



Universidade de Vigo



Máster en Ingeniería Matemática
2009/2011

Trabajo Fin de Máster

**Estudio de las condiciones de absorción en
las ecuaciones integradas de Boussinesq**

Paula M. López Pérez

Director: Andrés Prieto Aneiros

Empresa: Instituto de Hidráulica Ambiental de la Universidad de Cantabria, “IH Cantabria”

Responsable de la Empresa: José Antonio Armesto Álvarez

Fecha presentación: 26/01/2012

Índice general

1. Introducción	3
2. Modelo matemático	7
2.1. Derivación formal	7
2.1.1. Adimensionalización	9
2.1.2. Reescalado	10
2.1.3. Extensión de Nwogu de las ecuaciones de Boussinesq	12
2.2. Modelos simplificados	16
3. Semi-discretización en espacio	19
3.1. Formulación variacional	19
3.1.1. Ecuación KdV	20
3.1.2. Ecuación RLW	21
3.2. Método de elementos finitos Petrov-Galerkin	22
3.2.1. Problema aproximado para KdV	25
3.2.2. Problema aproximado para RLW	26
3.2.3. Condiciones de contorno	28
4. Discretización en tiempo	31
4.1. Métodos predictor-corrector	31
4.2. Aproximación en tiempo para KdV	32
4.3. Aproximación en tiempo para RLW	33
4.4. Análisis de estabilidad	33
4.4.1. Modelo KdV	34
4.4.2. Modelo RLW	35
5. Condiciones absorbentes	37
5.1. Capa absorbente de Wei-Kirby	37
5.2. Capas absorbentes y PMLs	38
5.3. Implementación heurística	42
6. Resultados numéricos	45
6.1. Resultados numéricos para capas PML	46
6.2. Condición de truncadura tipo Neumann	52
6.3. Capas absorbentes de Wei-Kirby	52

7. Conclusiones**59**

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer a mi director de Proyecto, Andrés Prieto Aneiros, su trabajo, dedicación y apoyo. He aprendido mucho trabajando con él, ha supervisado cada detalle, tanto de la parte más teórica como de la implementación en el código, siempre ha estado disponible para resolver con paciencia cualquier duda y ha tenido palabras de ánimo hasta el último día.

También agradezco al Instituto de Hidráulica Ambiental de la Universidad de Cantabria el código facilitado para las simulaciones, las imágenes cedidas y sobre todo la colaboración del responsable José Antonio Armesto Álvarez, que se ha preocupado por la buena marcha del proyecto desde el inicio y ha sido de gran ayuda a la hora de implementar la esponja en el código e interpretar los resultados numéricos.

A mis padres y abuelos les agradezco su paciencia, su confianza inquebrantable en mí, su apoyo constante y su cariño, además de las diversas revisiones de la redacción de esta memoria. Gracias a Alberto, por la ayuda informática, por su paciencia y por ser un apoyo fundamental, y gracias también a mis amigos, compañeros de máster y de trabajo, por sus consejos, por sus palabras de ánimo y en definitiva por estar ahí a diario.

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, con los recursos computacionales disponibles, la simulación numérica de la propagación de ondas en el océano con un modelo tridimensional es inabordable debido al enorme tamaño del problema. Habitualmente, para reducir su coste computacional, el modelo tridimensional se aproxima (bajo la suposición de aguas someras) por las ecuaciones de Boussinesq, lo que permite reducir el número de incógnitas del problema y disminuir así el tamaño del problema computacional.

Además, es típico que el interés de la simulación numérica se centre sólo en una región acotada y concreta de la costa, por lo que se hace necesario y de fundamental importancia, disponer de técnicas precisas para truncar un dominio computacional de gran tamaño y reducirlo a uno mucho más pequeño sin perturbar la solución del problema original (ver [18]). Una de las familias de técnicas que pueden ser usadas para truncar el dominio computacional utiliza el concepto de condiciones de frontera absorbentes.

La desventaja a la hora de utilizar estas técnicas es la aparición de reflexiones espúreas en la frontera del dominio físico. Para tratar de eliminar estas reflexiones, se suelen colocar esponjas numéricas que las absorban, lo que implica una ampliación del dominio computacional, como puede verse en la Figura 1.1.

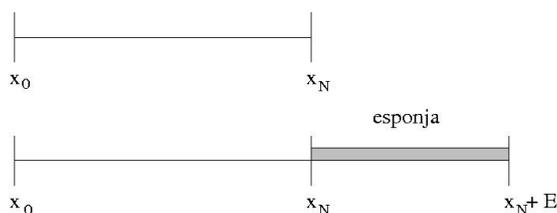


Figura 1.1: Esponja numérica colocada en un problema unidimensional.

El problema reside en que, para eliminar por completo dicha reflexión, suele ser necesario colocar esponjas de gran espesor, lo que se traduce en un aumento del dominio de estudio con el consiguiente coste computacional, especialmente en problemas bidimensionales, como puede observarse en la Figura 1.2 (cedida por el Instituto de Hidráulica Ambiental de la Universidad Cantabria). Queda por tanto de manifiesto el interés de encontrar técnicas para truncar el dominio que consigan eliminar las refle-

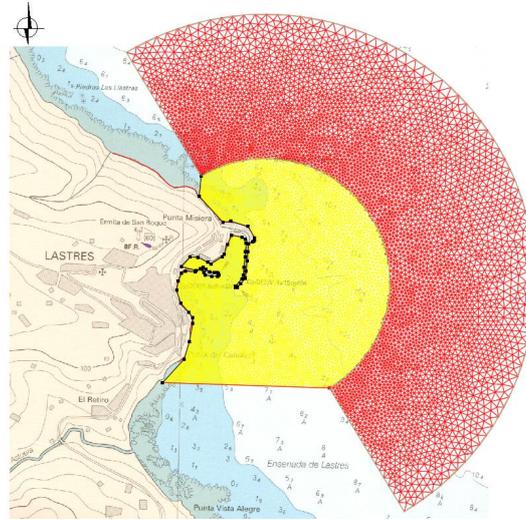


Figura 1.2: Ejemplo de esponja 2D necesaria para eliminar reflexiones espúreas.

xiones espúreas sin ampliar demasiado el dominio computacional.

Dentro de este marco de trabajo, el Instituto de Hidráulica “IH Cantabria” ha propuesto un proyecto fin de máster que consiste en la revisión, evaluación y desarrollo de algunas técnicas de condiciones absorbentes para las ecuaciones de Boussinesq extendidas, además de su implementación en un programa de ordenador. El responsable por parte de este instituto es José Antonio Armesto Álvarez.

El objetivo principal de este proyecto consiste en revisar una de las técnicas de discretización espacio-temporal para las ecuaciones no lineales de Boussinesq débilmente dispersivas y analizar algunas técnicas numéricas de capas absorbentes para este modelo (ver [11] o [20]). Todo este trabajo será realizado sobre modelos unidimensionales.

Una de las líneas de trabajo que se ha seguido es estudiar la relación que existe entre las capas absorbentes o esponjas numéricas y la técnica de capas perfectamente acopladas, o capas PML (del acrónimo en inglés “Perfectly Matched Layers”) en el caso de ecuaciones lineales (ver [2] o [10]). En general, el funcionamiento de una capa PML se basa en la construcción de una capa absorbente *ad-hoc* para cada modelo de propagación, de forma que las ondas se absorben gradualmente en el interior de la capa artificial al mismo tiempo que no se produce ninguna reflexión espúrea en la interfaz entre la capa absorbente y el dominio físico de interés.

Como consecuencia, el presente trabajo se ha dividido en cuatro grandes bloques: la derivación formal de las ecuaciones de Boussinesq extendidas, la revisión de un método de discretización, el estudio e implementación de condiciones absorbentes (véase por ejemplo Wei y Kirby [19]), y por último la evaluación numérica de algunas técnicas basadas en capas absorbentes para truncar el dominio computacional.

El Instituto de Hidráulica ha proporcionado la herramienta informática que se utilizará para realizar las simulaciones numéricas dentro de este proyecto. Más precisamente, se ha usado el programa de ordenador MANOLO1D (Modelo Avanzado NO Lineal de Ondas).

Este programa ya tenía implementado un modelo de propagación de ondas basado en las ecuaciones de Boussinesq unidimensionales y la discretización espacio-temporal revisada en este proyecto. Más precisamente, para resolver numéricamente estas ecuaciones se utiliza una discretización Petrov-Galerkin en espacio basada en un método de elementos finitos estándar, y una discretización en tiempo predictor-corrector de tipo Adams-Bashforth-Moulton (véase [21] para más detalles).

El código ya poseía implementada una condición de contorno de tipo “pared reflejante” (desplazamiento nulo en la frontera), mientras que la implementación, tanto de las condiciones absorbentes como de las capas perfectamente acopladas, ha sido uno de los objetivos de este trabajo, suponiendo para ello un comportamiento lineal del problema unidimensional que involucra una capa PML.

Capítulo 2

Modelo matemático

2.1. Derivación formal

Las ecuaciones de Boussinesq, que modelan la propagación ondulatoria en fluidos donde el dominio físico es poco profundo, pueden deducirse de las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible e irrotacional. Por simplicidad, consideraremos sólo dos dimensiones espaciales, (x, z) , siendo x la coordenada horizontal y z la coordenada vertical, y omitiremos las condiciones iniciales que describen el estado del fluido en el instante inicial $t = 0$, que supondremos en reposo. La coordenada vertical z de los puntos del dominio físico $\Omega(t)$ varía entre la elevación de la superficie libre del agua, $\eta(x, t)$, y el fondo del mar, $-h(x)$, suponiendo que tomamos como origen la altura del agua en reposo. Por lo tanto, el dominio donde está planteado nuestro modelo es

$$\Omega(t) = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2; -h(x) < z < \eta(x, t)\}, \quad t \in (0, T),$$

siendo T el instante de tiempo final.

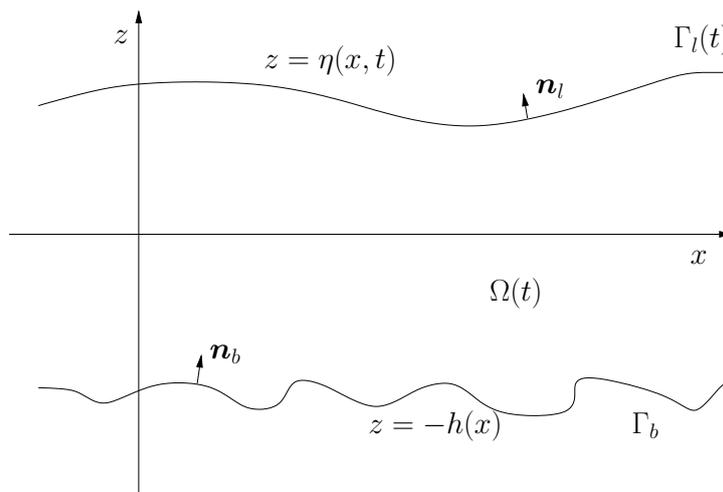


Figura 2.1: Dominio de definición del problema modelo.

Consideraremos que las ecuaciones que rigen el comportamiento de dicho fluido son la ecuación de conservación del momento horizontal,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{en } \Omega(t), \quad t \in (0, T), \quad (2.1)$$

la ecuación de conservación del momento vertical,

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + W \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad \text{en } \Omega(t), \quad t \in (0, T), \quad (2.2)$$

la ecuación de conservación de la masa en un fluido incompresible,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad \text{en } \Omega(t), \quad t \in (0, T), \quad (2.3)$$

y la condición de flujo irrotacional,

$$\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{en } \Omega(t), \quad t \in (0, T), \quad (2.4)$$

donde $(U, W)^t$ es el campo bidimensional de velocidades, p es la presión, ρ es la densidad de masa del fluido, que consideramos constante, y g es la aceleración debida a la gravedad. En lo que sigue, supondremos que los campos U , W y p dependen de las coordenadas espaciales x y z , y del tiempo t .

Dado que las partículas de la superficie libre $\Gamma_l(t)$, es decir, sobre la frontera parametrizada por la ecuación $z = \eta(x, t)$, se mueven libremente, se considera la siguiente condición de contorno cinemática: la velocidad normal de la superficie libre coincide con la velocidad normal del fluido,

$$\begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n}_l = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_l,$$

siendo $\mathbf{X}(x, t) = (x, \eta(x, t))$ la posición de la superficie libre, y

$$\mathbf{n}_l = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} -\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

A partir de esta expresión, obtenemos la condición

$$W - U \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_l(t), \quad t \in (0, T). \quad (2.5)$$

Puesto que no se aplica ninguna fuerza externa y despreciamos las tensiones superficiales, se impondrá una condición de tipo Dirichlet homogénea para la presión,

$$p = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_l(t), \quad t \in (0, T). \quad (2.6)$$

La frontera correspondiente al fondo marino Γ_b , es decir, sobre la curva definida por la ecuación $z = -h(x)$, se supone fija e impermeable. Por lo tanto, la condición de

contorno que se impone es la velocidad normal del fluido nula. Puesto que sobre Γ_b , el vector normal es

$$\mathbf{n}_b = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}} \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ 1 \end{pmatrix},$$

la condición $(U, W) \cdot \mathbf{n}_b = 0$ se puede reescribir como

$$W + U \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_b. \quad (2.7)$$

2.1.1. Adimensionalización

Sea h_0 la profundidad promedio, calculada a partir del límite de los promedios locales,

$$h_0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} h(s) ds.$$

Basándonos en [13], consideramos como las nuevas variables del sistema la adimensionalización de las coordenadas espaciales y temporal,

$$\tilde{x} = \frac{1}{h_0} x, \quad \tilde{z} = \frac{1}{h_0} z, \quad \tilde{h}(\tilde{x}) = \frac{1}{h_0} h(x), \quad \tilde{t} = \sqrt{\frac{g}{h_0}} t, \quad (2.8)$$

e introducimos también los campos adimensionales asociados a la elevación de la superficie libre, la presión y la velocidad del fluido,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) &= \frac{1}{h_0} \eta(x, t), & \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\rho g h_0} p(x, z, t), \\ \tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\sqrt{g h_0}} U(x, z, t), & \tilde{W}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) &= \frac{1}{\sqrt{g h_0}} W(x, z, t). \end{aligned}$$

Al hacer esta transformación obtenemos el siguiente sistema adimensionalizado,

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad \text{en } \tilde{\Omega}(\tilde{t}), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{x}} + \tilde{W} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + 1 = 0 \quad \text{en } \tilde{\Omega}(\tilde{t}), \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{z}} = 0 \quad \text{en } \tilde{\Omega}(\tilde{t}), \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad \text{en } \tilde{\Omega}(\tilde{t}), \quad (2.12)$$

$$\tilde{W} - \tilde{U} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{t}} = 0 \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_l(\tilde{t}), \quad (2.13)$$

$$\tilde{p} = 0 \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_l(\tilde{t}), \quad (2.14)$$

$$\tilde{W} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad \text{sobre } \tilde{\Gamma}_b, \quad (2.15)$$

para todo $\tilde{t} \in (0, \tilde{T})$ siendo $\tilde{T} = \sqrt{g/h_0}T$. Notar que las definiciones de $\tilde{\Omega}(\tilde{t})$, $\tilde{\Gamma}_l(\tilde{t})$ y $\tilde{\Gamma}_b$ son el resultado de aplicar la transformación (2.8) a las definiciones de $\Omega(t)$, $\Gamma_l(t)$ y Γ_b , respectivamente.

2.1.2. Reescalado

Para utilizar las ecuaciones adimensionalizadas del anterior modelo, debemos suponer que el sistema físico puede caracterizarse por una altura de la columna vertical del fluido h_0 , y que tanto el campo de velocidades del fluido como la posición de la frontera libre posee una longitud de onda típica λ (medida sobre la coordenada horizontal), y una amplitud de onda típica a del movimiento del fluido. Siguiendo [13], se pueden definir los siguientes parámetros adimensionales,

$$\varepsilon = \frac{a}{h_0}, \quad \mu = \frac{h_0}{\lambda},$$

y la relación entre ellos, conocida como el número de Ursell,

$$U_r = \frac{\varepsilon}{\mu^2} = \frac{a}{h_0} \frac{\lambda^2}{h_0^2} = \frac{a\lambda^2}{h_0^3}.$$

Según la teoría de ondas de Boussinesq sobre movimientos de fluidos en dominios poco profundos (ver [16]), para aproximar el sistema de ecuaciones (2.9)-(2.15) por un sistema unidimensional donde integramos la velocidad del fluido sobre la variable vertical, se debe suponer que ε y μ toman valores suficientemente pequeños, y que U_r es de orden uno. Por lo tanto, la amplitud del movimiento ondulatorio que describe la altura de la columna de fluido y la amplitud de la velocidad horizontal se supondrán de orden ε mientras que la amplitud de la velocidad vertical se asumirá de orden $\varepsilon\mu$.

Si reescalamos la coordenada horizontal de tal forma que la longitud de onda en esta nueva variable espacial reescalada es de orden uno (es decir, si la coordenada espacial x se está adimensionalizando por la longitud de onda λ), y conservamos la coordenada vertical, adimensionalizada por la altura típica h_0 , obtenemos

$$\hat{x} = \mu\tilde{x} = \frac{1}{\lambda}x, \quad \hat{z} = \tilde{z} = \frac{1}{h_0}z, \quad \hat{h}(\hat{x}) = \tilde{h}(\tilde{x}) = \frac{1}{h_0}h(x). \quad (2.16)$$

La variable temporal se reescala de la misma forma que la coordenada espacial x ,

$$\hat{t} = \mu\tilde{t} = \sqrt{\frac{g}{h_0}} \frac{h_0}{\lambda} t = \frac{\sqrt{gh_0}}{\lambda} t. \quad (2.17)$$

Además, la elevación de la superficie del agua se reescala de forma que sea de orden uno (de esta forma, la posición de la frontera libre η se está adimensionalizando por la amplitud de onda típica a),

$$\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}) = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \frac{1}{a}\eta(x, t).$$

Ahora, si definimos las velocidades reescaladas por

$$\hat{U}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = \frac{1}{\varepsilon}\tilde{U}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{h_0}{g}}U(x, z, t),$$

$$\widehat{W}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = \frac{1}{\varepsilon\mu} \widetilde{W}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{\lambda}{a} \frac{1}{\sqrt{gh_0}} W(x, z, t),$$

y mantenemos

$$\hat{p}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = \tilde{p}(\tilde{x}, \tilde{z}, \tilde{t}) = \frac{1}{\rho gh_0} p(x, z, t),$$

entonces al sustituir en (2.9)-(2.15), obtenemos el sistema de ecuaciones,

$$\varepsilon \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{t}} + \varepsilon^2 \widehat{U} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{x}} + \varepsilon^2 \widehat{W} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{x}} = 0 \quad \text{en } \widehat{\Omega}(\hat{t}), \quad (2.18)$$

$$\varepsilon \mu^2 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \hat{t}} + \varepsilon^2 \mu^2 \widehat{U} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \hat{x}} + \varepsilon^2 \mu^2 \widehat{W} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + 1 = 0 \quad \text{en } \widehat{\Omega}(\hat{t}), \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \hat{z}} = 0 \quad \text{en } \widehat{\Omega}(\hat{t}), \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{z}} - \mu^2 \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \hat{x}} = 0 \quad \text{en } \widehat{\Omega}(\hat{t}), \quad (2.21)$$

$$\widehat{W} - \varepsilon \widehat{U} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} - \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} = 0 \quad \text{sobre } \widehat{\Gamma}_l(\hat{t}), \quad (2.22)$$

$$\hat{p} = 0 \quad \text{sobre } \widehat{\Gamma}_l(\hat{t}), \quad (2.23)$$

$$\widehat{W} + \widehat{U} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}} = 0 \quad \text{sobre } \widehat{\Gamma}_b, \quad (2.24)$$

para todo $\hat{t} \in (0, \hat{T})$ siendo $\hat{T} = \mu \tilde{T}$. Una vez más, nótese que las definiciones de $\widehat{\Omega}(\hat{t})$, $\widehat{\Gamma}_l(\hat{t})$ y $\widehat{\Gamma}_b$ vienen dadas por las relaciones de reescalado (2.16) y (2.17), y por las definiciones precedentes de $\Omega(t)$, $\Gamma_l(t)$ y Γ_b . A modo de ejemplo, la superficie libre $\widehat{\Gamma}_l(\hat{t})$ viene determinada implícitamente por los puntos espaciales que satisfagan $\hat{z} = \varepsilon \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t})$. Las ecuaciones (2.18)-(2.24) representan un sistema adimensionalizado y reescalado para ondas no lineales de pequeña amplitud en el fluido, y son la base para deducir formalmente las ecuaciones de Boussinesq de aguas someras que utilizaremos en este trabajo.

