Caderno Lab. Xeolóxico de Laxe
Coruña. 1995. Vol. 20, pp. 57-65

Programación lineal continua de una cantera de pizarra

Linear programming of a slate quarry

TABOADA CASTRO, J.; GONZÁLEZ TABOADA, J. A.; GARCÍA GARCÍA M. M.; HERRERO VEGAS, M. J.

A new exploitation of roofing slate has several possibilities of marketing depending on the sizes of the pieces that it makes. Three sizes has been chosen among all the possibilities in base of the conditions and the production of the rock in the quarry, the marketing limitation and the final price of the product. We've procces all these data to obtain the optimun output, with the simplex algorithm. The objective function (week invoicing) and the restrictions of the problem are created in canonical and standard form. Optimun solution has been obtained among all the basic and practical ones, using the graphic and the analytic method. Some conclusions come from the algorithm matrix about the outputs for each marketing option.

Key words: Roofing slate, optimization, simplex algorithm, linear programming.

TABOADA CASTRO, J.; GONZÁLEZ TABOADA, J. A. (Universidad de Vigo. Departamento de Ingeniería de los materiales, Mecánica aplicada y Construcción. c/ Lagoas-Marcosende s/n. 36200 Vigo. Pontevedra).

GARCÍA GARCÍA M. M. (Universidad de León. Departamento de Ingeniería Minera. Campus de Vegazana s/n. León).

HERRERO VEGAS, M. J. (E.T.S.I.M. de Madrid. c/ Ríos rosas, 21. 28003 MADRID).

INTRODUCCIÓN

Se trata de una nueva cantera de pizarra de techar, que va a comenzar su actividad, y dispone de todos los medios necesarios para el inicio de la explotación.

El problema que trata de resolver, es el de decidir que tipo de plantillas comerciales de pizarra para cubiertas debe fabricar, a fin de maximizar el beneficio de la actividad minera.

En el mercado existen tres tipos de plantilla que se adaptan al tipo de roca descubierta en la cantera.

Las características de estas plantillas o tamaños son:

- Tipo francés, con unas medidas de 32x22 cm, y un espesor de 3,5 mm.
- Tipo alemán, de 30x30 cm, y un espesor de 5 mm.
- Tipo belga, de 40x20 cm, y un espesor de 4 mm.

El precio de mercado de la pizarra de los tamaños indicados es, en Francia de 40 PTA/unidad, en Alemania de 70 PTA/ unidad y en Bélgica de 54 PTA/unidad.

La explotación se ha diseñado de forma que se preparen y arranquen anualmente 130.000 t de pizarra en banco, que con un rendimiento de aprovechamiento global del 10%, supone una producción anual de pizarra elaborada para cubiertas de 13.000 t.

La densidad de la pizarra es de 2,8 t/m3.

Desde la perspectiva de la producción de rachón o roca todo-uno en cantera, existen ciertas restricciones al tipo de aprovechamiento en la elaboración de la piedra según tamaños, según TOYOS et al (1994). Los datos geotécnicos obtenidos en el estudio de implantación de la cantera y del bloque-tipo de rachón a obtener, indican que solo un 50% del rachón es apto para la elaboración de la plantilla alemana, debido a que una tupida red de kink-bands que afecta al macizo en la dirección de la Ll (hebra en el argot minero, o intersección del plano de esquistosidad Sl y del plano de estratificación S0), impide el serrado de parte del rachón a la hebra cada 30 cm., por ser una anchura excesiva.

El serrado para fabricar el modelo francés (cada 22 cm) es posible en el 80% de los bloques de rachón, y el 100% de los mismos es apto para fabricar el modelo belga (anchura de 20 cm.), ya que los bloques en los que los kink-bands no dejan huecos libres de esa anchura, son desechados, al no permitir aprovechamiento alguno, según ESCRIBANO et al (1984).

Por el lado de la demanda también existen ciertas restricciones. Los estudios de mercado realizados indican que el mercado francés, no puede absorber más de 125 t/semana de pizarra elaborada del tamaño indicado. En el caso de la plantilla belga, hay perspectivas de poder vender hasta 200 t/semana, y no hay restricciones en el mercado alemán, que podría absorber cualquier producción.

