

UN PLANTEAMIENTO GENERALIZADO PARA EL PROBLEMA DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN. FORMULACIÓN NUMÉRICA Y APLICACIONES

H. Gómez^{1*}, I. Colominas¹, F. Navarrina¹ y M. Casteleiro¹

1: Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación
E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña

Campus de Elviña, s/n, 15192, A Coruña

e-mail: hgomez,icolominas,fnavarrina,casteleiro@udc.es, web: <http://caminos.udc.es/gmni/>

Palabras clave: Convección-difusión, Ecuación de Cattaneo, Taylor-Galerkin

Resumen. *Obtener una solución numérica precisa y estable de la ecuación de convección-difusión requiere un gran coste computacional en situaciones de convección dominante. Además, la formulación clásica del problema no es totalmente satisfactoria ya que predice velocidades difusivas no acotadas. Este resultado es consecuencia de utilizar la ley de Fick como ecuación constitutiva y está relacionado con la aparición de oscilaciones espurias en la solución numérica de la ecuación de convección-difusión. Para eliminar el problema del transporte a velocidad no acotada en situaciones de difusión pura se ha empleado en diversas aplicaciones prácticas la ecuación de Cattaneo en lugar de la ecuación de Fick. En este artículo se propone un modelo de convección-difusión utilizando la ecuación de Cattaneo como ecuación constitutiva. Este procedimiento conduce a un sistema no-homogéneo de ecuaciones en derivadas parciales. Dicho sistema de ecuaciones es totalmente hiperbólico y se puede escribir en forma conservativa. Para resolverlo se ha empleado una formulación de Taylor-Galerkin de segundo orden. Por último, para mostrar el buen comportamiento y las propiedades de estabilidad de las ecuaciones propuestas se han resuelto varios problemas en dominios unidimensionales y bidimensionales.*

1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas de transporte es muy común en ciencias aplicadas. En particular, los problemas de transporte que involucran procesos de convección y difusión tienen numerosas aplicaciones en ingeniería. Este tipo de fenómenos puede ser modelado mediante la ecuación de convección-difusión. Desafortunadamente, la obtención de soluciones numéricas precisas y estables para esta ecuación en situaciones de convección dominante requiere la utilización de mallas muy finas. Por este motivo, se ha llevado a cabo una intensa actividad investigadora con el fin de desarrollar nuevos métodos numéricos para la resolución de este tipo de problemas. Desde 1950 se han propuesto muchos

procedimientos interesantes pero los resultados que proporcionan siguen siendo a día de hoy un compromiso entre precisión y estabilidad. Una exposición detallada de la mayoría de los esquemas que se han propuesto en el ámbito del método de elementos finitos se puede encontrar en [1].

En este artículo comenzaremos revisando la formulación del problema de convección-difusión. Para ello nos centraremos en el problema de la propagación de un contaminante en un medio fluido. Mediante un ejemplo veremos que la formulación clásica del problema (en términos de la ecuación de Fick [2]) conduce a propagaciones de masa a velocidades no acotadas. Este hecho está relacionado con la inestabilidad de las soluciones numéricas a que conducen los esquemas centrados [3, 4, 5]. En este artículo se propone utilizar una ecuación constitutiva más general que la ecuación de Fick para evitar las propagaciones de masa a velocidades no acotadas. La ecuación constitutiva que se propone usar está basada en la ecuación de Cattaneo que fue propuesta simultáneamente en [6] y [7]. Esta ecuación fue formulada para problemas térmicos de difusión pura y ha sido utilizada para problemas de ingeniería en este contexto [8]. En este artículo se utiliza una ecuación generalizada que incluye un término convectivo de modo que puede ser utilizada para la formulación del problema de convección-difusión. Esta formulación conduce a un sistema de ecuaciones hiperbólico en el cual se puede definir una velocidad finita de propagación de masa. Se realiza un estudio de las propiedades de este modelo y se resuelven varios problemas prácticos.