Notación 1. *En lo que sigue, se utilizará*

$$f(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = \mathcal{O}(\delta),$$

para denotar que existe una constante $C > 0$, posiblemente dependiente de \hat{x} y de \hat{t} , tal que

$$|f(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t})| \leq C\delta,$$

para todo $(\hat{x}, \hat{z}) \in \widehat{\Omega}(\hat{t})$.

2.1.3. Extensión de Nwogu de las ecuaciones de Boussinesq

En esta sección se describirá la deducción formal unidimensional de la extensión de Nwogu de las ecuaciones de Boussinesq a partir del sistema de ecuaciones bidimensional, adimensionalizado y reescalado (2.18)-(2.24), siguiendo el desarrollo propuesto en [12].

En primer lugar integramos la ecuación de continuidad (2.20) respecto a la profundidad entre $-\hat{h}(\hat{x})$ y \hat{z} ,

$$\int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\hat{z}} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, s, \hat{t}) ds + \hat{W}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) - \hat{W}(\hat{x}, -\hat{h}(\hat{x}), \hat{t}) = 0. \quad (2.25)$$

Si aplicamos la regla de Leibniz,

$$\int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\hat{z}} \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, s, \hat{t}) ds = \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\hat{z}} \hat{U}(\hat{x}, s, \hat{t}) ds + \hat{U}(\hat{x}, -\hat{h}(\hat{x}), \hat{t}) \frac{\partial(-\hat{h})}{\partial \hat{x}}(\hat{x}),$$

en la ecuación integral (2.25), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\hat{z}} \hat{U}(\hat{x}, s, \hat{t}) ds - \hat{U}(\hat{x}, -\hat{h}(\hat{x}), \hat{t}) \frac{\partial \hat{h}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}) \\ + \hat{W}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) - \hat{W}(\hat{x}, -\hat{h}(\hat{x}), \hat{t}) = 0. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición de contorno (2.24) sobre el fondo marino $\hat{\Gamma}_b$, donde $\hat{z} = -\hat{h}(\hat{x})$, se tiene

$$\hat{W}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = -\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\hat{z}} \hat{U}(\hat{x}, s, \hat{t}) ds. \quad (2.26)$$

A continuación sustituimos esta expresión de \hat{W} en la condición de flujo irrotacional (2.21), obteniéndose la siguiente ecuación para la derivada de \hat{U} con respecto de \hat{z} ,

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = -\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\hat{z}} \hat{U}(\hat{x}, s, \hat{t}) ds. \quad (2.27)$$

En lo que sigue, para simplificar la notación en la medida de lo posible, y siempre y cuando no haya ambigüedad en las expresiones, todas las integrales se calcularán sobre la variable vertical \hat{z} , y sus integrandos estarán evaluados sobre valores fijos de \hat{x} y \hat{t} .

Con el objetivo de deducir las ecuaciones que gobiernan el campo de velocidades promediado sobre una columna de fluido, consideramos un desarrollo de Taylor para $\hat{U}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t})$ centrado en $\hat{z} = z_\alpha \in (-\hat{h}(\hat{x}), \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}))$, de tal forma que

$$\begin{aligned} \hat{U}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) + (\hat{z} - z_\alpha) \frac{\partial \hat{U}}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t}) \\ + \frac{(\hat{z} - z_\alpha)^2}{2} \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{z}^2}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t}) + \mathcal{O}((\hat{z} - z_\alpha)^3), \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde u_α denota la componente horizontal de la velocidad \widehat{U} en $\hat{z} = z_\alpha$, es decir, $u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) = \widehat{U}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t})$. Si integramos ahora este desarrollo, respecto a la profundidad \hat{z} , entre $-\hat{h}(\hat{x})$ y \hat{z} , se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\hat{z}} \widehat{U} ds = & (\hat{z} + \hat{h}(\hat{x}))u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) + \left(\frac{(\hat{z} - z_\alpha)^2}{2} - \frac{(\hat{h}(\hat{x}) + z_\alpha)^2}{2} \right) \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t}) \\ & + \left(\frac{(\hat{z} - z_\alpha)^3}{6} + \frac{(\hat{h}(\hat{x}) + z_\alpha)^3}{6} \right) \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \hat{z}^2}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t}) + \mathcal{O}((\hat{z} - z_\alpha)^4). \end{aligned}$$

Sustituyendo esta integral en (2.27) resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{z}} = & -\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left((\hat{z} + \hat{h}(\hat{x}))u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \right. \\ & + \left. \left(\frac{(\hat{z} - z_\alpha)^2}{2} - \frac{(\hat{h}(\hat{x}) + z_\alpha)^2}{2} \right) \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t}) \right. \\ & \left. + \left(\frac{(\hat{z} - z_\alpha)^3}{6} + \frac{(\hat{h}(\hat{x}) + z_\alpha)^3}{6} \right) \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \hat{z}^2}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t}) + \mathcal{O}((\hat{z} - z_\alpha)^4) \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Derivamos ahora la ecuación anterior respecto de \hat{z} ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \hat{z}^2} = & -\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) + (\hat{z} - z_\alpha) \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t}) \right. \\ & \left. + \frac{(\hat{z} - z_\alpha)^2}{2} \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \hat{z}^2}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t}) + \mathcal{O}((\hat{z} - z_\alpha)^3) \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Puesto que en el sistema reescalado, fijados \hat{x} y \hat{t} , sabemos que $\widehat{U} = \mathcal{O}(1)$, $\hat{z} = \mathcal{O}(1)$, y por (2.27), $\partial \widehat{U} / \partial \hat{z} = \mathcal{O}(\mu^2)$, se obtiene que

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \hat{z}^2} = -\mu^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \hat{x}^2}(\hat{x}, \hat{t}) + \mathcal{O}(\mu^4). \quad (2.31)$$

Derivando ahora (2.30) respecto de \hat{z} , obtenemos

$$\frac{\partial^3 \widehat{U}}{\partial \hat{z}^3} = -\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t}) + (\hat{z} - z_\alpha) \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \hat{z}^2}(\hat{x}, z_\alpha, \hat{t}) + \mathcal{O}((\hat{z} - z_\alpha)^2) \right),$$

y teniendo de nuevo en cuenta que $\widehat{U} = \mathcal{O}(1)$, $\hat{z} = \mathcal{O}(1)$, y $\partial \widehat{U} / \partial \hat{z} = \mathcal{O}(\mu^2)$, se deduce que

$$\frac{\partial^3 \widehat{U}}{\partial \hat{z}^3} = \mathcal{O}(\mu^4). \quad (2.32)$$

De forma análoga se puede comprobar que todas las derivadas parciales de \widehat{U} respecto a \hat{z} de orden mayor o igual a tres son $\mathcal{O}(\mu^4)$. Teniendo en cuenta esto y sustituyendo (2.31) y (2.32) en (2.29), obtenemos

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial \hat{z}} = -\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left((\hat{z} + \hat{h}(\hat{x})) u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \right) + \mathcal{O}(\mu^4). \quad (2.33)$$

Si sustituimos las expresiones para las diferentes derivadas parciales de \widehat{U} respecto de \hat{z} , es decir, usamos (2.31)-(2.33) en el desarrollo de Taylor para \widehat{U} dado por (2.28), obtenemos la siguiente ecuación, que gobierna la componente horizontal de la velocidad,

$$\begin{aligned} \widehat{U}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = & u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) - \mu^2 \left((\hat{z} - z_\alpha) \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left((z_\alpha + \hat{h}(\hat{x})) u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \right) \right. \\ & \left. + \frac{(\hat{z} - z_\alpha)^2}{2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \hat{x}^2}(\hat{x}, \hat{t}) \right) + \mathcal{O}(\mu^4). \end{aligned} \quad (2.34)$$

La ecuación anterior puede ser utilizada para obtener una nueva expresión de \widehat{W} . Sustituyendo (2.34) en (2.26), obtenemos que la componente vertical de la velocidad se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \widehat{W}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = & -\frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left((\hat{z} + \hat{h}(\hat{x})) u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \right) \\ & - \mu^2 \left[\frac{(\hat{z} - z_\alpha)^2}{2} - \frac{(\hat{h}(\hat{x}) + z_\alpha)^2}{2} \right] \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left((z_\alpha + \hat{h}(\hat{x})) u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \right) \\ & - \mu^2 \left[\frac{(\hat{z} - z_\alpha)^3}{6} + \frac{(\hat{h}(\hat{x}) + z_\alpha)^3}{6} \right] \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \hat{x}^2}(\hat{x}, \hat{t}) + \mathcal{O}(\mu^4). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Si ahora, en la ecuación de conservación del momento vertical (2.19), reemplazamos \widehat{U} y \widehat{W} por sus expresiones en (2.34) y (2.35), obtenemos

$$\varepsilon \mu^2 \left(-\frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} \left((\hat{z} + \hat{h}(\hat{x})) u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \right) + \mathcal{O}(\mu^2) \right) + \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} + 1 = \mathcal{O}(\varepsilon^2 \mu^2),$$

luego

$$-\frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{z}} = 1 - \varepsilon \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} \left((\hat{z} + \hat{h}(\hat{x})) u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon \mu^4) + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \mu^2).$$

Si integramos esta ecuación respecto a la profundidad, sobre la parte superior de la columna vertical del fluido, entre \hat{z} y $\varepsilon \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t})$,

$$\begin{aligned} -\hat{p}(\hat{x}, \varepsilon \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}), \hat{t}) + \hat{p}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = & \varepsilon \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}) - \hat{z} \\ & + \varepsilon \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} \left(\left(\frac{\hat{z}^2}{2} + \hat{h}(\hat{x}) \hat{z} \right) u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \right) \\ & + \mathcal{O}(\varepsilon \mu^4) + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \mu^2), \end{aligned}$$

y tenemos en cuenta la condición de contorno (2.23) para la presión sobre la frontera libre $\widehat{\Gamma}_l(\hat{t})$, esto es, $\hat{p}(\hat{x}, \varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}), \hat{t}) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{p}(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) = & \varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}) - \hat{z} + \varepsilon\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x} \partial \hat{t}} \left(\left(\frac{\hat{z}^2}{2} + \hat{h}(\hat{x})\hat{z} \right) u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \right) \\ & + \mathcal{O}(\varepsilon\mu^4) + \mathcal{O}(\varepsilon^2\mu^2). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Si sustituimos las ecuaciones para la componente horizontal de la velocidad (2.34), la componente vertical de la velocidad (2.35), y la presión (2.36), en la ecuación del momento horizontal (2.18), se tiene la ecuación de conservación del momento lineal en el modelo de Boussinesq,

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{t}} - \varepsilon\mu^2 \left((\hat{z} - z_\alpha) \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left((z_\alpha + \hat{h}) \frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{t}} \right) + \frac{(\hat{z} - z_\alpha)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{t}} \right) \right) \\ + \varepsilon^2 u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{x}} + \varepsilon \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} + \varepsilon\mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(\left(\frac{\hat{z}^2}{2} + \hat{h}\hat{z} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{t}} \right) = \mathcal{O}(\varepsilon^2\mu^2) + \mathcal{O}(\varepsilon\mu^4), \end{aligned}$$

que al dividir por ε y operar, resulta

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{t}} + \varepsilon u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left[\left(\frac{z_\alpha^2}{2} + \hat{h}z_\alpha \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{t}} \right] = \mathcal{O}(\varepsilon\mu^2) + \mathcal{O}(\mu^4). \quad (2.37)$$

La segunda ecuación del sistema de Boussinesq se obtiene al integrar la ecuación de continuidad (2.20) respecto a la profundidad, entre $-\hat{h}(\hat{x})$ y $\varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t})$, y utilizar la regla de Leibniz,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t})} \widehat{U} d\hat{z} - \varepsilon \widehat{U}(\hat{x}, \varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}), \hat{t}) \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{t}) + \widehat{U}(\hat{x}, -\hat{h}(\hat{x}), \hat{t}) \frac{\partial(-\hat{h})}{\partial \hat{x}}(\hat{x}) \\ + \widehat{W}(\hat{x}, \varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}), \hat{t}) - \widehat{W}(\hat{x}, -\hat{h}(\hat{x}), \hat{t}) = 0. \end{aligned}$$

Utilizando la condición de contorno cinemática (2.22) sobre la superficie libre $\widehat{\Gamma}_l(\hat{t})$, y la condición cinética (2.24) sobre el fondo $\widehat{\Gamma}_b$, podemos escribir la ecuación anterior de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t})} \widehat{U} d\hat{z} = 0. \quad (2.38)$$

Si se integra (2.34) con respecto a la profundidad, entre $-\hat{h}(\hat{x})$ y $\varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t})$, resulta

$$\begin{aligned} \int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t})} \widehat{U} d\hat{z} = & \left(\hat{h}(\hat{x}) + \varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}) \right) u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \\ & - \mu^2 \left(\left[\frac{(\hat{z} - z_\alpha)^2}{2} \right]_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t})} \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left((z_\alpha + \hat{h}(\hat{x})) u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) \right) \right. \\ & \left. + \left[\frac{(\hat{z} - z_\alpha)^3}{6} \right]_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\varepsilon\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t})} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \hat{x}^2}(\hat{x}, \hat{t}) \right) + \mathcal{O}(\mu^4). \end{aligned}$$

Al operar con la ecuación anterior, se deduce la ecuación integral

$$\begin{aligned} \int_{-\hat{h}(\hat{x})}^{\varepsilon\hat{\eta}(\hat{x},\hat{t})} \hat{U} d\hat{z} &= \left(\hat{h}(\hat{x}) + \varepsilon\hat{\eta}(\hat{x},\hat{t}) \right) u_\alpha(\hat{x},\hat{t}) \\ &+ \mu^2 \left(\left(z_\alpha + \frac{\hat{h}(\hat{x})}{2} \right) \hat{h}(\hat{x}) \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left(\hat{h}(\hat{x}) u_\alpha(\hat{x},\hat{t}) \right) \right. \\ &\left. + \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{\hat{h}^2(\hat{x})}{6} \right) \hat{h}(\hat{x}) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \hat{x}^2}(\hat{x},\hat{t}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon\mu^2) + \mathcal{O}(\mu^4). \end{aligned}$$

Finalmente, al sustituir esta última ecuación integral en (2.38), obtenemos la ecuación de continuidad de Boussinesq,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left((\hat{h} + \varepsilon\hat{\eta}) u_\alpha \right) + \mu^2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\left(z_\alpha + \frac{\hat{h}}{2} \right) \hat{h} \frac{\partial^2 (\hat{h} u_\alpha)}{\partial \hat{x}^2} \right. \\ \left. + \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{\hat{h}^2}{6} \right) \hat{h} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \hat{x}^2} \right] = \mathcal{O}(\varepsilon\mu^2) + \mathcal{O}(\mu^4). \quad (2.39) \end{aligned}$$

En resumen, si no tenemos en cuenta los términos $\mathcal{O}(\varepsilon\mu^2)$ y $\mathcal{O}(\mu^4)$, el modelo extendido de Boussinesq vienen dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left((\hat{h} + \varepsilon\hat{\eta}) u_\alpha \right) + \mu^2 \frac{\partial}{\partial \hat{x}} \left[\left(z_\alpha + \frac{\hat{h}}{2} \right) \hat{h} \frac{\partial^2 (\hat{h} u_\alpha)}{\partial \hat{x}^2} + \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{\hat{h}^2}{6} \right) \hat{h} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \hat{x}^2} \right] = 0, \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{t}} + \varepsilon u_\alpha \frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \hat{x}} + \mu^2 \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}^2} \left[\left(\frac{z_\alpha^2}{2} + \hat{h} z_\alpha \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial \hat{t}} \right] = 0. \end{aligned}$$

En la derivación formal de las ecuaciones del modelo extendido de Boussinesq se ha retenido solo los términos de más bajo orden, incluyendo sólo los términos de orden $\mathcal{O}(\mu^2)$. Sin embargo, usando un razonamiento análogo (aunque mucho más tedioso y extenso) es posible realizar la misma derivación (véase [21]) teniendo en cuenta los términos de orden $\mathcal{O}(\varepsilon\mu^2)$ y $\mathcal{O}(\mu^4)$. Los ejemplos numéricos de la Sección 6 se realizarán con una implementación de este modelo que incluye los términos de alto orden descartados en esta sección.

2.2. Modelos simplificados

El modelo extendido de Boussinesq está formado por dos ecuaciones no lineales acopladas en derivadas parciales, cuyas incógnitas en su versión adimensionalizada son u_α y $\hat{\eta}$. Una de las principales características (y de hecho, su mayor dificultad tanto desde el punto de vista del análisis teórico como numérico) de este sistema de ecuaciones reside en que es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales donde el término principal es de orden tres. Para analizar esta dificultad, bajo ciertas hipótesis adicionales,

vamos a deducir algunas ecuaciones en derivadas parciales más sencillas, también de tercer orden, que nos permitirán ilustrar los métodos de discretización en espacio y en tiempo que usaremos para el sistema extendido de Boussinesq.

La primera simplificación que haremos sobre el modelo extendido es suponer que la altura h a la que se encuentra la frontera Γ_b es constante, esto es, $h(x) = h_0$. Por lo tanto, siguiendo los pasos dados en la adimensionalización, $\hat{h}(\hat{x}) = 1$. Si seguimos el desarrollo propuesto en [13], y suponemos que tanto la velocidad horizontal u_α como la posición de la frontera libre $\hat{\eta}$ se pueden describir como ondas que casi conservan el perfil dado por la condición inicial (salvo términos de orden $\mathcal{O}(\mu^2)$), es razonable buscar soluciones particulares del modelo extendido de Boussinesq a partir de una función $\hat{u}(\hat{\xi}, \hat{\tau})$ suficientemente regular, de tal forma que u_α y $\hat{\eta}$ se escriban a partir de \hat{u} mediante la expresión

$$u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{u}(\hat{\xi}, \hat{\tau}), \quad \hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{u}(\hat{\xi}, \hat{\tau}), \quad (2.40)$$

donde

$$\hat{\xi} = \hat{x} - \hat{t}, \quad \hat{\tau} = \mu^2 \hat{t}.$$

Estas soluciones particulares representan ondas que se propagan en el sentido positivo de la dirección del eje \hat{x} . De la misma forma, podríamos buscar soluciones particulares de la forma $u_\alpha(\hat{x}, \hat{t}) = -\hat{u}(\hat{x} + \hat{t}, -\mu^2 \hat{t})$, $\hat{\eta}(\hat{x}, \hat{t}) = \hat{u}(\hat{x} + \hat{t}, -\mu^2 \hat{t})$, las cuales representarían soluciones que viajan en el sentido negativo.