EXPRESIÓN DEL PROBLEMA EN FORMA CANÓNICA

Una vez planteado el problema, elegiremos las siguientes variables de decisión:

- X_1: número de placas del tipo francés producidas en una semana.
- X_2: número de piezas del tamaño alemán producidas por semana.
- X_3: placas producidas con destino a Bélgica por semana.

Solucionaremos el problema cuando sepamos cuantas piezas debemos producir de cada plantilla para obtener el mejor resultado económico.

Como los costos los podemos considerar constantes e independientes de las plantillas fabricadas, ya que la cantera ha sido diseñada para la preparación de 2.500 t de pizarra en capa por semana, que supone una producción vendible (10% de rendimiento) de 250 t/semana, y en la nave de elaboración el proceso es similar para todas las plantillas, los beneficios son proporcionales a la facturación para cualquier plantilla fabricada, según TABOADA et al (1988).

Nuestra función objetivo es la facturación, que debemos maximizar para obtener el máximo rendimiento económico.

Teniendo en cuenta los precios de mercado, la función objetivo es:

$$Z = 40\ X_1 + 70\ X_2 + 54\ X_3$$

Hay que considerar, que aunque la pizarra alemana se coloca con clavos, en vez de ganchos, lo que supone la necesidad de perforar cuatro agujeros/placa, ésto no supone un sobrecosto en este modelo, pues para el proceso de corte se han adquirido troqueles accionados por empuje hidráulico, que indistintamente cortan y perforan o simplemente cortan las diferentes plantillas, sin coste de personal adicional.

La primera restricción que se nos presenta es la producción semanal de pizarra elaborada, que no puede superar las 250 t/semana, por condicionamientos de cantera.

Teniendo en cuenta la densidad de la pizarra de 2,8 t/m3, y poniendo en dm3 el volumen total máximo de pizarra, y los volúmenes de cada placa de las diferentes plantillas, obtenemos:

$$\text{I)}\ 0{,}25\ X_1 + 0{,}45\ X_2 + 0{,}32\ X_3 \leq 89.286$$

Por el lado de la limitación de rachón para cada tamaño, así como por las características de cada mercado, obtenemos otras restricciones sobre la producción final de cada tamaño.

En el caso de la plantilla francesa, sólo el 80% de la roca de cantera disponible es apta para su fabricación. Ésto, a rendimientos de elaboración que suponemos constantes, supone que de las 2.500 t/semana de pizarra en capa que descubrimos, y que dará una producción de 250 t/semana de pizarra elaborada, solo un 80% es susceptible de usarse en la fabricación de plantilla para Francia.

En términos numéricos, la producción máxima para Francia es de 200 t/semana de pizarra elaborada.

En términos de mercado, el límite de producción para Francia es de 125 t/semana, restricción más exigente que la anterior, y que es la que definitivamente adoptamos, pasando los pesos máximos posibles a volúmenes en dm^3.

$$\text{II)}\ 0{,}25\ X_1 \leq 44.643$$

Siguiendo el mismo razonamiento para la plantilla alemana, o sea, producción inferior a 125 t/semana de pizarra elaborada por limitaciones del rachón de la cantera, y sin restricciones comerciales, obtenemos:

$$\text{III)}\ 0{,}45\ X_2 \leq 44.643$$

y para el caso del tamaño belga, sin restricción en cuanto a la roca de cantera, y con una cuota de mercado máxima de 200 t/semana, sale:

$$\text{IV)}\ 0{,}32\ X3 \leq 71.429$$

Obviamente, el número de placas de cada tamaño no puede ser negativo.