2. FORMULACIÓN CLÁSICA DEL PROBLEMA DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN

2.1. Planteamiento del problema

Asumiendo que el medio fluido es incompresible y que no hay términos fuente, las ecuaciones que gobiernan el problema son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(u) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{q}) = 0 \quad (1.1)$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \nabla_{\mathbf{x}}(u) \quad (1.2)$$

donde (1.1) es la ecuación de conservación de masa de contaminante y (1.2) es la ecuación de Fick (ecuación constitutiva). En las ecuaciones anteriores u es la concentración de contaminante, \mathbf{a} es el vector de velocidades (se supone que satisface las ecuaciones hidrodinámicas de un fluido incompresible), \mathbf{q} es el flujo difusivo de contaminante por unidad de densidad de fluido y \mathbf{K} es el tensor de difusividad. El sistema de ecuaciones (1) está totalmente desacoplado ya que se puede introducir (1.2) en (1.1) y resolver la ecuación escalar

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(u) - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{K} \nabla_{\mathbf{x}}(u)) = 0 \quad (2)$$

La ecuación (2) es parabólica, por lo que se debe imponer una condición en cada punto del contorno.

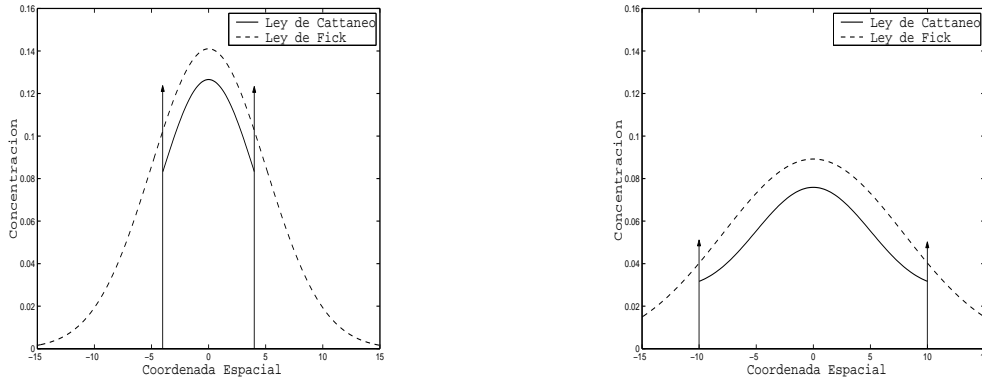


Figura 1: Comparación para $t = 4$ (izquierda) y para $t = 10$ (derecha) entre la solución de (3) (línea discontinua) y la solución de (6) (línea continua). Los parámetros k y τ tienen un valor unitario.

2.2. Un problema de difusión pura para analizar las propagaciones de masa a velocidad no acotada

En lo que sigue se demostrará que la formulación (2) conduce a propagaciones de masa a velocidad no acotada. Para ello consideramos un medio (incompresible) homogéneo, isótropo (por tanto, si \mathbf{I} es el tensor identidad, $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$ para un cierto $k > 0$), unidimensional e infinitamente largo. En este dominio resolveremos el problema del vertido puntual en situación de difusión pura. Por tanto, el problema a resolver es: hallar $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (3.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 \quad t > 0. \quad (3.3)$$

donde δ es la distribución de Dirac. Este problema se puede resolver analíticamente mediante una transformación de Fourier. La solución de (3) es

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (4)$$

que es la función de Gauss en cada instante de tiempo t . Por tanto, (ver [5] para una explicación detallada) la velocidad media del contaminante no está acotada. En la figura 1 se muestra (en línea discontinua) la solución de (3) para $k = 1$ en los instantes $t = 4$ y $t = 10$.