Si imponemos las expresiones dadas por (2.40) en el sistema de ecuaciones de Boussinesq, obtenemos

$$\begin{aligned} \mu^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\tau}} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\xi}} + \varepsilon \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\xi}} + (1 + \varepsilon \hat{u}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\xi}} + \mu^2 \left(\frac{z_\alpha^2}{2} + z_\alpha + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \hat{\xi}^3} &= 0, \\ \mu^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\tau}} + \varepsilon \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\xi}} + \mu^2 \left(\frac{z_\alpha^2}{2} + z_\alpha \right) \frac{\partial^2}{\partial \hat{\xi}^2} \left(\mu^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\tau}} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\xi}} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Si sumamos ambas ecuaciones y tomamos $z_\alpha = 0$, es decir, centramos nuestra atención en conocer el campo de velocidades a la altura de la capa de fluido en reposo, obtenemos la ecuación

$$2\mu^2 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\tau}} + 3\varepsilon \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\xi}} + \frac{\mu^2}{3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \hat{\xi}^3} = 0. \quad (2.41)$$

Evidentemente, estos tres términos del lado izquierdo de la anterior ecuación poseen el mismo orden ya que hemos supuesto que el número de Ursell es constante, y por lo tanto, $\varepsilon = \mathcal{O}(\mu^2)$. Si ahora utilizamos las variables dimensionales y, abusando de la notación, definimos $u(x, t) = \varepsilon \sqrt{gh_0} \hat{u}(\hat{\xi}, \hat{\tau})$, la anterior ecuación es la famosa ecuación de Korteweg-de Vries (KdV),

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (2.42)$$

Debemos hacer notar que al igual que la primera ecuación del modelo extendido de Boussinesq, la ecuación KdV posee una derivada parcial de tercer orden en espacio, con lo que compartirá las mismas dificultades numéricas que ésta.

En segundo lugar, a partir de la ecuación KdV podemos deducir otra nueva ecuación simplificada que nos sirva como modelo para ilustrar la segunda ecuación del modelo extendido de Boussinesq. Si adicionalmente suponemos que el movimiento ondulatorio que describe la función \hat{u} es una onda progresiva que viaja sin deformación alguna, podemos asumir que $\hat{u}(\hat{\xi}, \hat{\tau}) = \phi(\hat{\xi} - \hat{\tau})$, siendo ϕ una función suficientemente regular. Entonces es inmediato obtener la relación

$$\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \hat{\xi}^3}(\hat{\xi}, \hat{\tau}) = -\frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{t}}(\hat{\xi}, \hat{\tau}) - \mu^2 \phi^{(3)}(\hat{\xi} - \hat{\tau}).$$

Al usar esta ecuación en (2.41) y descartar los términos de orden $\mathcal{O}(\mu^4)$, se obtiene la llamada ecuación RLW (Regularised Long Wave), que en las variables dimensionales resulta ser

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0. \quad (2.43)$$

Como ya se ha comentado, a diferencia de otros modelos para fluidos, como las ecuaciones de Euler o las de Navier-Stokes, en el modelo extendido de Boussinesq aparecen términos de tercer orden que involucran derivadas espaciales y temporales, por lo que es importante encontrar una buena aproximación numérica de estos términos en concreto. En las siguientes secciones, serán las ecuaciones (2.42) y (2.43) las que se usarán para presentar la discretización en espacio y en tiempo. Esta discretización es la misma que se utiliza para el modelo extendido completo (con los términos de alto orden), como aparece descrito en [21].

Capítulo 3

Semi-discretización en espacio

En cualquier tipo de discretización que se base en un método de elementos finitos, el primer paso consiste en escribir la formulación variacional del problema fuerte del que se quiere calcular una solución aproximada. En nuestro caso, al trabajar sobre un dominio no acotado, el análisis teórico de la formulación variacional debería estudiar la regularidad de las soluciones del problema débil y si éstas están incluidas en alguno de los espacios de Sobolev convencionales (sin pesos). Este estudio queda fuera del rango de este trabajo, y tanto la deducción de la formulación variacional como el marco funcional donde vive la solución se asumirán conocidos (véase [9] para una discusión detallada).

Los modelos matemáticos del problema de propagación de ondas descrito en la Sección 2 involucran la resolución de las ecuaciones KdV y RLW en dominios espaciales no acotados, en concreto, en $(0, \infty)$. Evidentemente, la no acotación del dominio físico tiene una dificultad añadida: cualquier problema discreto debe tener un número finito de grados de libertad y por tanto, si las funciones de base asociadas al método de elementos finitos tienen soporte compacto, el dominio físico debe truncarse a un dominio computacional acotado. El problema de cómo truncar el dominio físico real y las condiciones de contorno usadas en la frontera artificial serán objeto de estudio en una sección posterior. Por simplicidad, tanto la formulación variacional como la semi-discretización mediante un método de elementos finitos se considerará realizada sobre todo el dominio físico no acotado.

3.1. Formulación variacional

Para obtener un problema fuerte que involucre las ecuaciones KdV y RLW bien planteado, debemos completar estas ecuaciones con condiciones de contorno y condiciones iniciales. Una vez hecho esto, estaremos en posición de poder escribir una versión de estos problemas de contorno de valor inicial.

Puesto que las ecuaciones KdV y RLW son versiones simplificadas del modelo extendido de Boussinesq, las condiciones de contorno físicas también serán heredadas del modelo más complejo. Por este motivo, se han utilizado las condiciones de contorno descritas en [21] y [7] para completar las ecuaciones KdV y RLW, respectivamente. Además, por simplicidad, usaremos condiciones de contorno homogéneas (aunque condiciones no nulas podrían ser tratadas de forma análoga usando una función levantamiento

en el espacio de Sobolev apropiado).

Teniendo todas estas consideraciones en cuenta, el problema para la ecuación KdV viene dado por: dada la condición inicial u^0 , encontrar $u : (0, \infty) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= 0 && \text{en } (0, \infty) \times [0, T], \\ u(x, 0) &= u^0(x) && \text{para } x \in (0, \infty), \\ u(0, t) &= 0 && \text{para } t \in [0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0 && \text{para } t \in [0, T], \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) &= 0 && \text{para } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Evidentemente la condición inicial u^0 debe satisfacer las condiciones de compatibilidad con las condiciones de contorno homogéneas, esto es, $u^0(0) = u'(0) = u''(0) = 0$, y verificar que $u^0(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Adicionalmente, supondremos que $u^0 \in H^s(0, \infty)$ para $s > 3/2$.

En el caso de la ecuación RLW, el problema modelo que usaremos a lo largo de las siguientes secciones se describe como: dada la condición inicial u^0 , encontrar $u : (0, \infty) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaga

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} &= 0 && \text{en } (0, \infty) \times [0, T], \\ u(x, 0) &= u^0(x) && \text{para } x \in (0, \infty), \\ u(0, t) &= 0 && \text{para } t \in [0, T], \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) &= 0 && \text{para } t \in [0, T], \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(0, t) &= 0 && \text{para } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

De nuevo, la condición inicial u^0 debe satisfacer las condiciones de compatibilidad con las condiciones de contorno homogéneas, esto es, $u^0(0) = 0$, y verificar que $u^0(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$. Adicionalmente, supondremos también que $u^0 \in H^s(0, \infty)$ para $s > 3/2$.

3.1.1. Ecuación KdV

A partir de la ecuación diferencial KdV de tercer orden, vamos a escribir su formulación variacional. Primero, tomemos una función test $w \in C^\infty(0, \infty)$ de soporte compacto (que asumiremos contenido en el intervalo $(0, L)$). Si multiplicamos la ecuación KdV

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (3.1)$$

por la función test w e integramos sobre el intervalo espacial $(0, L)$, obtenemos

$$\int_0^L w \frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \int_0^L w \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{4} \int_0^L w \frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} \int_0^L w \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

donde el t3rmino no lineal en (3.1) se ha reescrito en funci3n de u^2 para facilitar la integraci3n. Si integramos la ecuaci3n anterior por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^L w \frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{gh_0} \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} u - \frac{3}{4} \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} u^2 + \frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \\ = \left[-\sqrt{gh_0} w u - \frac{3}{4} w u^2 + \frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right]_0^L. \end{aligned}$$

Si aplicamos las condiciones de contorno, los t3rminos de frontera asociados a $x = 0$ son nulos. Lo mismo ocurre si hacemos tender L a infinito para los t3rminos de borde asociados a $x = L$. En consecuencia, la formulaci3n d3bil de nuestro problema (v3ase [9]) consiste en buscar $u \in \mathcal{C}([0, T]; H^s(0, \infty)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H^{s-1}(0, \infty))$ para $s > 3/2$, que satisfaga $u(0) = u^0 \in H^s(0, \infty)$, las condiciones de contorno, y adem3s

$$\int_0^\infty w \frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{gh_0} \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x} u - \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x} u^2 + \frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.2)$$

para todo $w \in H^{s+1}(0, \infty)$. En este marco funcional todos los t3rminos de la formulaci3n est3n bien planteados, y adem3s, se3alar que el t3rmino no lineal est3 acotado debido a que $u^2 \in L^1(0, \infty)$, y que teniendo en cuenta las inclusiones de Sobolev, $\|\partial w / \partial x\|_{L^\infty(0, \infty)} \leq C \|w\|_{H^s(0, \infty)}$ con $s > 3/2$.

3.1.2. Ecuaci3n RLW

A partir de la ecuaci3n diferencial RLW de tercer orden, vamos a escribir su formulaci3n variacional. Primero, tomemos una funci3n test $w \in \mathcal{C}^\infty(0, \infty)$ de soporte compacto (que asumiremos contenido en el intervalo $(0, L)$). Si multiplicamos la ecuaci3n RLW

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h_0^2}{6} \frac{\partial^2 \frac{\partial u}{\partial t}}{\partial x^2} = 0. \quad (3.3)$$

por la funci3n test w e integramos sobre el intervalo espacial $(0, L)$, obtenemos

$$\int_0^L w \frac{\partial u}{\partial t} + \sqrt{gh_0} \int_0^L w \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{3}{4} \int_0^L w \frac{\partial}{\partial x} (u^2) - \frac{h_0^2}{6} \int_0^L w \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = 0.$$

donde el t3rmino no lineal en (3.1) se ha reescrito en funci3n de u^2 para facilitar la integraci3n. Si integramos la ecuaci3n anterior por partes, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^L w \frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{gh_0} \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} u - \frac{3}{4} \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} u^2 - \frac{h_0^2}{6} \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} \\ = \left[-\sqrt{gh_0} w u - \frac{3}{4} w u^2 - \frac{h_0^2}{6} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} - w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right]_0^L. \end{aligned}$$

Si aplicamos las condiciones de contorno, los t3rminos de frontera asociados a $x = 0$ son nulos. Lo mismo ocurre si hacemos tender L a infinito para los t3rminos de borde asociados a $x = L$. En consecuencia, la formulaci3n d3bil de nuestro problema (v3ase

[9]) consiste en buscar $u \in \mathcal{C}([0, T]; H^s(0, \infty)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; H^{s-1}(0, \infty))$ para $s > 3/2$ que satisfaga $u(0) = u^0 \in H^s(0, \infty)$, las condiciones de contorno, y además

$$\int_0^\infty w \frac{\partial u}{\partial t} - \sqrt{gh_0} \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x} u - \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{\partial w}{\partial x} u^2 - \frac{h_0^2}{6} \int_0^\infty \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (3.4)$$

para todo $w \in H^{s+1}(0, \infty)$. En este marco funcional todos los términos de la formulación están bien planteados, y además, señalar que el término no lineal está acotado debido a que $u^2 \in L^1(0, \infty)$, y que teniendo en cuenta las inclusiones de Sobolev, $\|\partial w / \partial x\|_{L^\infty(0, \infty)} \leq C \|w\|_{H^s(0, \infty)}$ con $s > 3/2$. Debemos hacer notar que tanto en la ecuación KdV como ahora en RLW, el término variacional asociado a las derivadas de tercer orden involucra un integrando con dos funciones, ambas en $H^{s-1}(0, \infty)$.

3.2. Método de elementos finitos Petrov-Galerkin

Nuestro objetivo en esta sección será describir los problemas discretizados, asociados a las ecuaciones KdV y RLW, mediante un método de elementos finitos. Si utilizamos un método de Galerkin convencional, es decir, las mismas funciones de forma para aproximar tanto la incógnita como las funciones test, deberíamos usar aproximaciones en elementos finitos de un orden alto, que nos proporcionen una buena aproximación para el cálculo de las derivadas de mayor orden en la formulación variacional.

Este tipo de estrategia es adecuada cuando el campo incógnita y las funciones test soportan el mismo número de derivadas. Sin embargo, nuestros problemas modelos poseen una derivada impar (de orden tres), por lo que las funciones test y la incógnita no tienen el mismo número de derivadas espaciales. Uno de los inconvenientes de utilizar las mismas funciones de forma para las funciones test y la solución (por ejemplo, basadas en polinomios de Hermite cúbicos a trozos de clase C^1 o splines cúbicos a trozos de clase C^2) es el coste computacional (tanto en problemas unidimensionales como más acusadamente en problemas bidimensionales). Como alternativa a los métodos de elementos finitos Galerkin convencionales, utilizaremos el método de elementos finitos de Petrov-Galerkin, en el que las funciones de forma para las funciones test y para la solución del problema son distintas.

Puesto que en la formulación variacional de los problemas KdV y RLW, todos los términos de los que depende la solución tienen sentido si $u \in H^1(0, \infty)$, podemos escoger las funciones de forma lineales a trozos y de clase C^0 para aproximar la solución. De la misma manera, la función test soporta derivadas espaciales de orden dos. Por tanto, tomaremos como elección del espacio de discretización para las funciones test, las funciones cúbicas a trozos y de clase C^2 (para más detalle consultar [14]).

Debemos hacer notar que en el caso del problema asociado a la ecuación RLW, se podría empobrecer la regularidad del espacio de discretización asociado a las funciones test. Sin embargo, puesto que la ecuación RLW es un modelo simplificado que proviene del modelo extendido de Boussinesq (el cual es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que comparten un mismo espacio de discretización), se han usado los mismos espacios de discretización tanto para el problema KdV como para el modelo de RLW.

Hasta el momento, no nos hemos preocupado del problema de truncar el dominio físico no acotado en un dominio computacional acotado. Puesto que nuestro objetivo en

esta sección es presentar el método de discretización en espacio, supondremos teóricamente que existe una partición uniforme del intervalo $[0, \infty)$ con paso δ . Evidentemente, en el caso de un intervalo espacial $[0, L]$ acotado, esta partición estaría formada por J subintervalos, siendo $J = L/\delta$. En este caso tendremos que suponer, sin pérdida de generalidad, que $J = \infty$. En cualquier caso, cada uno de los vértices de la partición viene dado por $x_j = j\delta$, $j = 0, \dots, J$.

Para discretizar en espacio los dos problemas modelo, consideramos el subespacio de dimensión finita de $H^1(0, \infty)$ dado por

$$V_\delta = \{w \in \mathcal{C}^0(0, \infty) : v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathcal{P}_1([x_j, x_{j+1}]), j = 0, \dots, J-1\},$$

y el subespacio de dimensión finita de $H^2(0, \infty)$ dado por

$$W_\delta = \{w \in \mathcal{C}^2(0, \infty) : v|_{[x_j, x_{j+1}]} \in \mathcal{P}_3([x_j, x_{j+1}]), j = 0, \dots, J-1\},$$

donde \mathcal{P}_k denota el espacio de polinomios de orden k . Debemos hacer notar que para $W_\delta \subset H^2(0, \infty)$ bastaría exigir que W_δ estuviese contenido en $\mathcal{C}^1(0, \infty)$. Sin embargo, la elección hecha para las funciones de forma del método de elementos finitos nos proporcionará una regularidad adicional en $\mathcal{C}^2(0, \infty)$.

Si introducimos la aplicación cambio de base del elemento de referencia $K^e = [-1, 1]$ al elemento $K_j = [x_{j-1}, x_j]$, para cada $j = 1, \dots, J$ dada por

$$\begin{aligned} F_j : K^e &\longrightarrow K_j \\ \xi &\longrightarrow F_j(\xi) = \frac{x_{j-1} + x_j}{2} + \xi \frac{x_j - x_{j-1}}{2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

y las siguientes funciones de forma definidas sobre el elemento de referencia K^e , en términos de la coordenada local $\xi \in [-1, 1]$,

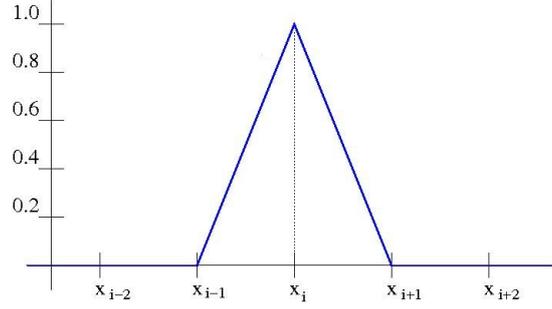
$$\begin{cases} \psi_1^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi), \\ \psi_2^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi), \end{cases}$$

podemos definir las funciones de forma a partir de las que se formará la base $\{\psi_j\}_{j=0}^J$ del espacio de discretización V_δ . Más precisamente, cada uno de estos elementos viene dado por

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \psi_1^e(F_1^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\psi_j(x) = \begin{cases} \psi_2^e(F_j^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \psi_1^e(F_{j+1}^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Teniendo en cuenta que las funciones de forma constituyen una base del subespacio V_δ , podemos escribir la solución aproximada u_δ como una combinación lineal de éstas,

Figura 3.1: Función de forma $\psi_i(x)$.

que hemos denotado por $\psi_j \in V_\delta$. Si suponemos que los valores nodales verifican $u_j \in C^1([0, T])$, y que u_δ satisface las condiciones de contorno homogéneas, resulta

$$u_\delta(x, t) = \sum_{j=1}^J \psi_j(x) u_j(t). \quad (3.8)$$

Nótese que con esta elección, $u_\delta \in C^1([0, T]; V_\delta)$. De la misma forma, también construiremos las funciones de forma con las que escribir una base del espacio de discretización para las funciones test sobre cada elemento K_j a partir de funciones de forma sobre el elemento de referencia K^e :

$$\begin{cases} \phi_1^e(\xi) = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{8}(1 - \xi)^3 \right], \\ \phi_2^e(\xi) = \frac{1}{6} \left[1 + \frac{3}{2}(1 - \xi) + \frac{3}{4}(1 - \xi)^2 - \frac{3}{8}(1 - \xi)^3 \right], \\ \phi_3^e(\xi) = \frac{1}{6} \left[1 + \frac{3}{2}(1 + \xi) + \frac{3}{4}(1 + \xi)^2 - \frac{3}{8}(1 + \xi)^3 \right], \\ \phi_4^e(\xi) = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{8}(1 + \xi)^3 \right]. \end{cases}$$

Ahora, las funciones de forma $\{\phi_j\}_{j=0}^J$ que formarán parte del espacio de discretización W_δ en cada elemento K_j se escriben como

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \phi_2^e(F_1^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ \phi_1^e(F_2^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_1, x_2], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\phi_1(x) = \begin{cases} \phi_3^e(F_1^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_0, x_1], \\ \phi_2^e(F_2^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_1, x_2], \\ \phi_1^e(F_3^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_2, x_3], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \phi_4^e(F_{j-1}^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_{j-2}, x_{j-1}], \\ \phi_3^e(F_j^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_{j-1}, x_j], \\ \phi_2^e(F_{j+1}^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_j, x_{j+1}], \\ \phi_1^e(F_{j+2}^{-1}(x)) & \text{si } x \in [x_{j+1}, x_{j+2}], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.11)$$

para $j = 2, \dots, J$, siendo F_j la aplicación de cambio de base al elemento de referencia definida en (3.5).