La expresión del problema en forma canónica según PARDO (1987) queda, pues:

Maximizar: $Z = 40\ X_1 + 70\ X_2 + 54\ X_3$
Sujeto a:

I) $0{,}25\ X_1 + 0{,}45\ X_2 + 0{,}32\ X_3 \leq 89.286$

II) $0{,}25\ X_1 \leq 44.643$

III) $0{,}45\ X_2 \leq 44.643$

IV) $0{,}32\ X_3 \leq 71.429$

$X_1 \geq 0$
$X_2 \geq 0$
$X_3 \geq 0$

PASE A LA FORMA ESTANDAR

La expresión del problema en su forma estandar, introduciendo las variables de holgura h_1, h_2, h_3 y h_4 es la siguiente:

Maximizar: $Z = 40\ X_1 + 70\ X_2 + 54\ X_3$
Sujeto a:

I) $0{,}25\ X_1 + 0{,}45\ X_2 + 0{,}32\ X_3 + h_1 = 89.286$

II) $X_1 + h_2 = 178.572$

III) $X_2 + h_3 = 99.207$

IV) $X_3 + h_4 = 223.216$

$X_1 \geq 0$
$X_2 \geq 0$
$X_3 \geq 0$
$h_1 \geq 0$
$h_2 \geq 0$
$h_3 \geq 0$
$h_4 \geq 0$

APLICACIÓN DEL ALGORITMO DEL SIMPLEX

Siguiendo el proceso del algoritmo del simplex según BEALE (1955), obtenemos las siguientes tablas, en las que se señalan los correspondientes elementos pivote:

La solución básica factible óptima es:

$X_1 = 70.863$
$X_2 = 0$
$X_3 = 223.438$
$h_1 = 0$
$h_2 = 107.709$
$h_3 = 99.207$
$h_4 = 0$
$Z = 14.936.992$

Existe un pequeño error en las cifras finales, que depuraremos, debido a que las operaciones aritméticas se han realizado despreciando los decimales.

TABLA 1

		X_1	X_2	X_3	h_1	h_2	h_3	h_4
h_1	89.286	0,25	0,45	0,32	1	0	0	0
h_2	178.572	1	0	0	0	1	0	0
h_3	99.207	0	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0
h_4	223.216	0	0	1	0	0	0	1
	0	-40	-70	-54	0	0	0	0

TABLA 2

		X_1	X_2	X_3	h_1	h_2	h_3	h_4
h_1	44.643	0,25	0	$\boxed{0,32}$	1	0	-0,45	0
h_2	178.572	1	0	0	0	1	0	0
X_2	99.207	0	1	0	0	0	1	0
h_4	223.216	0	0	1	0	0	0	1
	6.944.490	-40	0	-54	0	0	70	0