3. FORMULACIÓN PROPUESTA PARA EL PROBLEMA DE CONVECCIÓN-DIFUSIÓN

3.1. Planteamiento del problema

Desarrollaremos la formulación propuesta substituyendo la ecuación de Fick (1.2) por la ecuación de Cattaneo. Esta ecuación introduce una función tensorial $\boldsymbol{\tau}$ que transforma cada punto del dominio (\mathbf{x}, t) en el *tensor de relajación* de dicho punto. Las coordenadas del tensor de relajación son tiempos característicos del proceso de difusión. La ecuación de Cattaneo fue formulada para problemas de difusión pura, por lo que ha sido necesario generalizarla para poder utilizarla en problemas con convección (ver [5]). Las ecuaciones que gobiernan el fenómeno de convección-difusión utilizando la ley de Cattaneo son:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{a} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}(u) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{q}) = 0 \quad (5.1)$$

$$\mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{q}) \mathbf{a} \right) = -\mathbf{K} \nabla_{\mathbf{x}}(u) \quad (5.2)$$

donde (5.2) es la *ecuación de Cattaneo con término convectivo*. Resulta evidente que la ecuación propuesta es más general que la ecuación de Fick ya que tomando $\boldsymbol{\tau} = 0$ en (5.2) se recupera la formulación clásica.

3.2. Un problema de difusión pura con velocidad finita

Con el fin de comparar la solución del modelo clásico con la solución del modelo propuesto resolveremos el mismo problema que se ha resuelto en la sección anterior pero ahora empleando el modelo propuesto. En este caso el sistema de ecuaciones (5) puede escribirse como una ecuación diferencial de segundo orden en el tiempo (la demostración puede encontrarse en [5]). Por tanto, es necesario imponer una condición inicial adicional. Considerando un medio (incompresible) homogéneo, isótropo, unidimensional y sin convección el problema se puede plantear como [5]: hallar $u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \quad (6.1)$$

$$u(x, 0) = \delta(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (6.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, t) = 0 \quad t > 0. \quad (6.4)$$

Este problema se puede resolver utilizando de forma consecutiva transformaciones de Laplace y Fourier (ver referencia [5] para una resolución completa). Procediendo de este

modo se obtiene

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{c^2}{2k}t} \left[\delta(|x| - ct) + \frac{c}{2k} I_0 \left(\frac{c}{2k} \sqrt{c^2 t^2 - x^2} \right) + \frac{c^2}{2k} t \frac{I_1 \left(\frac{c}{2k} \sqrt{c^2 t^2 - x^2} \right)}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \right], & |x| \leq ct \\ 0, & |x| > ct \end{cases} \quad (7)$$

donde I_0 y I_1 son las funciones de Bessel modificadas de primera clase de orden 0 y 1. Además, c es la *celeridad de la onda difusiva* definida por:

$$c = \sqrt{k/\tau}. \quad (8)$$

En la figura 1 se comparan las soluciones de (3) y (6) en los instantes $t = 4$ y $t = 10$. En estas figuras se observa que al utilizar el modelo propuesto existe un frente de onda que avanza con celeridad c .

3.3. Estudio del modelo propuesto como un sistema de ecuaciones en forma conservativa

El sistema de ecuaciones (5) no se puede escribir como una ecuación de segundo orden en problemas multidimensionales con un campo de velocidades variable. En este caso se debe resolver un sistema acoplado de ecuaciones de primer orden. Con la hipótesis de que el medio es homogéneo e isótropo, el sistema (5) se puede escribir en forma conservativa. Para ello, hay que tener en cuenta que \mathbf{a} es un vector solenoidal. Si suponemos que el dominio es bidimensional y usamos la notación $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ el sistema (5) se puede escribir del siguiente modo:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F}) = \mathbf{S} \quad (9)$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ \tau q_1 \\ \tau q_2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} ua_1 + q_1 & ua_2 + q_2 \\ \tau q_1 a_1 + ku & \tau q_1 a_2 \\ \tau q_2 a_1 & \tau q_2 a_2 + ku \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ -q_1 \\ -q_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Para establecer las propiedades básicas de la ecuación (9) es necesario escribirla en forma no conservativa. De este modo, si definimos \mathbf{F}_i como la columna i -ésima de la matriz \mathbf{F} , se verifica la siguiente relación:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F}) = \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_2} = \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_1} + \mathbf{A}_2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_2} \quad (11)$$