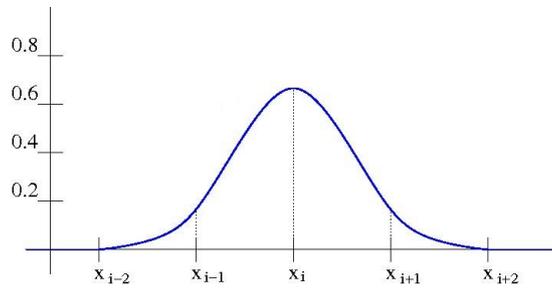


Figura 3.2: Función peso $\phi_i(x)$.

De nuevo, puesto que cualquier función de W_δ se puede escribir en función de $\{\phi_j\}_{j=0}^J$, si suponemos que los valores nodales verifican $w_j \in C^1([0, T])$ obtenemos

$$w_\delta(x, t) = \sum_{j=0}^J \phi_j(x) w_j(t).$$

Adicionalmente, también debemos introducir una discretización espacial para la función que define la condición inicial u^0 . Para ello, trabajaremos con su interpolante en V_δ , o equivalentemente, supondremos que u^0 se puede escribir como

$$u^0(x, t) = \sum_{j=1}^J \psi_j(x) u_j^0(t).$$

3.2.1. Problema aproximado para KdV

Para aproximar el problema (3.2) buscamos $u_\delta \in C^1([0, T]; V_\delta)$ que satisfaga $u_\delta(x, 0) = u^0$ y además

$$\int_0^\infty w_\delta \frac{u_\delta}{\partial t} - \sqrt{gh_0} \int_0^\infty \frac{\partial w_\delta}{\partial x} u_\delta - \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{\partial w_\delta}{\partial x} u_\delta^2 + \frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} \int_0^\infty \frac{\partial^2 w_\delta}{\partial x^2} \frac{\partial u_\delta}{\partial x} = 0,$$

para todo $w_\delta \in W_\delta$. Si sustituimos u_δ por la combinación lineal dada en (3.8), tenemos que el problema anterior es equivalente a calcular el conjunto de funciones (en tiempo)

$\{u_j \in C^1([0, T]), j = 1, \dots, J\}$ que satisfacen $u_j(0) = u_j^0$ y además

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J u_j'(t) \int_0^\infty \phi_i(x) \psi_j(x) dx - \sqrt{gh_0} \sum_{j=1}^J u_j(t) \int_0^\infty \phi_i'(x) \psi_j(x) dx \\ & - \frac{3}{4} \sum_{j=1}^J u_j^2(t) \int_0^\infty \phi_i'(x) \psi_j(x) dx + \frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} \sum_{j=1}^J u_j(t) \int_0^\infty \phi_i''(x) \psi_j'(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

para todo $i = 0, \dots, J$, siendo $\phi_i \in W_\delta$ las funciones de base usadas para discretizar las funciones test.

Puesto que nuestro problema no es lineal, a pesar de que $\{\phi_j\}_{j=0}^J$ es una base del espacio discreto W_δ , calcular una solución que satisfaga la ecuación variacional para todo $w_\delta \in W_\delta$ no es equivalente a calcularla tomando como funciones test cada uno de los elementos de la base. Sin embargo, esto puede hacerse si consideramos la técnica de aproximación del producto (véase [14] para más información).

Si usamos la notación de Einstein para la multiplicación matriz vector, de tal forma que los subíndices repetidos suman, el anterior sistema de ecuaciones se puede escribir de forma condensada mediante la introducción de las matrices M, S y R , obteniendo, para $0 \leq i \leq J$,

$$M_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t} + \left(\frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} S_{ij} - \sqrt{gh_0} R_{ij} \right) u_j - \frac{3}{4} R_{ij} u_j^2 = 0, \quad (3.13)$$

donde, para cada $1 \leq j \leq J$,

$$M_{ij} = \int_0^\infty \phi_i(x) \psi_j(x) dx, \quad R_{ij} = \int_0^\infty \phi_i'(x) \psi_j(x) dx, \quad S_{ij} = \int_0^\infty \phi_i''(x) \psi_j'(x) dx.$$

Si tenemos en cuenta las definiciones de las funciones de forma (3.6)-(3.7) y de las funciones peso (3.9)-(3.11), podemos observar que tanto M como R y S son matrices pentadiagonales. Operando fila a fila con estas matrices (véase [21] para más detalle), en un nodo interno i , esto es, para $i \geq 2$, la ecuación matricial (3.13) se escribe

$$\begin{aligned} & \frac{1}{120} (u'_{i-2} + 26u'_{i-1} + 66u'_i + 26u'_{i+1} + u'_{i+2}) \\ & + \frac{h_0^2 \sqrt{gh_0}}{12 \delta^3} (-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}) \\ & + \frac{\sqrt{gh_0}}{24 \delta} (-u_{i-2} - 10u_{i-1} + 10u_{i+1} + u_{i+2}) \\ & + \frac{1}{32 \delta} (-u_{i-2}^2 - 10u_{i-1}^2 + 10u_{i+1}^2 + u_{i+2}^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.2.2. Problema aproximado para RLW

El problema variacional (3.4) será aproximado de nuevo en el mismo marco funcional dado por los espacios de discretización V_δ y W_δ , para la solución del problema $u_\delta \in$

$C^1([0, T]; V_\delta)$ y para las funciones test $w_\delta \in W_\delta$. En el problema asociado a la ecuación RLW, la solución u_δ satisface $u_\delta(x, 0) = u^0 \in V_\delta$ y además verifica

$$\int_0^\infty w_\delta \frac{\partial u_\delta}{\partial t} - \sqrt{gh_0} \int_0^\infty \frac{\partial w_\delta}{\partial x} u_\delta - \frac{3}{4} \int_0^\infty \frac{\partial w_\delta}{\partial x} u_\delta^2 - \frac{h_0^2}{6} \int_0^\infty \frac{\partial^2 w_\delta}{\partial x^2} \frac{\partial u_\delta}{\partial t} = 0.$$

Como en el problema anterior, si escribimos u_δ como la combinación lineal asociada a la base $\{\psi_j\}_{j=1}^J$, dada por la expresión (3.8), el problema aproximado equivale a calcular el conjunto de funciones (en la variable temporal) $\{u_j \in C^1([0, T]) : j = 1, \dots, J\}$ tales que, para todo $u_j(0) = u_j^0$ y además satisfacen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J u_j'(t) \int_0^\infty \phi_i(x) \psi_j(x) dx - \sqrt{gh_0} \sum_{j=0}^J u_j(t) \int_0^\infty \phi_i'(x) \psi_j(x) dx \\ - \frac{3}{4} \sum_{j=0}^J u_j^2(t) \int_0^\infty \phi_i'(x) \psi_j(x) dx - \frac{h_0^2}{6} \sum_{j=0}^J u_j'(t) \int_0^\infty \phi_i''(x) \psi_j(x) dx = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

para todo $i = 0, \dots, J$, teniendo en cuenta que estamos utilizando una técnica de aproximación del producto.

Si escribimos el anterior sistema de ecuaciones en notación matricial, obtenemos, para cada $i = 0, \dots, J$,

$$\left(M_{ij} - \frac{h_0^2}{6} Q_{ij} \right) u_j - \sqrt{gh_0} R_{ij} u_j - \frac{3}{4} R_{ij} u_j^2 = 0, \quad (3.16)$$

donde las matrices M y R ya fueron introducidas para la ecuación KdV y Q viene dada por

$$Q_{ij} = \int_0^\infty \phi_i''(x) \psi_j(x) dx,$$

para todo $1 \leq j \leq J$.

Teniendo de nuevo en cuenta las definiciones de las funciones de forma que forman las bases para los espacios de discretización V_δ y W_δ , se deduce fácilmente que Q también es una matriz pentadiagonal. Al operar con cada fila de este sistema matricial (ver [21] para más detalle), encontramos que en un nodo interno i , es decir, para $i \geq 2$, la ecuación matricial (3.16) se escribe

$$\begin{aligned} & \frac{1}{120} (u'_{i-2} + 26u'_{i-1} + 66u'_i + 26u'_{i+1} + u'_{i+2}) \\ & + \frac{h_0^2}{36} \frac{1}{\delta^2} (-u'_{i-2} - 2u'_{i-1} + 6u'_i - 2u'_{i+1} - u'_{i+2}) \\ & + \frac{\sqrt{gh_0}}{24} \frac{1}{\delta} (-u_{i-2} - 10u_{i-1} + 10u_{i+1} + u_{i+2}) \\ & + \frac{1}{32} \frac{1}{\delta} (-u_{i-2}^2 - 10u_{i-1}^2 + 10u_{i+1}^2 + u_{i+2}^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.2.3. Condiciones de contorno

En la descripción del método semi-discretizado en espacio utilizado hemos focalizado nuestra atención en las ecuaciones que deben satisfacer los valores nodales u_j , para $j = 1, \dots, J$ cuando trabajamos con los espacios de discretización V_δ y W_δ . Es evidente que, puesto que hemos considerado condiciones de contorno homogéneas, no existe ningún tipo de contribución en las ecuaciones diferenciales y estas ya están incorporadas de forma natural en la formulación variacional semi-discreta (3.13) y (3.16) de los problemas modelo KdV y RLW, respectivamente.

Sin embargo, si seguimos la descripción del método de discretización de elementos finitos Petrov-Galerkin usado por Woo y Liu en [21] para el modelo extendido de las ecuaciones de Boussinesq, la estrategia de implementación es ligeramente diferente. En ese trabajo, extienden los puntos de la discretización en espacio con dos nuevos puntos $x_{-2} = -2\delta$ y $x_{-1} = -\delta$, y suponen que en todos los puntos de la partición original x_i , para $i = 0, \dots, J$ se satisface la ecuación discreta (3.14) para el modelo KdV (o bien (3.17) para el modelo RLW) como si se trataran de puntos interiores de la partición. Al hacer esto, deben tratar de forma adicional cómo imponer las condiciones de contorno sobre el nodo frontera x_0 . En lo que sigue estudiaremos más en detalle como se realiza este proceso en [21], para el problema simplificado de la ecuación KdV (en el caso de las condiciones de contorno para la ecuación RLW sería análogo).

En primer lugar, es inmediato trasladar la condición de contorno $u(0, t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$ al problema semi-discreto como $u_0(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. Para el caso de la condición de contorno $\partial u / \partial x(0, t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$, se aproxima la primera derivada mediante un esquema centrado en x_0 de diferencias finitas de paso 2δ . Si introducimos los valores nodales $u_{-2}(t)$ y $u_{-1}(t)$ como las funciones que nos proporcionan una aproximación de los valores alcanzados en los puntos espaciales x_{-2} y x_{-1} , obtenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{u_1(t) - u_{-1}(t)}{2\delta} + \mathcal{O}(\delta) = 0,$$

con lo que añadiríamos como nueva ecuación al sistema semi-discretizado, $u_1(t) - u_{-1}(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$. De forma análoga, también se trata la condición de contorno $\partial^2 u / \partial x^2(0, t) = 0$, aproximando la segunda derivada mediante un esquema centrado en x_0 de diferencias finitas de paso 2δ . De esta forma se tiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{u_{-2}(t) - 2u_0(t) + u_2(t)}{4\delta^2} + \mathcal{O}(\delta^2) = 0,$$

con lo que añadiríamos como nueva ecuación al sistema semi-discretizado, $u_2(t) + u_{-2}(t) = 0$ para todo $t \in [0, T]$.

Con estas dos últimas ecuaciones añadidas, en principio el sistema de ecuaciones a resolver vuelve a estar bien planteado, ya que tiene el mismo número de incógnitas que de ecuaciones. El inconveniente de esta estrategia radica en el bajo orden de precisión de las diferencias finitas usadas para aproximar la derivada primera y segunda, lo que podría introducir inestabilidades en el esquema discretizado en tiempo ¹.

¹De hecho, estas inestabilidades se han reproducido numéricamente, si no se utiliza el mecanismo de filtrado que posee implementado el programa de ordenador MANOLO1D, usado en las simulaciones numéricas

En el caso del problema simplificado para la ecuación RLW, si se sigue la misma estrategia y se introducen dos puntos adicionales x_{-2} y x_{-1} , la única condición que se debe discretizar en espacio es la dada por la primera derivada espacial. En este caso, a partir de una única condición de contorno, debemos deducir dos ecuaciones adicionales para imponer sobre el sistema de ecuaciones, las cuales serán dos diferencias finitas centradas en x_0 con paso 2δ y 4δ , es decir,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(0, t) &= \frac{u'_1(t) - u'_{-1}(t)}{2\delta} + \mathcal{O}(\delta) = 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(0, t) &= \frac{u'_2(t) - u'_{-2}(t)}{4\delta} + \mathcal{O}(\delta) = 0.\end{aligned}$$

En consecuencia, las ecuaciones que completarían el sistema serían $u'_1(t) - u'_{-1}(t) = 0$ y $u'_2(t) - u'_{-2}(t) = 0$. De nuevo, esta estrategia posee los mismos inconvenientes (precisión local de bajo orden) que podrían afectar a la estabilidad global del método de discretización en tiempo.

Capítulo 4

Discretización en tiempo

4.1. Métodos predictor-corrector

Un método predictor-corrector es un método lineal que consiste en, dado un problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y' &= F(t, Y), \\ Y(t_0) &= Y_0, \end{cases}$$

elegir $Y_{n+1}^{(0)}$ con un método lineal explícito (método predictor) y aplicar $s \geq 1$ iteraciones con un método lineal implícito (método corrector).

En este trabajo utilizaremos un método predictor-corrector de tipo Adams-Bashforth-Moulton, que consiste en aplicar un esquema explícito de Adams-Bashforth de tercer orden con tres pasos (predictor),

$$Y_{n+1}^{(0)} = Y_n + \frac{h}{12} (23F(t_n, Y_n) - 16F(t_{n-1}, Y_{n-1}) + 5F(t_{n-2}, Y_{n-2})), \quad (4.1)$$

y aplicar s iteraciones de un esquema implícito de Adams-Moulton de cuarto orden con tres pasos (corrector),

$$Y_{n+1}^{(s)} = Y_n + \frac{h}{24} \left(9F(t_{n+1}, Y_{n+1}^{(s-1)}) + 19F(t_n, Y_n) - 5F(t_{n-1}, Y_{n-1}) + F(t_{n-2}, Y_{n-2}) \right). \quad (4.2)$$

Notar que en nuestro caso, aplicaremos este método predictor-corrector sobre el sistema semi-discretizado obtenido en la sección anterior, por lo que para KdV, identificamos $Y = u_j(t)$ y

$$F(t, Y) = M_{ij}^{-1} \left(\left(-\frac{h_0^2}{6} \sqrt{gh_0} S_{ij} + \sqrt{gh_0} R_{ij} \right) Y + \frac{3}{4} R_{ij} Y^2 \right),$$

y para RLW, identificamos $Y = u_j(t)$ y

$$F(t, Y) = \left(M_{ij} - \frac{h_0^2}{6} Q_{ij} \right)^{-1} \left(\sqrt{gh_0} R_{ij} Y + \frac{3}{4} R_{ij} Y^2 \right).$$

Esta identificación formal del funcional F involucra la inversión de una matriz. Debemos hacer notar, que en la implementación de este método en el ordenador, esta

inversión nunca se realiza, sino que se factoriza la matriz una única vez para después, en cada paso de tiempo, aplicar la factorización sobre cada segundo miembro particular.

4.2. Aproximación en tiempo para KdV

Si consideramos una partición uniforme del intervalo $[0, T]$, con paso Δt constante, y definimos los puntos de dicha partición como $t_n = n\Delta t$, para $n = 0, \dots, N$ con $T = N\Delta t$, nuestro objetivo será calcular los valores puntuales $u_j^n = u_j(t_n)$ para todo $n = 0, \dots, N$.

Si aplicamos la estrategia predictor-corrector descrita en la sección anterior a la formulación matricial descrita para el problema modelo con la ecuación KdV, obtenemos en primer lugar la aplicación del esquema explícito Adams-Bashforth de tercer orden (predictor) para obtener la primera aproximación $\{u_j^{n+1(0)}\}_{1 \leq j \leq J}$, la cual satisface

$$M_{ij} \left(\frac{u_j^{n+1(0)} - u_j^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{12} \left(\sqrt{gh_0} \left(R_{ij} - \frac{h_0^2}{6} S_{ij} \right) \left[23u_j^n - 16u_j^{n-1} + 5u_j^{n-2} \right] + \frac{3}{4} R_{ij} \left[23(u_j^n)^2 - 16(u_j^{n-1})^2 + 5(u_j^{n-2})^2 \right] \right). \quad (4.3)$$

A continuación, se aplicará el esquema Adams-Moulton de cuarto orden (corrector) de forma iterativa. En la k -ésima iteración, el valor de la aproximación $\{u_j^{n+1(k)}\}_{1 \leq j \leq J}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$M_{ij} \left(\frac{u_j^{n+1(k)} - u_j^n}{\Delta t} \right) = \frac{1}{24} \left(\sqrt{gh_0} \left(R_{ij} - \frac{h_0^2}{6} S_{ij} \right) \left[9u_j^{n+1(k-1)} + 19u_j^n - 5u_j^{n-1} + u_j^{n-2} \right] + \frac{3}{4} R_{ij} \left[9(u_j^{n+1(k-1)})^2 + 19u_j^n - 5u_j^{n-1} + u_j^{n-2} \right] \right). \quad (4.4)$$

Como ya se analizó cuando se describió el método predictor-corrector, los valores de $\{u_j^{n+1(k)}\}_{1 \leq j \leq J}$ en la iteración k se calculan a partir de los valores de $\{u_j^{n+1(k-1)}\}_{1 \leq j \leq J}$ obtenidos en la iteración $k - 1$. Este proceso iterativo finaliza cuando el error relativo entre dos iteraciones consecutivas,

$$\text{error}^{n+1(k)} = \frac{\max_{1 \leq j \leq J} |u_j^{n+1(k)} - u_j^{n+1(k-1)}|}{\max_{1 \leq j \leq J} |u_j^{n+1(k)}|}, \quad (4.5)$$

sea menor que una tolerancia de parada fijada $\epsilon > 0$, es decir, cuando se verifique que

$$\text{error}^{n+1(k)} < \epsilon.$$

4.3. Aproximación en tiempo para RLW

Si consideramos una partición uniforme del intervalo $[0, T]$, con paso Δt constante, y definimos los puntos de dicha partición como $t_n = n\Delta t$, para $n = 0, \dots, N$ con $T = N\Delta t$, nuestro objetivo será calcular los valores puntuales $u_j^n = u_j(t_n)$ para todo $n = 0, \dots, N$.