TABLA 3

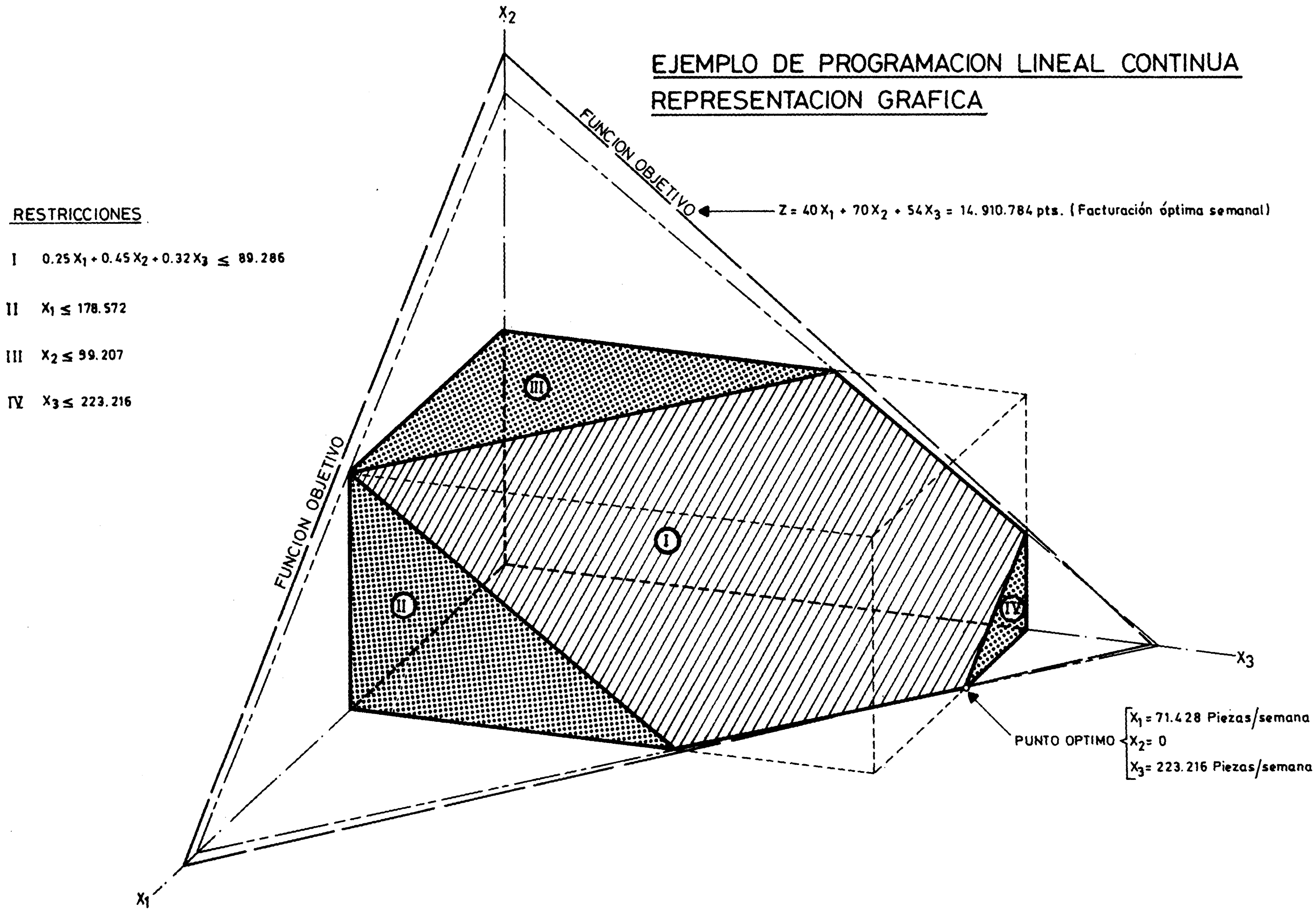
		X_1	X_2	X_3	h_1	h_2	h_3	h_4
X_3	139.509	0,78	0	1	3,13	0	-1,41	0
h_2	178.572	1	0	0	0	1	0	0
X_2	99.207	0	1	0	0	0	1	0
h_4	26.786	-0,25	0	0	-1	0	$\boxed{0,45}$	0,32
	14.477.976	2,12	0	0	169	0	-6,14	0

TABLA 4

		X_1	X_2	X_3	h_1	h_2	h_3	h_4
X_3	223.438	0	0	1	0	0	0	1
h_2	178.572	1	0	0	0	1	0	0
X_2	39.683	$\boxed{0,56}$	1	0	2,22	0	0	-0,71
h_3	59.524	-0,56	0	0	-2,22	0	1	0,71
	14.843.453	-1,32	0	0	155	0	0	4,36

TABLA 5

		X_1	X_2	X_3	h_1	h_2	h_3	h_4
X_3	223.438	0	0	1	0	0	0	1
h_2	107.709	0	-1,79	0	-3,96	1	0	1,27
X_1	70.863	1	1,79	0	3,96	0	0	-1,27
h_3	99.207	0	1	0	0	0	1	0
	14.936.992	0	2,36	0	160	0	0	6,04


EJEMPLO DE PROGRAMACION LINEAL CONTINUA
REPRESENTACION GRAFICA
RESTRICCIONES
I $0.25 X_1 + 0.45 X_2 + 0.32 X_3 \leq 89.286$
II $X_1 \leq 178.572$
III $X_2 \leq 99.207$
IV $X_3 \leq 223.216$
X_1
X_2
X_3
FUNCION OBJETIVO
FUNCION OBJETIVO
$Z = 40 X_1 + 70 X_2 + 54 X_3 = 14.910.784$ pts. (Facturación óptima semanal)
I
II
III
IV
PUNTO OPTIMO
$X_1 = 71.428$ Piezas/semana
$X_2 = 0$
$X_3 = 223.216$ Piezas/semana

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos presentan muy importantes consecuencias.