siendo \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 las matrices Jacobianas cuya expresión es:

$$\mathbf{A}_1 = \nabla_{\mathbf{U}} (\mathbf{F}_1) = \begin{pmatrix} a_1 & 1/\tau & 0 \\ k & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A}_2 = \nabla_{\mathbf{U}} (\mathbf{F}_2) = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & 1/\tau \\ 0 & a_2 & 0 \\ k & 0 & a_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

Es claro que (9) es un sistema lineal de ecuaciones ya que \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 no dependen de \mathbf{U} . Por tanto, si definimos $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2)^T$ como un vector arbitrario con norma euclídea unitaria y la hipermatriz $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)^T$ se puede demostrar [9] que el sistema (9) es totalmente hiperbólico si la ecuación

$$\det(\omega \mathbf{I} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\kappa}) = 0 \quad (13)$$

tiene tres soluciones reales diferentes para valores arbitrariamente prescritos de $\boldsymbol{\kappa}$. Las soluciones de (13) son

$$\omega_1 = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\kappa}, \quad \omega_2 = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\kappa} - c, \quad \omega_3 = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\kappa} + c. \quad (14)$$

Y, por tanto, (9) es totalmente hiperbólico. Además, las soluciones de (13) son los autovalores de la matriz $\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\kappa}$ que se conoce normalmente como *matriz de proyección*. Aunque las matrices \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 son diagonalizables, el sistema (9) no lo es ya que \mathbf{A}_1 y \mathbf{A}_2 son diagonalizables en diferentes bases. En consecuencia, los cuasi-invariantes de Riemann [9] no se pueden definir en 2D. En este punto es muy útil definir el número adimensional

$$H = \frac{\|\mathbf{a}\|}{c} \quad (15)$$

que es homólogo al número de Mach [10] en problemas de flujo compresible o al número de Froude [10] en flujos con superficie libre. Utilizando (15) podemos definir *flujo supercrítico* (caracterizado por $H > 1$), *flujo subcrítico* (caracterizado por $H < 1$) y *flujo crítico* que verifica $H = 1$. Con esta definición, en flujo supercrítico no es posible el transporte de contaminante hacia aguas arriba porque el modo circular (difusivo) se propaga con una velocidad menor que el convectivo.

La imposición de las condiciones de contorno al sistema (9) no es trivial y una elección inadecuada puede provocar que no exista o que no sea única la solución. Una situación muy frecuente es tener que imponer una condición de contorno en una pared sólida fija. La condición de contorno en este caso es $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0$, siendo \mathbf{n} la normal exterior unitaria en cada punto del contorno. Sin embargo, los dominios computacionales están normalmente compuestos también de *contornos de entrada de flujo* y *contornos de salida de flujo*. En lo que sigue utilizaremos la notación Γ^{in} para el contorno de entrada de flujo (aquél que verifica $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} < 0$) y Γ^{out} para el contorno de salida de flujo (aquél que verifica $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} > 0$). En estos tipos de contornos la imposición de las condiciones de contorno es más complicada. Es conocido que para problemas hiperbólicos escalares sólo se debe imponer una condición en el contorno de entrada de flujo (ver, por ejemplo [9]). Para sistemas de ecuaciones hiperbólicos sólo se deben prescribir las ondas que entran por el contorno. En consecuencia, es necesario un análisis de Riemann en la dirección de la normal exterior. Se puede demostrar que las ecuaciones del transporte utilizando la ley de Cattaneo se pueden diagonalizar (sin embargo siguen acopladas por el término fuente) en 1D que es el caso de la normal exterior al contorno. Procediendo de este modo, se encuentran tres velocidades de propagación diferentes:

$$\omega_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n}, \quad \omega_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} - c, \quad \omega_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} + c. \quad (16)$$