Si aplicamos la estrategia predictor-corrector descrita en la sección anterior a la formulación matricial descrita para el problema modelo con la ecuación KdV, obtenemos en primer lugar la aplicación del esquema explícito Adams-Bashforth de tercer orden (predictor) para obtener la primera aproximación $\{u_j^{n+1(0)}\}_{1 \leq j \leq J}$, la cual satisface

$$\left(M_{ij} - \frac{h_0^2}{6} Q_{ij}\right) \left(\frac{u_j^{n+1(0)} - u_j^n}{\Delta t}\right) = \frac{1}{12} \left(\sqrt{gh_0} R_{ij} \left[23u_j^n - 16u_j^{n-1} + 5u_j^{n-2}\right] + \frac{3}{4} R_{ij} \left[23(u_j^n)^2 - 16(u_j^{n-1})^2 + 5(u_j^{n-2})^2\right]\right). \quad (4.6)$$

A continuación, se aplicará el esquema Adams-Moulton de cuarto orden (corrector) de forma iterativa. En la k -ésima iteración, el valor de la aproximación $\{u_j^{n+1(k)}\}_{1 \leq j \leq J}$ satisface el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \left(M_{ij} - \frac{h_0^2}{6} Q_{ij}\right) \left(\frac{u_j^{n+1(k)} - u_j^n}{\Delta t}\right) \\ = \frac{1}{24} \left(\sqrt{gh_0} R_{ij} \left[9u_j^{n+1(k-1)} + 19u_j^n - 5u_j^{n-1} + u_j^{n-2}\right] \right. \\ \left. + \frac{3}{4} R_{ij} \left[9(u_j^{n+1(k-1)})^2 + 19(u_j^n)^2 - 5(u_j^{n-1})^2 + (u_j^{n-2})^2\right]\right). \quad (4.7) \end{aligned}$$

Como ya se analizó cuando se describió el método predictor-corrector, los valores de $\{u_j^{n+1(k)}\}_{1 \leq j \leq J}$ en la iteración k se calculan a partir de los valores de $\{u_j^{n+1(k-1)}\}_{1 \leq j \leq J}$ obtenidos en la iteración $k-1$. Este proceso iterativo finaliza cuando el error relativo entre dos iteraciones consecutivas,

$$\text{error}^{n+1(k)} = \frac{\max_{1 \leq j \leq J} |u_j^{n+1(k)} - u_j^{n+1(k-1)}|}{\max_{1 \leq j \leq J} |u_j^{n+1(k)}|}, \quad (4.8)$$

sea menor que una tolerancia de parada fijada $\epsilon > 0$, es decir, cuando se verifique que

$$\text{error}^{n+1(k)} < \epsilon.$$

4.4. Análisis de estabilidad

Para comprobar la estabilidad numérica del esquema predictor-corrector de la discretización temporal propuesta se ha realizado un análisis de estabilidad de Von Neumann para el esquema predictor. Este análisis nos proporcionará una condición necesaria para la estabilidad del sistema discreto completo. Evidentemente, la no linealidad

de las ecuaciones KdV y RLW dificulta este estudio. En lo que sigue, trabajaremos con las ecuaciones linealizadas y comprobaremos mediante la estimación del factor de amplificación la estabilidad del esquema.

Para realizar el análisis de estabilidad, supondremos que la solución del esquema discreto en la etapa K -ésima del esquema predictor-corrector, en el nodo interior x_j y en el instante de tiempo t_n , viene dada por un modo de Fourier de la forma

$$u_j^{n(K)} = \xi^n \exp(ikj\delta) \quad (4.9)$$

para todo $j = 1, \dots, J$ y $n = 0, \dots, N$, siendo ξ el factor de amplificación, k el número de onda e i la unidad imaginaria.

Evidentemente, este análisis no garantiza la estabilidad del esquema discretizado completo, ya que no se van a tener en cuenta las condiciones de contorno en $x = 0$ (ni tampoco la discretización de éstas). Por lo tanto, todas las consideraciones hechas a lo largo de esta sección deben ser entendidas como condiciones necesarias para la estabilidad del sistema discretizado completo.

4.4.1. Modelo KdV

En primer lugar, analizaremos la ecuación que satisface el factor de amplificación en la etapa del predictor. Teniendo en cuenta (3.14), la ecuación (4.3) puede escribirse, para cada nodo j , como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{120} \left[u_{j-2}^{n+1(0)} + 26u_{j-1}^{n+1(0)} + 66u_j^{n+1(0)} + 26u_{j+1}^{n+1(0)} + u_{j+2}^{n+1(0)} \right] \\ &= \frac{1}{120} \left[u_{j-2}^n + 26u_{j-1}^n + 66u_j^n + 26u_{j+1}^n + u_{j+2}^n \right] \\ &+ \frac{\Delta t}{12} \left(23 \left[\sqrt{gh_0} \left(\frac{1}{24} \frac{1}{\delta} (u_{j-2}^n + 10u_{j-1}^n - 10u_{j+1}^n - u_{j+2}^n) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{h_0^2}{12} \frac{1}{\delta^3} (u_{j-2}^n - 2u_{j-1}^n + 2u_{j+1}^n - u_{j+2}^n) \right) \right] \right. \\ &- 16 \left[\sqrt{gh_0} \left(\frac{1}{24} \frac{1}{\delta} (u_{j-2}^{n-1} + 10u_{j-1}^{n-1} - 10u_{j+1}^{n-1} - u_{j+2}^{n-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{h_0^2}{12} \frac{1}{\delta^3} (u_{j-2}^{n-1} - 2u_{j-1}^{n-1} + 2u_{j+1}^{n-1} - u_{j+2}^{n-1}) \right) \right] \\ &+ 5 \left[\sqrt{gh_0} \left(\frac{1}{24} \frac{1}{\delta} (u_{j-2}^{n-2} + 10u_{j-1}^{n-2} - 10u_{j+1}^{n-2} - u_{j+2}^{n-2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{h_0^2}{12} \frac{1}{\delta^3} (u_{j-2}^{n-2} - 2u_{j-1}^{n-2} + 2u_{j+1}^{n-2} - u_{j+2}^{n-2}) \right) \right] \right). \end{aligned}$$

Si sustituimos la solución por su expresión en términos del modo de Fourier (4.9), obtenemos la ecuación para el factor de amplificación

$$\xi^3 - (1 + 23D_3)\xi^2 + 16D_3\xi - 5D_3 = 0, \quad (4.10)$$

siendo

$$D_0 = \frac{1}{60} [\cos(2k\delta) + 26\cos(k\delta) + 33], \quad (4.11)$$

$$D_1 = \frac{i}{12\delta} [-\sin(2k\delta) - 10\sin(k\delta)], \quad (4.12)$$

$$D_2 = \frac{i}{\delta^3} [-\sin(2k\delta) + 2\sin(k\delta)], \quad (4.13)$$

$$D_3 = \frac{\Delta t}{12} \sqrt{gh_0} \left(\frac{D_1 + \frac{h_0^2}{6} D_2}{D_0} \right). \quad (4.14)$$

4.4.2. Modelo RLW

En primer lugar, analizaremos la ecuación que satisface el factor de amplificación en la etapa del predictor. Teniendo en cuenta (3.17), la ecuación (4.6) puede escribirse, para cada nodo j , como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{120} \left[u_{j-2}^{n+1(0)} + 26u_{j-1}^{n+1(0)} + 66u_j^{n+1(0)} + 26u_{j+1}^{n+1(0)} + u_{j+2}^{n+1(0)} \right] \\ & + \frac{h_0^2}{36} \frac{1}{\delta^2} \left[-u_{j-2}^{n+1(0)} - 2u_{j-1}^{n+1(0)} + 6u_j^{n+1(0)} - 2u_{j+1}^{n+1(0)} - u_{j+2}^{n+1(0)} \right] \\ & = \frac{1}{120} \left[u_{j-2}^n + 26u_{j-1}^n + 66u_j^n + 26u_{j+1}^n + u_{j+2}^n \right] \\ & + \frac{h_0^2}{36} \frac{1}{\delta^2} \left[-u_{j-2}^n - 2u_{j-1}^n + 6u_j^n - 2u_{j+1}^n - u_{j+2}^n \right] \\ & + \frac{\Delta t}{12} \left(23 \left[\frac{\sqrt{gh_0}}{24} \frac{1}{\delta} (u_{j-2}^n + 10u_{j-1}^n - 10u_{j+1}^n - u_{j+2}^n) \right] \right. \\ & \left. - 16 \left[\frac{\sqrt{gh_0}}{24} \frac{1}{\delta} (u_{j-2}^{n-1} + 10u_{j-1}^{n-1} - 10u_{j+1}^{n-1} - u_{j+2}^{n-1}) \right] \right. \\ & \left. + 5 \left[\frac{\sqrt{gh_0}}{24} \frac{1}{\delta} (u_{j-2}^{n-2} + 10u_{j-1}^{n-2} - 10u_{j+1}^{n-2} - u_{j+2}^{n-2}) \right] \right). \end{aligned}$$

Si sustituimos la solución por su expresión en términos del modo de Fourier (4.9), obtenemos la ecuación que satisface el factor de amplificación

$$\xi^3 - (1 + 23D_5)\xi^2 + 16D_5\xi - 5D_5 = 0, \quad (4.15)$$

siendo

$$D_4 = \frac{1}{3\delta^2} [-\cos(2k\delta) - 2\cos(k\delta) + 3], \quad (4.16)$$

$$D_5 = \frac{\Delta t}{12} \sqrt{gh_0} \left(\frac{D_1}{D_0 + \frac{h_0^2}{6} D_4} \right), \quad (4.17)$$

con D_0 y D_1 las constantes definidas en (4.11) y (4.12), respectivamente.

Capítulo 5

Condiciones absorbentes

La simulación numérica de la propagación de ondas en el océano a menudo involucra dominios no acotados. Sin embargo la región de interés físico suele reducirse a un dominio concreto y reducido de la costa. Puesto que la implementación en cualquier programa de ordenador de un método de discretización implica trabajar con un número finito de grados de libertad, se hace necesario truncar el dominio físico no acotado del problema, de forma que la solución del problema original no se vea perturbada. Una forma de conseguirlo es imponer condiciones de contorno absorbentes en la frontera artificial donde se trunca el dominio original, y garantizar así que las ondas se propagan hacia el exterior del dominio computacional truncado sin reflejarse.

En la bibliografía pueden encontrarse multitud de versiones de estas condiciones absorbentes o esponjas (véase por ejemplo [4, 15, 10, 17, 19]). En esta sección sólo analizaremos dos de ellas: la propuesta por Wei y Kirby en [19] y la técnica de capas perfectamente acopladas (o capas PML, de su acrónimo en inglés “Perfectly Matched Layer” introducido en [4]). Los resultados numéricos obtenidos con estas condiciones absorbentes, junto con los conseguidos sin usar ninguna capa absorbente (simplemente con una condición de truncadura que involucra la discretización de condiciones tipo Neumann sobre las incógnitas del modelo (véase por ejemplo [15])), serán detalladas en la siguiente sección.

Evidentemente, la solución ingenua de truncar el dominio computacional mediante una condición de contorno homogénea tipo Dirichlet o Neumann, hace que se refleje parte del oleaje recibido en la frontera artificial. Una alternativa para aliviar la aparición de estas reflexiones espúreas en la solución de problema truncado consiste en incluir en el dominio computacional una capa de material absorbente artificial, (véase la Figura 5.1), de tal forma que, aún imponiendo una condición de pared reflejante en la frontera exterior del dominio, la esponja numérica absorberá las ondas reflejadas no deseadas antes de que éstas contaminen la aproximación numérica del problema no acotado.

5.1. Capa absorbente de Wei-Kirby

La capa absorbente que se ha tomado como referencia es la propuesta por Wei y Kirby (véase [19]). Ésta consiste en añadir dos nuevos términos de amortiguación a las ecuaciones. El primer término que se añade es $\omega_1(x)u$, que recibe el nombre de

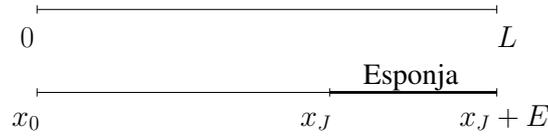


Figura 5.1: Dominio computacional unidimensional sin capa absorbente (arriba) y con la incorporación de una capa absorbente en el dominio computacional (abajo)

“enfriamiento Newtoniano”, y el segundo término es $\omega_2(x)u_{xx}$, análogo al término lineal que modela la viscosidad en el modelo que gobierna los fluidos Newtonianos. Siguiendo el estudio propuesto en [19], las funciones ω_1 y ω_2 vienen dadas por

$$\omega_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_J, \\ \alpha_1 \omega f(x) & \text{si } x_J < x \leq x_J + E, \end{cases}$$

$$\omega_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq x_J, \\ \alpha_2 \nu f(x) & \text{si } x_J < x \leq x_J + E, \end{cases}$$

siendo α_1 y α_2 dos constantes que deberán ser optimizadas para cada simulación numérica, ω es la frecuencia angular típica del problema de propagación de ondas a abordar y E es el espesor de la capa absorbente, que habitualmente (siguiendo las recomendaciones propuestas en [19]) debe tomarse de forma que $E \geq 2,5\lambda$, con λ la longitud de onda típica del problema. Además, también aparecen involucradas en la definición de ω_1 y ω_2 , el coeficiente de viscosidad artificial ν y la función auxiliar

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x - x_J}{E}\right)^d - 1}{\exp(1) - 1},$$

donde $d \geq 2$.

En el caso donde tomemos $\omega_2 = 0$, y bajo ciertas hipótesis restrictivas sobre las ecuaciones que gobiernan la propagación de ondas, podemos probar que la capa absorbente propuesta por Wei y Kirby [19] es equivalente a la técnica PML. Éste será el objetivo de la siguiente subsección.

5.2. Capas absorbentes y PMLs

Para estudiar la relación entre las capas absorbentes propuestas por Wei y Kirby y la técnica PML, introducida por Berenger [3, 4, 5] en 1994, ilustraremos su aplicación en problemas lineales simples de propagación de ondas.

La técnica PML se basa de nuevo en situar una capa absorbente de un material artificial en el dominio computacional con el que rodear a la región con interés físico que se quiere estudiar. De esta forma, se espera que si los coeficientes de la PML son elegidos

de forma adecuada y el espesor de la capa PML es lo suficientemente grueso, entonces esta capa absorberá las ondas que viajan hacia el exterior del dominio computacional, sin generar reflexiones espúreas en la frontera exterior donde se ha truncado el dominio original no acotado.

El calificativo de capas “perfectamente acopladas” proviene de la característica que poseen estas capas de no generar reflexiones espúreas en la frontera interfaz entre la región física de interés y la capa absorbente (característica que no comparten otras capas absorbentes, como puede ser la propuesta por Wei y Kirby cuando $\omega_2 > 0$).

Debemos hacer notar que en la actualidad no existe ningún modelo específico de capas PML para problemas no lineales, debido a la dificultad técnica de su desarrollo. Existen sin embargo aplicaciones prácticas de capas PML derivadas para modelos lineales que son usadas como capas absorbentes en problemas no lineales (véase por ejemplo [8] o [1]). Por lo tanto, para ilustrar la equivalencia entre las capas absorbentes de Wei y Kirby con $\omega_2 = 0$ y las capas PML en el caso unidimensional, usaremos los dos modelos lineales de propagación de ondas más simples: la ecuación del transporte y la ecuación de ondas.

En el primer caso, supongamos que tenemos un problema de transporte unidimensional definido en el dominio $(x, t) \in (0, \infty) \times (0, T)$, donde la información se propaga con una velocidad c en el sentido positivo del eje x . Si suponemos que en el instante inicial la solución viene dada por una función ϕ_0 , podemos escribir el problema que gobierna el movimiento ondulatorio como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + c \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 0 && \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ \phi(0, t) &= 0 && \text{en } (0, T), \\ \phi(x, 0) &= \phi_0(x) && \text{en } (0, \infty). \end{aligned}$$

Es inmediato probar que la solución exacta de este problema es $\phi(x, t) = \phi_0(x - ct)$. Si ahora queremos truncar el dominio espacial mediante la técnica de PML, bastaría con mantener las mismas ecuaciones en el dominio acotado $(0, L)$ y modificar estas ecuaciones en el dominio donde situamos la capa PML, esto es, en (L, ∞) . Si suponemos que el soporte de la condición inicial está contenido en $(0, L)$, y que σ es una función nula en $(0, L)$ y positiva y creciente en (L, ∞) , el modelo PML para la ecuación del transporte consiste en calcular una nueva solución $\tilde{\phi}$ solución de un nuevo problema, que se puede construir a partir del modelo original. En el caso de la ecuación del transporte, la construcción es sencilla. En primer lugar se toma la ecuación original evaluada sobre $\tilde{\phi}$ y se reemplazan formalmente todas las apariciones de derivadas espaciales $\partial \tilde{\phi} / \partial x$ por $\partial \phi^* / \partial x$, siendo ϕ^* la nueva incógnita que será candidata a aproximar a la incógnita original del problema original no acotado. Esta nueva incógnita satisface

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \sigma \phi^* = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t}.$$

Al tener en cuenta las dos ecuaciones, resulta el siguiente problema PML: encontrar $\tilde{\phi}$

y ϕ^* tal que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} + c \frac{\partial \phi^*}{\partial x} &= 0 && \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ \frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \sigma \phi^* &= \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} && \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ \tilde{\phi}(0, t) &= 0 && \text{en } (0, T), \\ \tilde{\phi}(x, 0) &= \phi_0(x) && \text{en } (0, \infty).\end{aligned}$$

Si intentamos simplificar el anterior problema PML, podemos escribir una única ecuación en derivadas parciales en términos de ϕ^* ,

$$\frac{\partial \phi^*}{\partial t} + \sigma \phi^* + c \frac{\partial \phi^*}{\partial x} = 0 \quad \text{en } (0, \infty) \times (0, T),$$

que resulta ser la ecuación que obtendríamos para la capa absorbente de Wei y Kirby con $\omega_2 = 0$ y $\omega_1 = \sigma$. Es fácil probar que la solución del problema PML en un dominio no acotado viene dado por

$$\phi^*(x, t) = \phi_0(x - ct) e^{-\frac{1}{c} \int_0^x \sigma(s) ds}.$$

Al obtener la solución del problema PML se han conseguido dos objetivos: por un lado $\phi^*(x, t) = \phi(x, t)$ en el dominio de interés físico $(0, L)$ y por otro, ahora la solución de problema PML posee un decaimiento exponencial. Gracias a este decrecimiento exponencial es posible truncar la capa PML a una distancia finita del dominio físico de interés, introduciendo sólo un pequeño error de truncadura que será exponencialmente decreciente con respecto al espesor de la capa PML.