La primera, es que el resultado de la variable X_3 (número de placas con destino al mercado belga), es el máximo posible con las restricciones impuestas por el mercado, ya que no existía límite de producción por razones del tamaño y forma del rachón.

Así pues, el destino más rentable de la producción minera es el mercado belga, cuya relación características-precio optimiza la facturación del negocio.

Si eliminásemos las limitaciones de mercado, se podría centrar toda la producción en este mercado, por lo que las futuras actuaciones de marketing de la Empresa deben ir dirigidas a potenciar este mercado.

El complemento al mercado belga, hasta el límite de producción impuesto por razones de explotación de cantera, se completa con plantilla francesa, desechando la producción para Alemania.

Sin embargo, si observamos las tablas 4 y 5 del algoritmo del Simplex, deduciremos que entre la producción de plantilla francesa como complemento a la belga (X_3 = 223.438 piezas; X_1 = 70.863 piezas; Tabla 5) y la producción de plantilla alemana como complemento de la belga (X_3 = 223.438 piezas; X_2 = 39.683 piezas; Tabla 4) hay una diferencia de facturación de apenas 100.000 PTA/semana (14.936.992 PTA en la Tabla 5, y 14.843.453 PTA en la Tabla 4), por lo que una vez establecida la plantilla belga como la más rentable, el complemento con la francesa o la alemana es poco importante en materia de rentabilidad económica, si bien el complemento de la francesa optimiza la facturación.

La observación de la tabla 3 nos indica que la máxima producción posible de plantilla alemana (X_2 = 99.207 piezas) por restricciones de yacimiento, complementada con plantilla belga (X_3 = 139.509 piezas), supone una facturación inferior en casi 500.000 PTA/semana a la máxima posible (14.936.992 PTA en la tabla 5 por 14.477.976 en la tabla 3), por lo que no es interesante, debido al deterioro económico obtenido.

Este sencillo ejemplo permite racionalizar la producción minera, seleccionando los mercados más interesantes.

RESOLUCIÓN GRÁFICA DEL PROBLEMA

En el diagrama tridimensional adjunto se ha representado el poliedro conjunto de soluciones factibles conforme a las cuatro restricciones enunciadas, y el punto que optimiza la función objetivo, representada por infinitos planos paralelos (se ha representado el que pasa por el punto óptimo).

Los valores resultado se han depurado del pequeño error de cálculo acumulado en el proceso aritmético, por haber despreciado los decimales, sin que tenga incidencia alguna en la resolución del problema.

BIBLIOGRAFÍA

BEALE, E. M. L., (1955). «Cycling in the Dual Simplex Algorithm», *Nav. Res. Logistics. Quart.* 2, pp. 269-276.

ESCRIBANO, J. L.; FERNÁNDEZ, J. J.; GÓMEZ, G. y HACAR, M., (1984). «Situación actual y evolución de la minería de las pizarras para cubiertas». *VII Congreso Internacional de Minería y Metalurgia,* 2, pp. 93-112.

PARDO, L., (1987). «Programación lineal continua. Aplicaciones prácticas en la Empresa», *Ediciones Diaz de Santos, S.A.,* 318 pp.

TABOADA, J.; BLANCO, M. y MARTÍNEZ-ALEGRÍA, R. (1988). «Diseño de una corta de pizarra de techar», *VIII Congreso Internacional de Minería y Metalurgia,* 6, pp. 494-514.

TOYOS, J. M.; TABOADA, J.; LOMBARDERO, M.; ROMERO, J. A. y MENÉNDEZ, A. (1994). Estudio de las discontinuidades en yacimientos de roca ornamental», *Boletín Geológico y Minero,* 105-1, pp. 110-118.

Recibido: 8/3/95
Aceptado: 27/6/95