Para obtener un problema bien planteado se deben imponer en un determinado contorno tantas componentes de \mathbf{U} como velocidades negativas (ondas entrantes) haya en (16). Por tanto, en un contorno de entrada de flujo supercrítico se deben prescribir todas las componentes de \mathbf{U} mientras que en un contorno de salida de flujo supercrítico no se debe imponer ninguna. Por contra, en un contorno de salida de flujo subcrítico, sólo una componente de \mathbf{U} se debe prescribir, mientras que en un contorno de entrada de flujo subcrítico se deben imponer 2 componentes de \mathbf{U} . Independientemente de las condiciones de contorno se debe dar una condición inicial para (9).

4. ESTUDIO NUMÉRICO DEL MODELO PROPUESTO EN ESTADO ESTACIONARIO

En esta sección analizamos el comportamiento de la solución numérica del problema estacionario del transporte utilizando la ecuación de Cattaneo. Nos referiremos a problemas unidimensionales en esta parte del artículo. Consideremos el dominio $\Omega = (0, L)$, $L \in \mathbb{R}^+$ con contorno Γ . Si definimos Γ_0 como el punto $x = 0$ y Γ_L como $x = L$ se verifica $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_L$. Usando esta notación, el contorno de entrada de flujo será Γ_0 cuando $a > 0$ y Γ_L en caso contrario. El contorno de salida de flujo será el complementario del contorno de entrada de flujo. Por tanto, el problema que estamos analizando se puede plantear como

$$\mathbf{A} \frac{d\mathbf{U}}{dx} = \mathbf{S} \quad \text{en } \Omega \quad (17.1)$$

$$\mathbf{U}^{\text{in}} = \mathbf{U}_D^{\text{in}} \quad \text{en } \Gamma \quad (17.2)$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{U} y \mathbf{S} son los equivalentes unidimensionales de las variables definidas en (10) y (12). Además, \mathbf{U}^{in} representa las componentes entrantes de \mathbf{U} . La ecuación (17.1) también se puede escribir del siguiente modo:

$$\frac{dq}{dx} = -\frac{du}{dx} \quad (18.1)$$

$$k \frac{du}{dx} + \tau a^2 \frac{dq}{dx} = -q \quad (18.2)$$

Introduciendo (18.1) en (18.2) se obtiene la relación

$$q = -(k - \tau a^2) \frac{du}{dx} \quad (19)$$

que sólo es válida en este caso simplificado. Con el fin de comparar el modelo propuesto con el modelo estándar, escribiremos (18) como una ecuación de segundo orden equivalente. Esta ecuación toma la forma

$$a \frac{du}{dx} - (k - \tau a^2) \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad (20)$$

Para obtener (20) ha sido necesario derivar la ecuación (18.2), por lo que (20) *podría contener soluciones espurias*. En consecuencia, las condiciones de contorno que se deben imponer a (20) son las mismas que hay que imponer a (17). En flujo supercrítico debemos imponer u y q en el contorno de entrada de flujo y ninguna condición en el contorno de salida de flujo. En flujo subcrítico se debe imponer una componente de \mathbf{U} (u por ejemplo) en el contorno de entrada de flujo y la otra (q en este caso) en el contorno de salida de flujo (utilizando la relación (19) la condición de contorno de flujo se puede imponer de forma débil por medio de la derivada espacial de u). Sin embargo, no hay problema en prescribir la concentración en Γ_0 y Γ_L en flujo subcrítico porque estamos imponiendo una condición en cada contorno.