En el caso del modelo gobernado por la ecuación de ondas, vamos a suponer que la presión P , incógnita del problema de propagación de ondas es solución del problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} &= 0 && \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ P(0, t) &= 0 && \text{en } (0, T), \\ P(x, 0) &= P_0(x) && \text{en } (0, \infty), \\ \frac{\partial P}{\partial t}(x, 0) &= P_1(x) && \text{en } (0, \infty).\end{aligned}$$

Para construir el problema PML asociado a la ecuación de ondas unidimensional, reescribimos el problema hiperbólico original como un sistema de primer orden en tiempo, esto es, introducimos el campo de velocidades V como una incógnita adicional, obteniendo así

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} + c \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 && \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ \frac{\partial V}{\partial t} + c \frac{\partial P}{\partial x} &= 0 && \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ P(0, t) &= 0 && \text{en } (0, T), \\ P(x, 0) &= P_0(x) && \text{en } (0, \infty), \\ \frac{\partial V}{\partial x}(x, 0) &= -\frac{1}{c} P_1(x) && \text{en } (0, \infty).\end{aligned}$$

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso de la ecuación de transporte, sustituimos las derivadas espaciales por derivadas de una función auxiliar sobre la que introducimos un termino disipativo. De forma análoga al caso del transporte obtenemos el problema PML: obtener \tilde{P} , P^* , \tilde{V} y V^* que satisfagan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} + c \frac{\partial V^*}{\partial x} &= 0 & \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + c \frac{\partial P^*}{\partial x} &= 0 & \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ \frac{\partial P^*}{\partial t} + \sigma P^* &= \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t} & \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ \frac{\partial V^*}{\partial t} + \sigma V^* &= \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} & \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ \tilde{P}(0, t) &= 0 & \text{en } (0, T), \\ \tilde{P}(x, 0) &= P_0(x) & \text{en } (0, \infty), \\ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}(x, 0) &= -\frac{1}{c} P_1(x) & \text{en } (0, \infty), \end{aligned}$$

donde de nuevo hemos asumido que los soportes de las condiciones iniciales P_0 y P_1 son compactos y contenidos en $(0, L)$, y que σ es creciente y no negativa (siendo nula en $(0, L)$). De nuevo, es sencillo probar que el sistema de ecuaciones que describe el problema PML se puede escribir sólo en función de P^* y V^* como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^*}{\partial t} + \sigma P^* + c \frac{\partial V^*}{\partial x} &= 0 & \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ \frac{\partial V^*}{\partial t} + \sigma V^* + c \frac{\partial P^*}{\partial x} &= 0 & \text{en } (0, \infty) \times (0, T), \\ P^*(0, t) &= 0 & \text{en } (0, T), \\ P^*(x, 0) &= P_0(x) & \text{en } (0, \infty), \\ \frac{\partial V^*}{\partial x}(x, 0) &= -\frac{1}{c} P_1(x) & \text{en } (0, \infty). \end{aligned}$$

A partir de esta reescritura, se sigue de forma inmediata que las soluciones del problema PML vienen dadas por las expresiones

$$\begin{aligned} P^*(x, t) &= P(x, t) e^{-\frac{1}{c} \int_0^x \sigma(s) ds}, \\ V^*(x, t) &= V(x, t) e^{-\frac{1}{c} \int_0^x \sigma(s) ds}, \end{aligned}$$

con lo que se consigue de nuevo el objetivo de preservar el valor de la solución original en $(0, L)$ y obtener un decaimiento exponencial de la solución en el interior de la capa PML. Evidentemente, en la práctica al truncar la capa PML a una distancia finita, se introducirá un error (que se presupone exponencialmente decreciente con respecto al valor del espesor de la capa PML).

5.3. Implementación heurística

En los dos ejemplos anteriores, se obtiene que la solución del problema PML viene dada por la solución del problema original a la que se le multiplica una exponencial decreciente que depende del parámetro de absorción σ . Esta característica es común a cualquier modelo lineal de PML sobre un dominio no acotado, pero bajo la condición de que sean formulados en primer orden y sólo en el caso unidimensional. En otras configuraciones, la relación entre las soluciones del problema original y el problema PML no tiene porqué ser válida. Aún así, y por su evidente simplicidad, nos valdremos de esta característica para implementar las capas PML en el programa de ordenador MANOLOID haciendo la siguiente suposición para el problema no lineal unidimensional de las ecuaciones extendidas de Boussinesq:

Dada una aproximación ϕ_δ del problema original truncado en un intervalo acotado $(0, L + E)$ con condiciones reflejantes en $x = L + E$, supondremos que se puede construir una aproximación del problema con capas absorbentes ϕ_δ^ como sigue:*

$$\phi_\delta^*(x_j, t_n) = \phi_\delta(x_j, t_n) e^{-\frac{1}{c} \int_0^{x_j} \sigma(s) ds},$$

si el valor de σ y el espesor E de la capa PML son suficientemente grandes.

Para ilustrar los resultados numéricos obtenidos con la técnica PML y esta estrategia de implementación, en la siguiente sección se proporcionarán algunos ejemplos con dos tipos de perfiles para σ . El primero de ellos se implementará multiplicando la solución obtenida para cada paso de tiempo n por la función $e(x)$

$$\phi_\delta^*(x_j, t_n) = \phi_\delta(x_j, t_n) e(x_j) \quad \forall j = 0, \dots, J, \quad (5.1)$$

siendo

$$e(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq x_J, \\ \exp(-\sigma_0) & \text{si } x_J < x \leq x_J + E, \end{cases}$$

y σ_0 una constante que se relaciona con el valor de la función absorbente $\sigma(x)$ del modelo de la capa PML por

$$\sigma_0 = \frac{1}{c} \int_0^x \sigma(s) ds, \quad x \in (x_J, x_J + E).$$

El problema más grave en este tipo de capas absorbentes consiste en la optimización de dicha constante σ_0 para tratar de minimizar, en la medida de lo posible, el error numérico introducido al truncar la capa PML a un espesor finito. De hecho, si el valor de σ_0 se escoge demasiado pequeño, la amplitud de las ondas entrantes no decrecería lo suficientemente rápido como para que fueran absorbidas antes de llegar a la frontera exterior, mientras que si se escoge demasiado grande, se produciría una capa límite que introduciría graves problemas de aproximación (y estabilidad) en el esquema discreto.

Como alternativa al uso de perfiles constantes σ_0 en el interior de la capa PML, también se comprobarán los resultados numéricos obtenidos con un perfil variable. En este caso, la implementación en el programa MANOLO1D vendrá dado por

$$\phi_\delta^*(x_j, t_n) = \phi_\delta(x_j, t_n)e(x_j) \quad \forall j = 0, \dots, J, \quad (5.2)$$

siendo

$$e(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq x_J, \\ \exp(-s(x)) & \text{si } x_J < x \leq x_J + E, \end{cases}$$

donde E es el espesor de la esponja, y

$$s(x) = A \left(\frac{x - x_J}{E} \right)^d = \frac{1}{c} \int_0^x \sigma(s) ds, \quad x \in (x_J, x_J + E)$$

con $d \geq 2$ y A una constante, que de nuevo deberá ser escogida de forma adecuada para minimizar el error de truncadura producido por una capa PML de espesor finito.

Capítulo 6

Resultados numéricos

En esta sección se realiza un estudio comparativo de las diferentes capas y condiciones absorbentes descritas en la Sección 5, implementados en el modelo de propagación de ondas, gobernado por las ecuaciones extendidas de Boussinesq unidimensionales, incluyendo los términos de alto orden (véase [21]). Este modelo está implementado en el programa MANOLO1D (Modelo Avanzado NO Lineal de Ondas), proporcionado por el Instituto de Hidráulica de Cantabria.

Se han realizado distintas simulaciones numéricas, donde la onda incidente es un solitón que viaja en el sentido positivo del eje x a una velocidad de propagación c . Para generar este solitón, se han utilizado condiciones de contorno no homogéneas en el extremo inferior del dominio computacional. Estas condiciones ya estaban implementadas en el programa de ordenador MANOLO1D.

El error relativo, cometido por el truncamiento del dominio físico no acotado mediante una capa absorbente, se ha calculado como la suma del error relativo en la aproximación de la elevación de la superficie libre y la componente de la velocidad.

Puesto que se desconoce la solución exacta del modelo, la solución de referencia η_{ref} y u_{ref} se ha calculado con la misma malla (tanto en espacio como en tiempo) que la solución aproximada y se ha tenido en cuenta que, al ser una solución basada en un solitón, su valor máximo debería permanecer constante a partir de un tiempo inicial $t = t_{N_0}$ en donde el soporte de la solución está totalmente contenido en el dominio físico truncado.

Para evaluar las eventuales reflexiones espúreas que provienen tanto de la interfaz entre el dominio físico y la capa absorbente como de la frontera exterior del dominio computacional, se ha evaluado la aproximación numérica en un instante de tiempo $t = t_N > (x_J + 2E)/c$. Tomando este instante de tiempo t_N , si el dominio computacional fuese suficientemente grande, la solución de referencia debería tener el soporte en el exterior del dominio físico $(0, x_J)$. Por lo tanto, el error relativo en el instante $t = t_N$ viene dado por

$$\frac{\max_{0 \leq j \leq J} |\eta_j^N - (\eta_{\text{ref}})_j^N|}{\max_{0 \leq j \leq J} |(\eta_{\text{ref}})_j^N|} + \frac{\max_{0 \leq j \leq J} |u_j^N - (u_{\text{ref}})_j^N|}{\max_{0 \leq j \leq J} |(u_{\text{ref}})_j^N|} = \frac{\max_{0 \leq j \leq J} |\eta_j^N|}{\max_{0 \leq j \leq J} |(\eta_{\text{ref}})_j^{N_0}|} + \frac{\max_{0 \leq j \leq J} |u_j^N|}{\max_{0 \leq j \leq J} |(u_{\text{ref}})_j^{N_0}|}.$$

Evidentemente, al utilizar en la solución aproximada y en la solución de referencia el mismo paso en tiempo y la misma malla para la discretización en espacio, el error relativo así definido sólo da una medida de los errores provenientes de las reflexiones espúreas producidas por la capa absorbente y no de la precisión del esquema de discretización.

6.1. Resultados numéricos para capas PML

En primer lugar se ha implementado la condición descrita en (5.2), es decir, una capa PML con perfil variable, y se han realizado distintas simulaciones, para $d = 2$ y $d = 3$, dando diferentes valores al espesor E y a la constante A . Todas ellas tienen implementada una condición de pared reflejante en su frontera derecha.

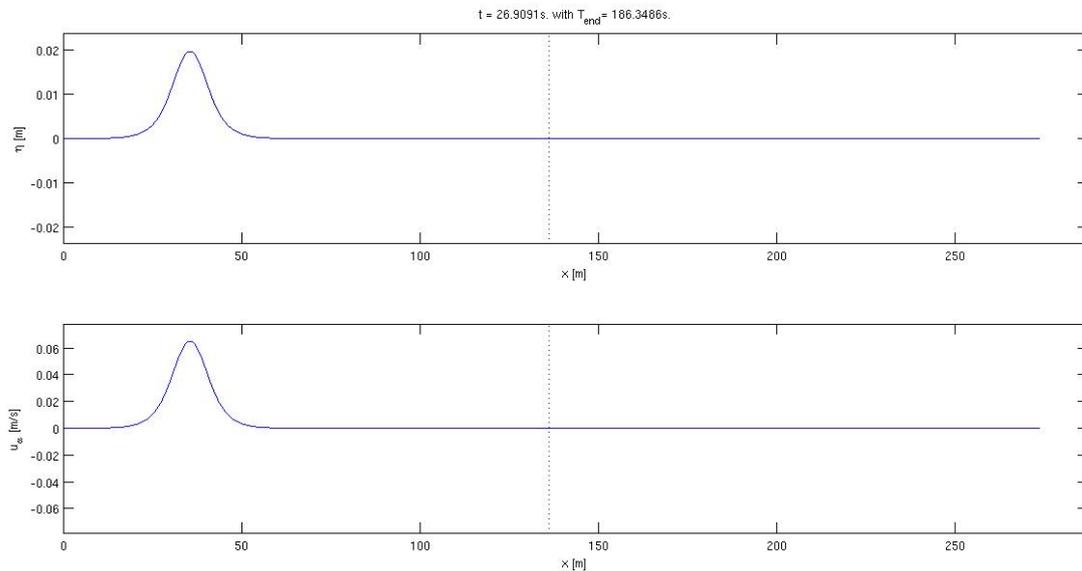


Figura 6.1: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una capa PML con perfil variable, para un instante de tiempo en el que el soporte del solitón está contenido en el dominio físico.

En las Figuras 6.1, 6.2 y 6.3 se han representado la velocidad horizontal y la elevación en tres instantes de tiempo diferentes, para ilustrar como se comporta la solución aproximada al propagarse por el dominio físico, al penetrar en la capa absorbente y cuando el eventual soporte del solitón reflejado entraría de nuevo en el dominio físico. En concreto, se han usado los parámetros $d = 2$, $E = 2,51\lambda$ y $A = 10$. En todas las simulaciones numéricas se observa que cuando el solitón penetra en la capa PML, disminuye su amplitud hasta que se hace prácticamente nula, sin producir reflexiones significativas.

En las Tablas 6.1 y 6.2 se presentan los errores relativos obtenidos con los diferentes valores de A y del espesor E (en función del valor de longitud de onda λ típica del

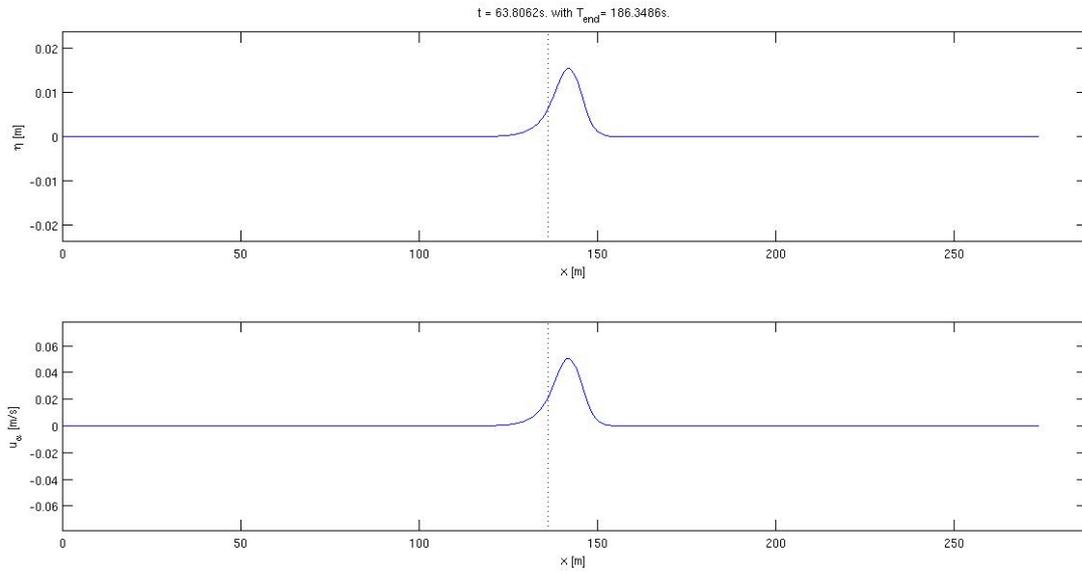


Figura 6.2: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una capa PML con perfil variable, para un instante de tiempo en el que el solitón ha sobrepasado la interfaz entre el dominio físico y la capa PML.

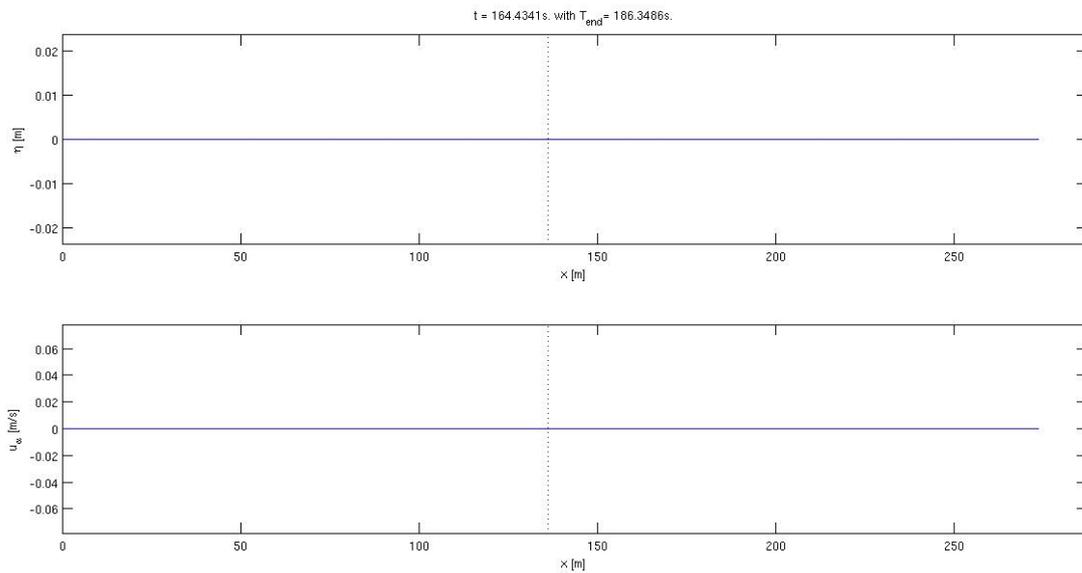


Figura 6.3: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una capa PML con perfil variable, para el instante de tiempo $t = t_N$.

solitón) para $d = 2$ y $d = 3$, respectivamente. Debido a como se ha fijado el valor del instante de tiempo $t = t_N$, al variar el espesor de la capa PML, también se ha variado el valor de t_N para que en todos los casos se verificará que $t_N > (x_J + 2E)/c$.

	$E = 2,51\lambda$	$E = 2,01\lambda$	$E = 1,51\lambda$	$E = 1,01\lambda$	$E = 0,51\lambda$
$A = 10^4$	0,00109553	0,00261482	0,01257805	0,01013002	0,01588428
$A = 10^2$	0,00007158	0,00067770	0,00129187	0,00125096	0,00155134
$A = 10$	0,0000349	0,00062190	0,00131005	0,00142052	0,00149837
$A = 1$	0,00029528	0,0003407	0,00080162	0,00099591	0,0013369
$A = 0,1$	0,00015431	0,00052507	0,00039824	0,0005211	0,00287846
$A = 0,05$	0,00012296	0,00050426	0,0003183	0,00112254	0,07174168
$A = 0,02$	0,00058107	0,00319153	0,01754036	0,09637304	0,52381390
$A = 0,01$	0,03276077	0,07763610	0,18429514	0,43643688	1,02155553

Tabla 6.1: Errores relativos obtenidos con una capa PML de perfil variable cuadrático ($d = 2$).

	$E = 2,51\lambda$	$E = 2,01\lambda$	$E = 1,51\lambda$	$E = 1,01\lambda$	$E = 0,51\lambda$
$A = 10^4$	0,00011137	0,00050210	0,00136991	0,00168886	0,00512412
$A = 10^2$	0,0000582	0,00060718	0,00125850	0,00134731	0,00128246
$A = 10$	0,00037145	0,00041905	0,00095860	0,00116226	0,00140846
$A = 1$	0,00022287	0,0003989	0,00060629	0,00078849	0,0011377
$A = 0,1$	0,00013297	0,00062055	0,0003549	0,0004852	0,02144951
$A = 0,05$	0,00015258	0,00049439	0,00040312	0,00902327	0,20088260
$A = 0,02$	0,00484456	0,01743751	0,06276406	0,22504630	0,79368376
$A = 0,01$	0,09534901	0,18286858	0,35003601	0,66845522	1,25926567

Tabla 6.2: Errores relativos obtenidos con una capa PML de perfil variable cúbico ($d = 3$).

