ses assemblées*, vol. 7, 1776 (1773), pp. 343-82.
- Benvenuto, E. «Architectonic Debates.» *An Introduction to the History of Structural Mechanics* (Springer-Verlag: 1991), pp. 349-74.
- Poleni, *op. cit.*, p. 125.
- Le Seur, T., Jacquier, F. y Boscovich, R. G. *Riflessioni de Padri Tommaso Le Seur, Francesco Jacquier de l'Ordine de' Minimi, e Ruggiero Giuseppe Boscovich della Compagnia di Gesù, sopra alcune difficoltà spettanti i danni, e Rifarcimenti della cupola di S. Pietro* (Roma: s.i., 1743).
- A la derecha en la figura 3, el modelo de Poleni. Poleni, *op. cit.*, tab. H, Fig. XXII.
- Parere*, p. 25.
- Ver nota 6.
- Parere*, pp. 25-6.
- No se da la referencia completa en el *Parere*, pero suponemos se referían a la obra más importante de Musschenbroek, P., *Elementa Physicae* (Lugduni Batavorum: Samuelem Luchtmans, 1741).
- Parere*, p. 26.
- Parere*, pp. 26-7.
- Frézier, A.F. *La théorie et la pratique de la coupe de pierres et des bois pour la construction des voûtes et autres parties des bâtiments civils et militaires, ou traité*

- de stéréotomie à l'usage de l'architecture* (Estrasburgo/París: Charles-Antoine Jombert, 1754-69 (1ª ed. 1737-9)), libro IV, 2ª parte, p. 362.
33. La Hire, P. «Sur la construction des voûtes dans les édifices.» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* (1712), pp. 70-78.
 34. Kooharian, A. «Limit analysis of vousoir (segmental) and concrete arches.» *Proceedings of the American Concrete Institute*, vol. 49 (1953), pp. 317-28.
 35. Hemos considerado la hipótesis de que 3/5 de la base quedan unidos al tambor, y el resto al contrafuerte. Ellos simplemente dan el peso total de la base. Además, aunque hemos calculado los trabajos con los pesos del *Parere*, hemos tomado una sección de Letarouilly para calcular los desplazamientos.
 36. *Parere*, p. 29. Al introducir la compresión del material deberían haber tenido en cuenta el trabajo de estos esfuerzos internos. Ya no es un mecanismo de elementos rígidos. Además se ven obligados a deducir el ascenso del centro de gravedad del tambor desde R hasta r teniendo en cuenta la compresión de la barra CH. Al rehacer los cálculos hemos tenido en cuenta que V se desplaza horizontalmente y que R asciende por la variación en la dirección de VR, figura 6.
 37. Los trabajos se calcularon con los pesos totales. Las cantidades en realidad son libras multiplicadas por una unidad de longitud, aunque en el *Parere* aparecen sólo en forma de libras (tal vez porque se trataba no de desplazamientos reales sino virtuales.)
 38. Como podemos ver en la figura 6 el centro de gravedad A de la parte superior se encuentra muy arriba, no sabemos si por error de dibujo o aritmético, o porque tal vez está incluido el peso de la linterna.
 39. Para la línea de empuje mínimo, considerando el vuelco respecto al borde exterior del tambor y no de la base, en la hipótesis de que las cáscaras y la linterna fueran de ladrillo y el resto de la estructura de mampostería de piedra, resulta $T_e/T_d = 1,44$. Si se toma densidad homogénea, es igual a 1,20.
 40. Couplet, P. «Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes.» *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Paris* (1730), pp. 117-141, lám. 6-7.
 41. Straub, *op. cit.*, pp. 112-3. El enfoque de Straub es elástico y no considera del todo correcto el planteamiento del *Parere*.
 42. Boscovich, *op. cit.* El mecanismo analizado aquí es, sin embargo, el de una cuña central cargada con la linterna y la aguja que desliza.
 43. Gauthey, E. M. *Dissertation sur les dégradations survenues aux piliers du dome de Panthéon Français, et sur les moyens d'y remédier* (París: Perronneau Imprimeur, 1798).
 44. Lamé, M. G. y Clapeyron, E. «Mémoire sur la stabilité des voûtes.» *Annales des Mines*, vol. 8 (1823), pp. 789-836, lám. 5.