En lo que sigue compararemos la formulación estándar con la formulación propuesta. Esta comparación resultará más sencilla si utilizamos la expresión (20) para describir el modelo propuesto. De este modo, se recupera la formulación clásica simplemente tomando $\tau = 0$ en (20). Comenzaremos esta comparación analizando un problema homogéneo con dos condiciones tipo Dirichlet. En este ejemplo utilizaremos la formulación estándar. Por tanto, el problema puede ser planteado como: hallar una función $u: [0, L] \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$a \frac{du}{dx} - k \frac{d^2u}{dx^2} = 0; \quad x \in (0, L) \quad (21.1)$$

$$u(0) = u_0 \quad (21.2)$$

$$u(L) = u_L \quad (21.3)$$

Sea $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$ una partición uniforme del intervalo $[0, L]$ y sea h la distancia entre dos nodos consecutivos. Llamaremos

$$P_e = \frac{ah}{2k} \quad (22)$$

al *número de Péclet* asociado a la partición anterior. Si resolvemos (21) usando el método de Galerkin y elementos finitos lineales se obtiene la siguiente ecuación en diferencias para un nodo interior j [11]:

$$(1 - P_e)u_{j+1} - 2u_j + (1 + P_e)u_{j-1} = 0 \quad (23)$$

siendo u_j la aproximación de elementos finitos de $u(x_j)$ y u_0, u_N los valores dados por las condiciones de contorno de (21). Además, las ecuaciones en diferencias (23) se pueden resolver exactamente (ver, por ejemplo, la referencia [12]) ya que son ecuaciones lineales. La solución exacta de (23) es

$$u_j = \frac{1}{1 - \left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^N} \left\{ u_0 \left[\left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^j - \left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^N \right] + u_L \left[1 - \left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)^j \right] \right\} \quad (24)$$

y, por tanto, se producirán oscilaciones cuando $|P_e| > 1$. Por otra parte, la solución exacta de (21) es

$$u(x_j) = \frac{1}{1 - e^{\frac{ah}{k}N}} \left[u_0 \left(e^{\frac{ah}{k}j} - e^{\frac{ah}{k}N} \right) + u_L \left(1 - e^{\frac{ah}{k}j} \right) \right] \quad (25)$$

Una simple comparación entre (24) y (25) muestra que la solución numérica será igual a la solución exacta sólo para $P_e = 0$, sin embargo, se puede demostrar que cuando $|P_e| \leq 1$ la solución aproximada (24) es la solución exacta del problema

$$a \frac{du}{dx} - k^* \frac{d^2u}{dx^2} = 0; \quad x \in (0, L) \quad (26.1)$$

$$u(0) = u_0 \quad (26.2)$$

$$u(L) = u_L \quad (26.3)$$

para un cierto valor $k^* \leq k$. Para demostrar esta proposición utilizaremos (24) y (25). La relación entre k y k^* viene dada por

$$e^{\frac{ah}{k^*}j} = \left(\frac{1 + P_e}{1 - P_e} \right)^j \quad \forall j = 0, \dots, N \quad (27)$$

Queremos obtener k^* tal que se verifique (27). Si se admiten soluciones complejas, entonces k^* siempre puede ser determinado. Si se admiten exclusivamente soluciones reales, entonces (27) tiene solución sólo cuando $|P_e| \leq 1$. La solución es

$$k^* = k \frac{2P_e}{\ln \left(\frac{1+P_e}{1-P_e} \right)} \quad (28)$$

Por medio de la expresión (28) se puede demostrar que $k^* \rightarrow 0$ cuando $|P_e| \rightarrow 1$ y que $k^* \rightarrow k$ cuando $|P_e| \rightarrow 0$. Véase la figura 2 donde se representa k^*/k para $P_e \in [-1, 1]$. Por tanto, el método de Galerkin aplicado a (21) resuelve exactamente un problema de convección-difusión con una difusividad menor. Por otra parte, la ecuación (28) puede ser reorganizada como

$$k^* = k - k \left(1 - \frac{2P_e}{\ln \left(\frac{1+P_e}{1-P_e} \right)} \right) < k \quad (29)$$