A partir de los datos obtenidos en las tablas anteriores, podemos representar gráficamente el comportamiento del error relativo dependiendo del valor de la constante A para cada espesor E . Las Figuras 6.4 y 6.5 muestran estos errores relativos para $d = 2$ y $d = 3$, respectivamente. Puede observarse que, a medida que el valor de A aumenta, el error relativo decrece, alcanzándose un valor mínimo a partir del cual, el error crece de forma monótona. Éste es el comportamiento que cabría esperar de una capa PML en modelos lineales (véase [6], por ejemplo).

En segundo lugar, se ha implementado una capa PML con perfil constante, implementada mediante (5.1). De nuevo, se han realizado varias simulaciones para diferentes valores del espesor E y de la constante σ_0 . Todas ellas tienen implementada una condición de pared reflejante en su frontera derecha.

Las Figuras 6.6, 6.7 y 6.8 muestran las representaciones gráficas de la velocidad

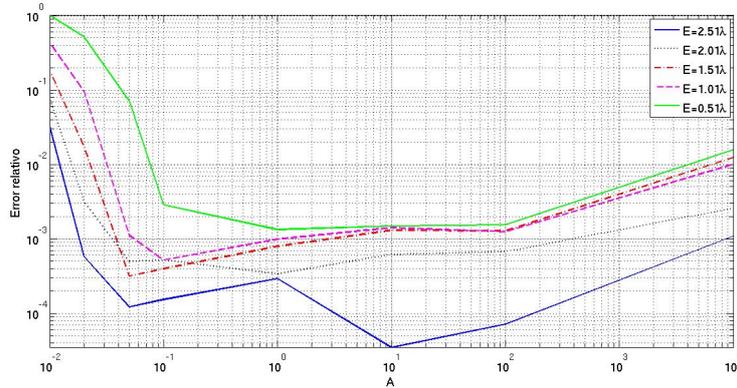


Figura 6.4: Errores relativos de una PML con perfil variable cuadrático ($d = 2$) para distintos espesores, representados frente a la amplitud A .

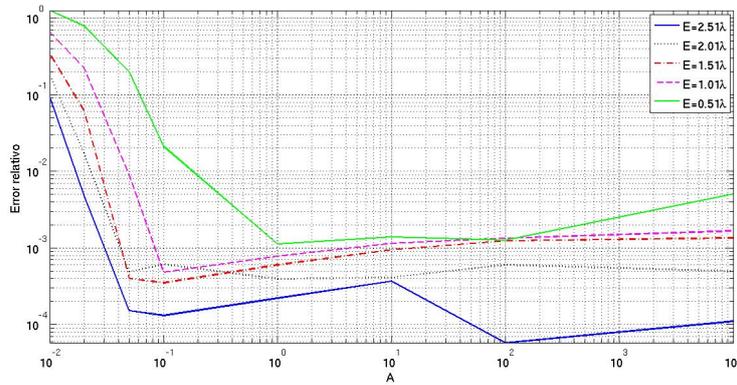


Figura 6.5: Errores relativos de una PML con perfil variable cúbico ($d = 3$) para distintos espesores, representados frente a la amplitud A .

horizontal y la elevación de la superficie libre de la solución aproximada en tres instantes de tiempo diferentes, para ilustrar como se comporta la solución aproximada al propagarse por el dominio físico, al penetrar en la capa absorbente y cuando el eventual soporte del solitón reflejado entraría de nuevo en el dominio físico.

En los tres instantes de tiempo, las simulaciones han sido realizadas tomando $E = 2,51\lambda$ y $\sigma_0 = 0,015$. En ellas se puede observar que, cuando el solitón penetra en la capa PML disminuye su amplitud hasta hacerse prácticamente nula, provocando una mínima reflexión. Nótese que al traspasar la interfaz entre el dominio físico y la capa PML, se producen ciertas inestabilidades, que se suavizan gracias al filtrado de frecuencias que está implementado en el programa MANOLO1D.

En la Tabla 6.3 presentamos los errores relativos para las distintas simulaciones, con los diferentes valores de σ_0 y del espesor E (en función del valor de longitud de onda λ típica del solitón). Debemos remarcar de nuevo que el valor de t_N depende de cada valor del espesor de la capa PML considerado.

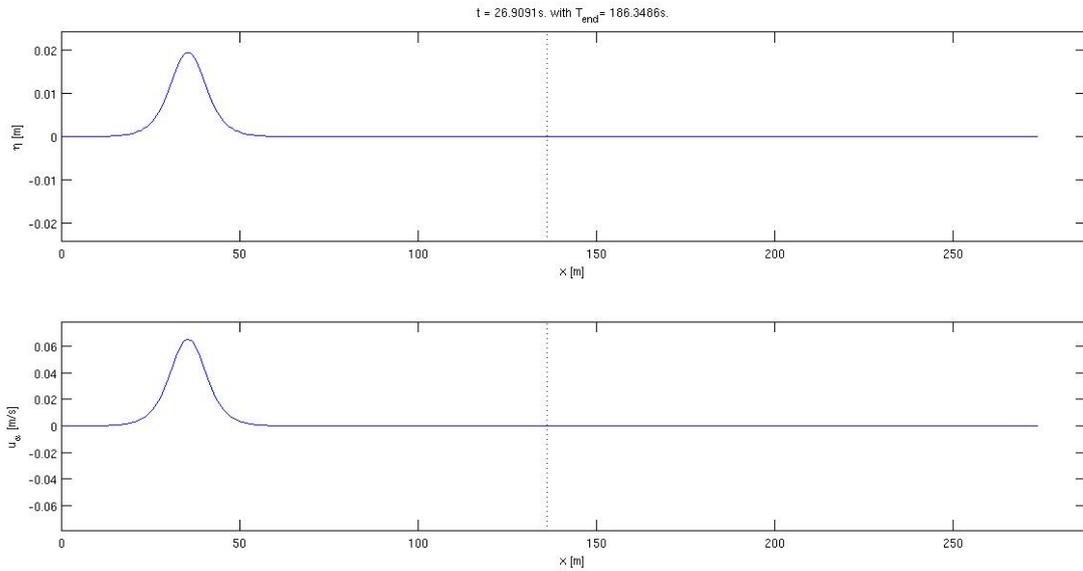


Figura 6.6: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una capa PML con perfil constante, para un instante de tiempo en el que el soporte del solitón está contenido en el dominio físico.

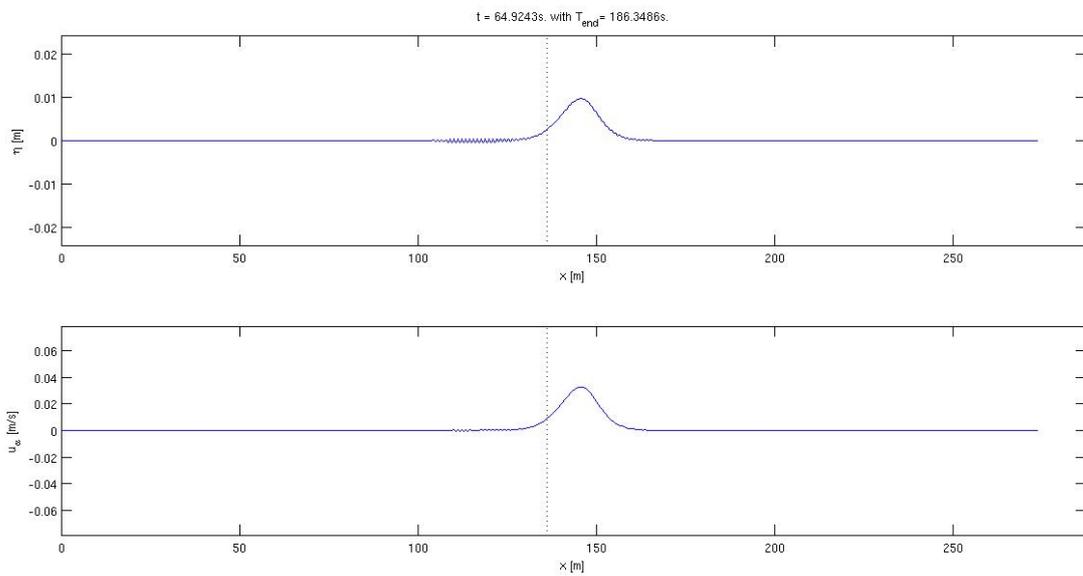


Figura 6.7: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una capa PML con perfil constante, para un instante de tiempo en el que el solitón ha sobrepasado la interfaz entre el dominio físico y la capa PML.

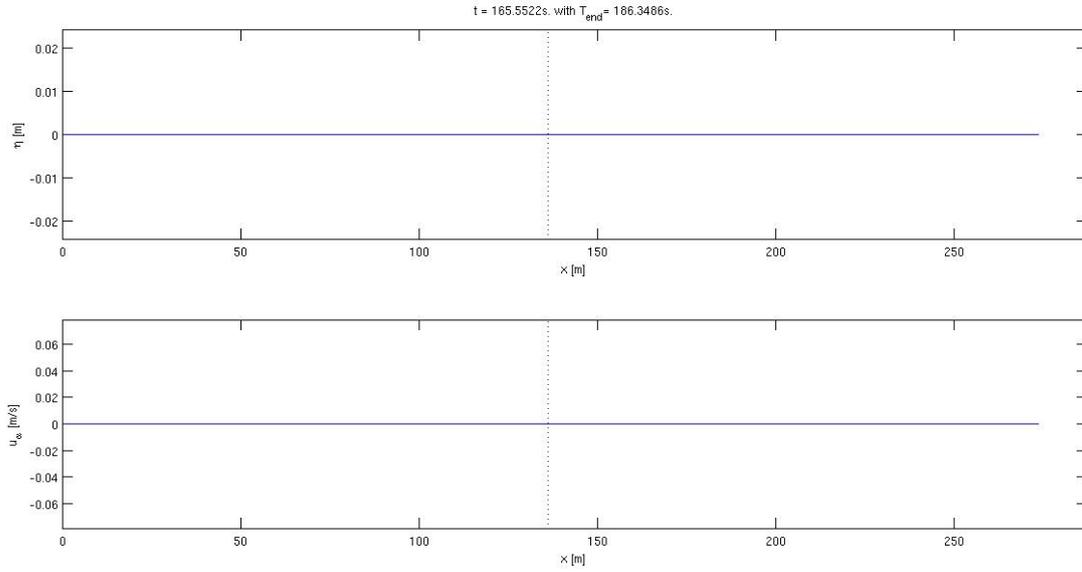


Figura 6.8: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una capa PML con perfil constante, para el instante de tiempo $t = t_N$.

	$E = 2,51\lambda$	$E = 2,01\lambda$	$E = 1,51\lambda$	$E = 1,01\lambda$	$E = 0,51\lambda$
$\sigma_0 = 10$	0,00319420	0,00698422	0,02933703	0,01492406	0,01618640
$\sigma_0 = 1$	0,00236476	0,00485694	0,02170138	0,01128593	0,01056845
$\sigma_0 = 0,1$	0,00037191	0,00098715	0,00258184	0,00214278	0,00239639
$\sigma_0 = 0,05$	0,00020241	0,00087615	0,00177094	0,00185906	0,0020432
$\sigma_0 = 0,02$	0,00007066	0,00066898	0,00147501	0,0013466	0,01832648
$\sigma_0 = 0,015$	0,0000701	0,00058597	0,00128490	0,00137556	0,05860771
$\sigma_0 = 0,01$	0,00008399	0,0004683	0,0011373	0,01465933	0,18928696
$\sigma_0 = 0,005$	0,00349899	0,01270301	0,04631180	0,16915051	0,61545460

Tabla 6.3: Errores relativos para simulaciones con una capa PML con perfil constante.

A partir de los datos obtenidos en la Tabla 6.3, se puede representar gráficamente el comportamiento del error relativo dependiendo del valor de la constante σ_0 para cada espesor E . En la Figura 6.9 puede apreciarse que, a medida que el parámetro σ_0 va aumentando, el error relativo decrece, alcanzándose un valor mínimo a partir del cual, el error crece de forma monótona. De nuevo éste es el comportamiento que cabría esperar de una capa PML en el caso de modelos lineales. Además, los valores mínimos del error son comparables con aquellos obtenidos para el perfil variable.

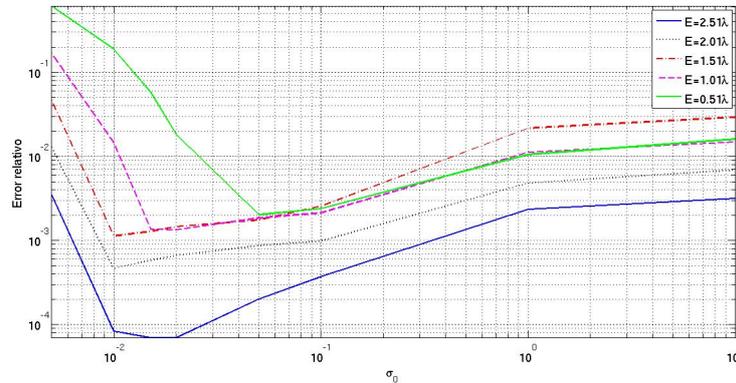


Figura 6.9: Error relativo de una PML con perfil constante, para diferentes espesores, representado en función del valor σ_0 .

6.2. Condición de truncadura tipo Neumann

Además de las capas absorbentes, para obtener una idea más clara de la eficiencia de este tipo de técnicas, se ha implementado también una condición de truncadura que no incorpora ningún tipo de mecanismo de absorción. Este tipo de condiciones se pueden encontrar a lo largo de la bibliografía en distintos trabajos, por ejemplo, en [15]. Consisten en imponer una condición de contorno de tipo Neumann homogénea sobre las incógnitas del modelo en la frontera derecha del dominio, en lugar de una condición de pared reflejante.

Usando esta condición, las Figuras 6.10 y 6.11 muestran la velocidad horizontal y la elevación de la superficie libre en dos instantes de tiempo, donde el soporte de la solución aproximada está próxima al extremo izquierdo del intervalo físico y justo después de reflejarse en la frontera derecha artificial. En estas gráficas se observa que, al llegar a la frontera derecha del dominio físico, la onda se refleja en su mayor parte. De nuevo, al igual que pasaba con las capas PML de perfil constante, la reflexión producida por las condiciones tipo Neumann produce ciertas inestabilidades, que se suaviza gracias al filtrado que se realiza a lo largo de toda la simulación. Esta reflexión tiene como consecuencia que el error relativo es de alrededor del 10 %, muy superior a los obtenidos al implementar las condiciones absorbentes.

6.3. Capas absorbentes de Wei-Kirby

Finalmente, se ha implementado la esponja numérica propuesta en el trabajo de Wei y Kirby [19]. Es importante observar que, en la práctica, los dos términos de amortiguación propuestos en este trabajo deben añadirse a las ecuaciones tanto de u_α como de η . Con esta nueva capa absorbente se han realizado varias simulaciones, con los valores fijos de $\nu = \omega = 2\pi/T$, donde T es el periodo del solitón, $\alpha_2 = 0$ en la ecuación de η y $\alpha_2 = 0,01$ en la de u_α . Se han realizado, tanto para $d = 2$ como $d = 3$, distintas experiencias numéricas, variando el espesor de la capa E y el valor del parámetro α_1 . En

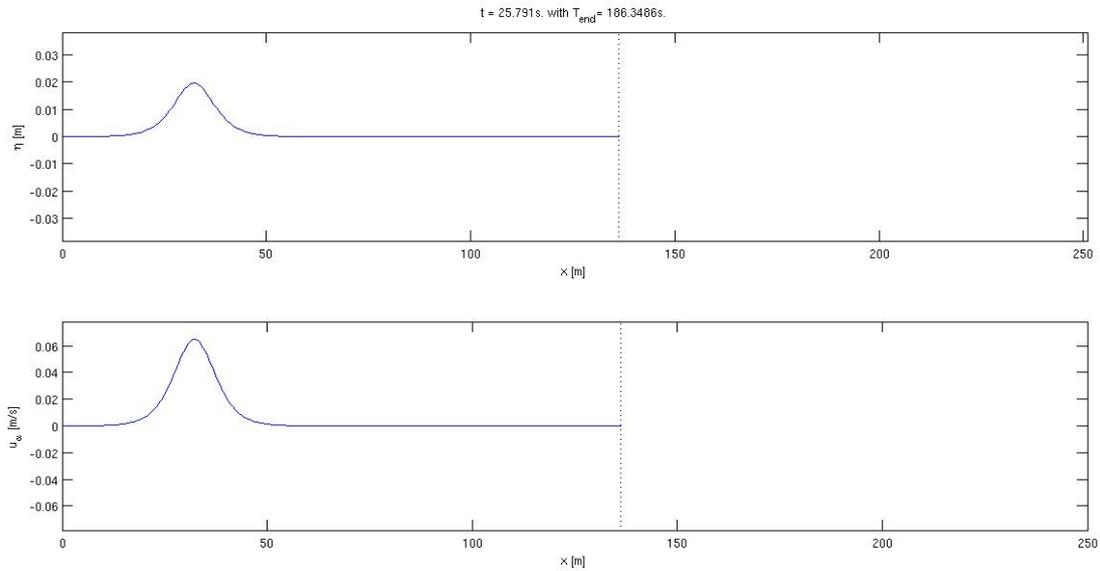


Figura 6.10: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una condición de truncadura tipo Neumann, para un instante de tiempo en el que el soporte del solitón está contenido en el dominio físico.

todos los casos se ha utilizado una condición de pared reflejante en la frontera derecha.

En las Figuras 6.12, 6.13 y 6.14 pueden observarse las representaciones gráficas de la velocidad horizontal y la elevación de la superficie libre de la solución aproximada en tres instantes de tiempo diferentes, para ilustrar como se ésta comporta al propagarse por el dominio físico, al penetrar en la capa absorbente y cuando el eventual soporte del solitón reflejado entraría de nuevo en el dominio físico. Más precisamente, se han utilizado como parámetros $d = 2$, $E = 2,51\lambda$ y $\alpha_1 = 0,5$, siendo λ la longitud de onda típica del solitón. En ellas se puede observar que, cuando el solitón penetra en la capa PML, disminuye su amplitud hasta hacerse prácticamente nula, provocando una mínima reflexión.

En las Tablas 6.4 y 6.5 se presentan los errores relativos para los diferentes valores de α_1 y del espesor E . En concreto, la Tabla 6.4 muestra los resultados para $d = 2$ y la Tabla 6.5 para $d = 3$. En ambas, los valores de α_1 mayores que 10 dan lugar a inestabilidades en el esquema de discretización. De nuevo, se debe remarcar que el valor del instante de tiempo t_N usado para calcular el error relativo depende del valor del espesor E considerado.

Una vez más, a partir de los datos obtenidos en las tablas anteriores, podemos representar gráficamente el comportamiento del error relativo dependiendo del valor de la constante α_1 para cada espesor E . En las Figuras 6.15 y 6.16, para $d = 2$ y $d = 3$, respectivamente, puede apreciarse que el error decrece a medida que aumenta el parámetro α_1 , hasta alcanzar un valor mínimo, alrededor de $\alpha_1 = 1$.

Al comparar los resultados obtenidos entre las capas PML y aquellos proporcionados

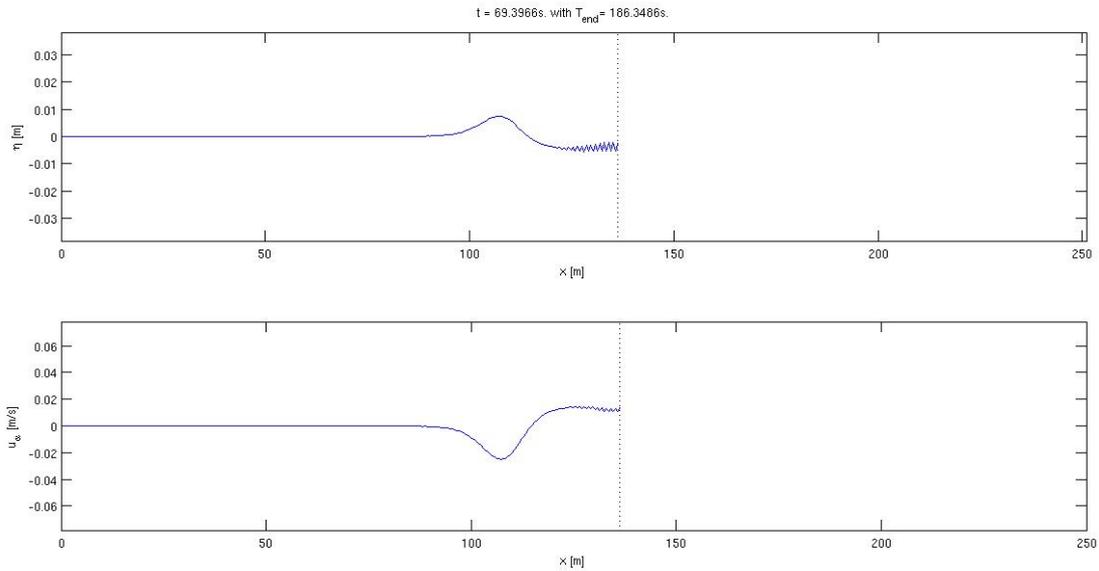


Figura 6.11: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una condición de truncadura tipo Neumann, para un instante de tiempo en el que el solitón se ha reflejado sobre la frontera artificial derecha del dominio computacional.

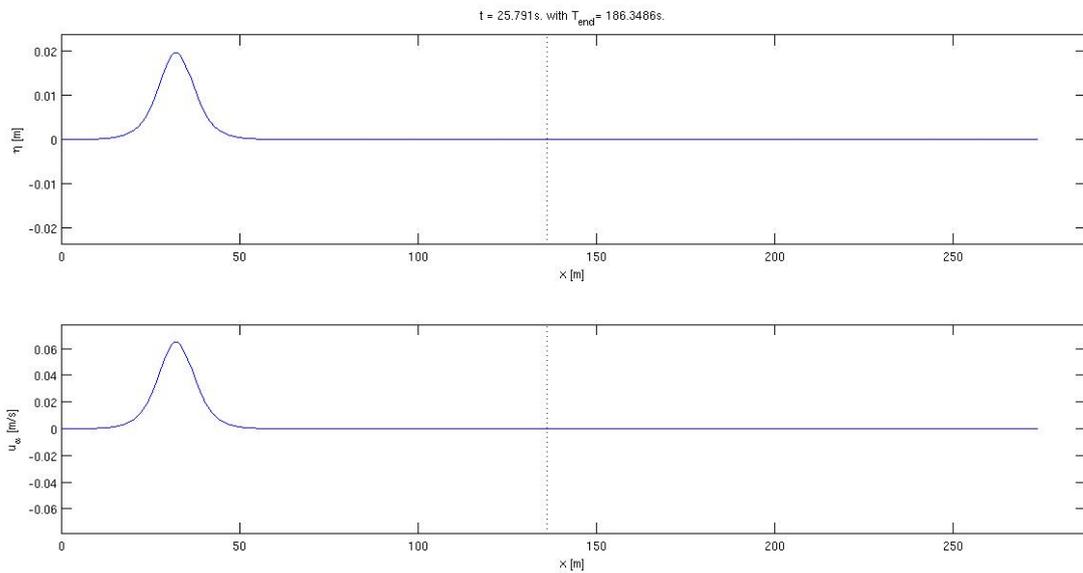


Figura 6.12: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una capa del tipo Wei-Kirby, para un instante de tiempo en el que el soporte del solitón está contenido en el dominio físico.

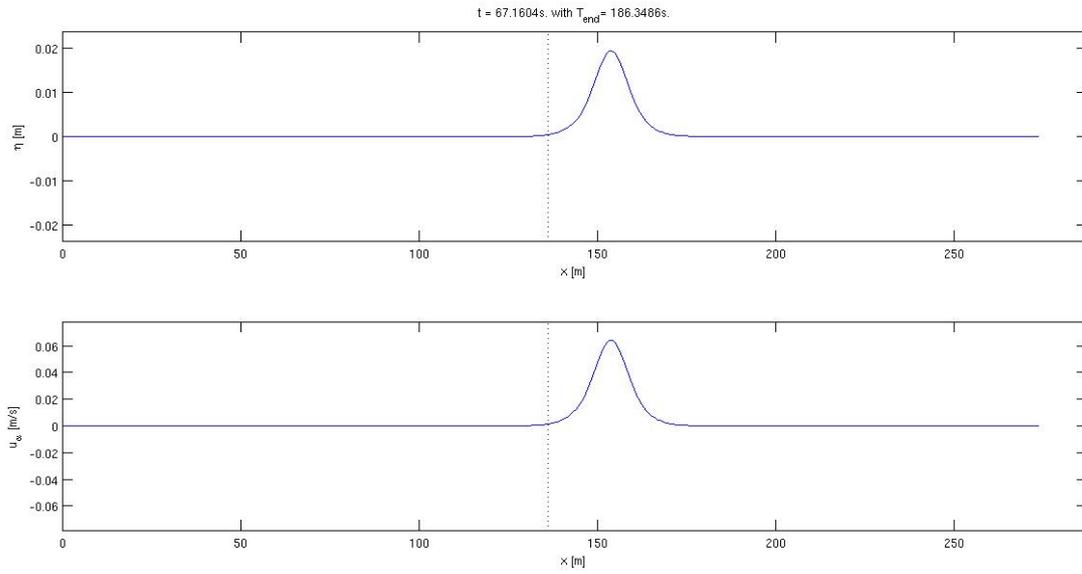


Figura 6.13: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una capa del tipo Wei-Kirby, para un instante de tiempo en el que el solitón ha sobrepasado la interfaz entre el dominio físico y la capa PML.

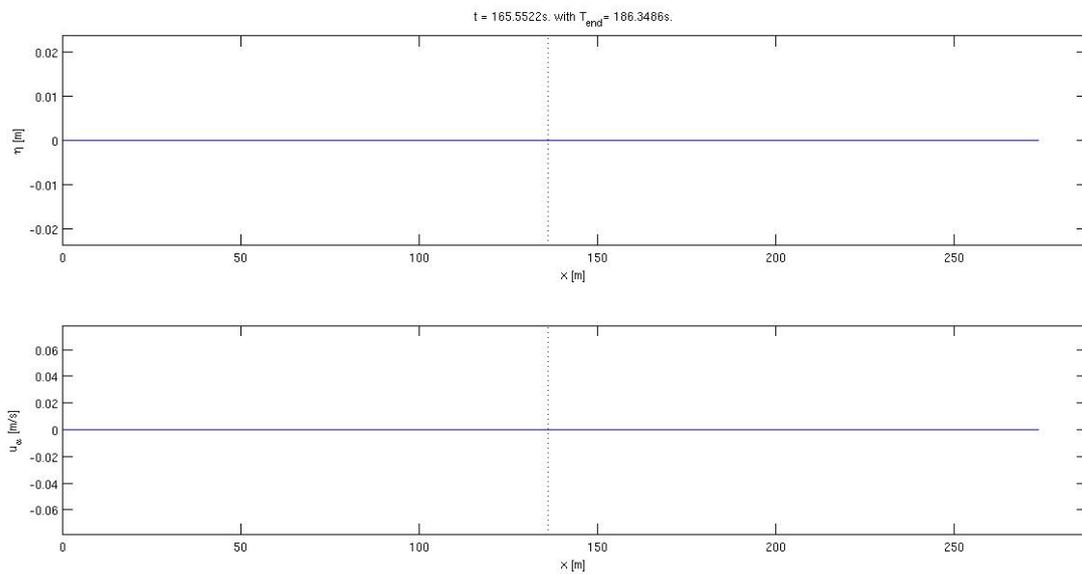


Figura 6.14: Aproximación numérica de la elevación de la superficie libre (arriba) y la velocidad horizontal (abajo) usando una capa del tipo Wei-Kirby, para el instante de tiempo $t = t_N$.

	$E = 2,51\lambda$	$E = 2,01\lambda$	$E = 1,51\lambda$	$E = 1,01\lambda$	$E = 0,51\lambda$
$\alpha_1 = 10^2$	—	—	—	—	—
$\alpha_1 = 10$	0,00024845	0,0002884	0,00070206	0,00094733	0,0019787
$\alpha_1 = 1$	0,00012661	0,00051688	0,0003300	0,0004420	0,01676547
$\alpha_1 = 0,5$	0,0001050	0,00047607	0,00036371	0,00819348	0,18449748
$\alpha_1 = 0,1$	0,09680671	0,18426591	0,35073627	0,66514093	1,24371509
$\alpha_1 = 0,05$	0,43380287	0,60276441	0,83455571	1,15305701	1,57834298
$\alpha_1 = 0,02$	1,07849934	1,23370514	1,40846682	1,60434391	1,81768617
$\alpha_1 = 0,01$	1,46520675	1,56940642	1,67796862	1,79074835	1,90504755

Tabla 6.4: Errores relativos obtenidos con una esponja numérica del tipo Wei-Kirby con $d = 2$.

	$E = 2,51\lambda$	$E = 2,01\lambda$	$E = 1,51\lambda$	$E = 1,01\lambda$	$E = 0,51\lambda$
$\alpha_1 = 10^2$	—	—	—	—	—
$\alpha_1 = 10$	0,00019914	0,00052178	0,00055113	0,0007834	0,0016086
$\alpha_1 = 1$	0,0001225	0,00053108	0,0003174	0,00088492	0,08201845
$\alpha_1 = 0,5$	0,00027321	0,0004588	0,00414976	0,04204386	0,40651570
$\alpha_1 = 0,1$	0,22158829	0,35766283	0,57597926	0,92165083	1,45664148
$\alpha_1 = 0,05$	0,65868637	0,84123636	1,07057373	1,35706988	1,70651851
$\alpha_1 = 0,02$	1,27763205	1,41080252	1,55493482	1,71318001	1,87470933
$\alpha_1 = 0,01$	1,59695452	1,67701894	1,76437422	1,84962611	1,93560505

Tabla 6.5: Errores relativos obtenidos con una esponja numérica del tipo Wei-Kirby con $d = 3$.

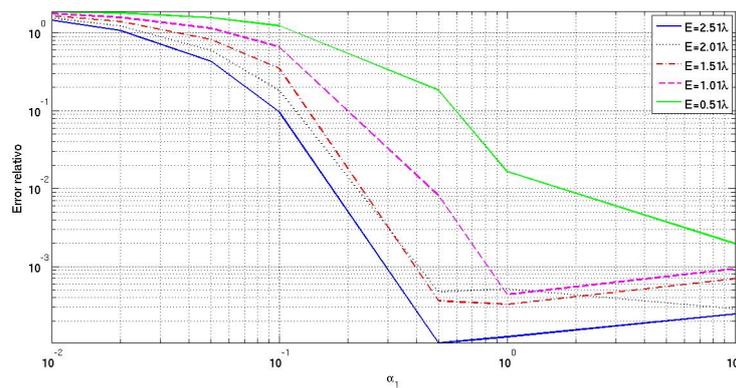


Figura 6.15: Errores relativos obtenidos con una esponja numérica del tipo Wei-Kirby con $d = 2$, para diferentes espesores, y representados frente al parámetro α_1 .

por la esponja numérica del tipo Wei-Kirby, se concluye que el orden de magnitud de

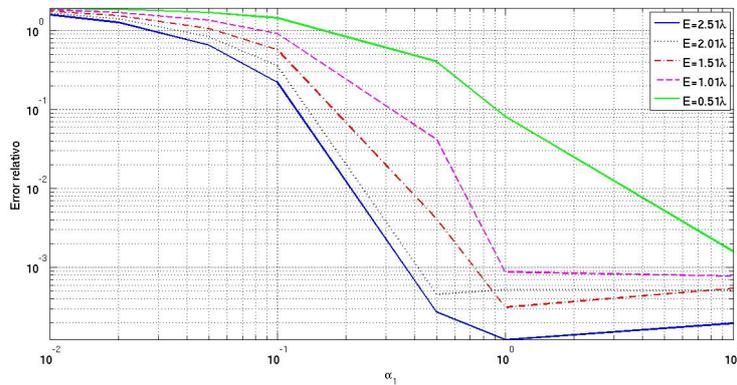


Figura 6.16: Errores relativos obtenidos con una esponja numérica del tipo Wei-Kirby con $d = 3$, para diferentes espesores, y representados frente al parámetro α_1 .

los errores relativos es similar. Este hecho es el esperado, ya que las capas PML para los modelos lineales son un caso particular de la esponja de Wei-Kirby tomando $\omega_2 = 0$ y $\omega_1 = \sigma$. Notar que, a pesar de ser un caso particular de una esponja de tipo Wei-Kirby, las capas PML están implementadas de forma simplificada.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se ha revisado de forma detallada la deducción de las ecuaciones no lineales de Boussinesq linealmente dispersivas en dimensión uno, siguiendo la derivación propuesta en [18]. Bajo ciertas hipótesis se deducen dos modelos más simplificados con los que trabajar: la ecuación KdV y la ecuación RLW, que conservan las mismas dificultades teóricas y numéricas (ecuaciones no lineales de orden tres).

Usando estos dos modelos más simples se ha analizado y derivado la discretización espacio-temporal basada en un método de elementos finitos de tipo Petrov-Galerkin y un método de discretización en tiempo que usa un esquema predictor-corrector. Para ello se ha estudiado en profundidad el trabajo de Woo y Liu [21], donde se propone dicha discretización para el modelo de Boussinesq extendido.

Una vez hecha la descripción del método de discretización, puesto que el dominio original donde se plantean todos estos problemas es no acotado, se han propuesto varias condiciones absorbentes para reducir la reflexión producida al truncar el dominio computacional. De hecho, se han revisado las capas absorbentes ya existentes en la bibliografía (por ejemplo, la propuesta por Wei y Kirby en [19]) y se ha estudiado la relación que existe entre estas capas absorbentes o esponjas numéricas y la técnica de capas perfectamente acopladas (PML), encontrándose que bajo ciertas hipótesis, y suponiendo un comportamiento lineal del problema unidimensional, una capa PML podría considerarse un caso particular de la esponja numérica del tipo Wei-Kirby. Para poder estudiar numéricamente esta relación, se han implementado tanto la esponja propuesta por Wei y Kirby como una condición de truncadura de tipo Neumann que no incorpora ningún tipo de mecanismo de absorción (véase [15]).

Por último, a partir de una implementación muy simplificada del modelo de capas PML, se han presentado los resultados numéricos obtenidos con la esponja numérica del tipo Wei-Kirby y aquellos que resultan al trabajar con esa implementación simplificada de las capas PML. A pesar de dicha simplificación “heurística”, los resultados del modelo de Wei-Kirby y de las capas PML son muy similares cuando la solución aproximada está basada en la propagación de un solitón de soporte compacto a una velocidad finita. Debido a estos buenos resultados numéricos obtenidos en el caso unidimensional, se podría pensar que la técnica PML, ya discretizada de forma precisa y consistente con la discretización usada en el dominio físico, puede ser una alternativa válida para problemas no lineales en dos y tres dimensiones.

Bibliografía

- [1] Daniel Appelö and Thomas Hagstrom. A general perfectly matched layer model for hyperbolic-parabolic systems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31:3301–3323, August 2009.
- [2] H. Barucq, J. Diaz, and M. Tlemcani. New absorbing layers conditions for short water waves. *Journal of Computational Physics*, 229(1):58–72, 2010.
- [3] J. P. Berenger. A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *Journal of Computational Physics*, 114(1):185–200, 1994.
- [4] J. P. Berenger. Perfectly Matched Layer for the FDTD Solution of Wave-Structure Interaction Problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 44(1):110–117, 1996.
- [5] J. P. Berenger. Three-dimensional Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves. *Journal of Computational Physics*, 127(2):363–379, 1996.
- [6] A. Bermúdez, L. Hervella-Nieto, A. Prieto, and R. Rodríguez. An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems. *J. Comput. Phys.*, 223:469–488, 2007.
- [7] I. Dağ and M. N. Özer. Approximation of the rlw equation by the least square cubic b-spline finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, 25:221–231, 2001.
- [8] Fang Q. Hu, X. D. Li, and D. K. Lin. Absorbing boundary conditions for nonlinear euler and navier-stokes equations based on the perfectly matched layer technique. *Journal of Computational Physics*, 227:4398–4424, April 2008.
- [9] C. E. Kenig. Recent progress in the well-posedness of the Benjamin-Ono equation. *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 46(2):105–112, 2005.
- [10] A. Modave, É. Deleersnijder, and É.J.M. Delhez. On the parameters of absorbing layers for shallow water models. *Ocean Dynamics*, 60(1):65–79, 2010.
- [11] O. Nwogu. Alternative form of Boussinesq equations for nearshore wave propagation. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 119:618–638, 1993.

-
- [12] O. Nwogu. Alternative form of boussinesq equations for nearshore wave-propagation. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 119(6):618–638, 1993.
- [13] D. H. Peregrine. Equations for water waves and the approximations behind them. In R Meyer, editor, *Waves on Beaches and Resulting Sediment Transport*, pages 95–122. Academic Press, New York, 1972.
- [14] J. M. Sanz-Serna and I. Christie. Petrov-galerkin methods for nonlinear dispersive waves. *Journal of Computational Physics*, 39:94–102, 1981.
- [15] J. B. Shiach and C. G. Mingham. A temporally second-order accurate godunov-type scheme for solving the extended boussinesq equations. *Coastal Engineering*, 56:32–45, 2009.
- [16] F. Ursell. The long-wave paradox in the theory of gravity waves. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 49(4):685–694, 1953.
- [17] M. Walkley and M. Berzins. A finite element method for the one-dimensional extended Boussinesq equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 29(2):143–157, 1999.
- [18] M. A. Walkley. *A Numerical Method for Extended Boussinesq Shallow-Water Wave Equations*. PhD thesis, School of Computer Studies, University of Leeds, United Kingdom, 1999.
- [19] G. Wei and J.T. Kirby. Time-dependent numerical code for extended Boussinesq equations. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 121(5):251–261, 1995.
- [20] G. Wei, J.T. Kirby, S.T. Grilli, and R. Subramanya. A fully nonlinear Boussinesq model for surface waves. Part 1. Highly nonlinear unsteady waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 294:71–92, 1995.
- [21] S.-B. Woo and P.L.-F. Liu. A petrov-galerkin finite element model for one-dimensional fully non-linear and weakly dispersive wave propagation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37:541–575, 2001.