Comparando el coeficiente difusivo k^* con el coeficiente que se obtiene utilizando la ley de Cattaneo (ver ecuación (20)) se llega a la conclusión de que cuando resolvemos (21) por el método de Galerkin se obtiene la solución de un problema de transporte gobernado por la ecuación de Cattaneo. El tiempo de relajación para este problema tiene el valor:

$$\tau_{G-FEM} = \frac{h}{a} \left(\frac{1}{2P_e} - \frac{1}{\ln \left(\frac{1+P_e}{1-P_e} \right)} \right) \quad (30)$$

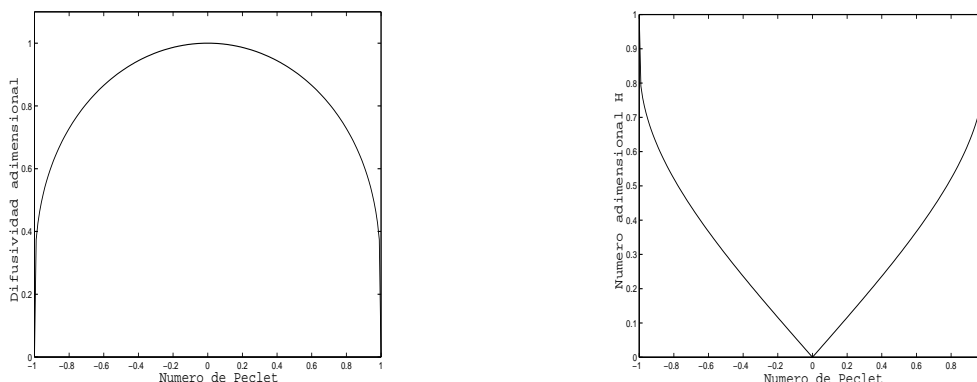


Figura 2: Difusividad adimensional (k^*/k) en función de P_e (izquierda) y número adimensional H en función de P_e (derecha).

Por tanto, la formulación de Galerkin introduce un tiempo de relajación “artificial”. En consecuencia, se puede definir una velocidad de propagación finita en el problema discreto:

$$c_{G-FEM} = \frac{a}{\left(1 - \frac{2P_e}{\ln\left(\frac{1+P_e}{1-P_e}\right)}\right)^{1/2}} \quad (31)$$

Por medio de la relación (31) es fácil obtener el valor de H (el homólogo unidimensional de (15)) “artificial” para un cierto valor de P_e . En la figura 2 se ha representado el H “artificial” como una función de P_e . En consecuencia, cuando se resuelve el problema (21) para $|P_e| < 1$ usando el método de Galerkin se obtiene la solución de un problema de convección-difusión gobernado por la ecuación de Cattaneo en flujo subcrítico. Por tanto, el problema discreto está bien planteado por que las condiciones de contorno (21.2), (21.3) se pueden imponer en flujo subcrítico. Sin embargo, cuando $|P_e| \rightarrow 1$ el problema que realmente se resuelve tiende a un problema que está mal planteado.

En lo que sigue se resolverá el problema del transporte utilizando la ecuación de Cattaneo en estado estacionario. Se presentarán ejemplos en flujo subcrítico y en flujo supercrítico. Para hacer más sencilla la comparación entre el modelo estándar y el modelo propuesto se utilizará la ecuación (20) para describir el modelo propuesto. Sin embargo, debemos tener en cuenta que las condiciones de contorno que se deben imponer son (17.2).

4.1. Resultados numéricos en flujo subcrítico

En esta sección analizaremos el problema

$$a \frac{du}{dx} - (k - \tau a^2) \frac{d^2u}{dx^2} = 0; \quad x \in (0, L) \quad (32.1)$$

$$u(0) = u_0 \quad (32.2)$$

$$u(L) = u_L \quad (32.3)$$

que representa un problema de transporte formulado mediante la ecuación de Cattaneo sólo en flujo subcrítico. Consideremos de nuevo la partición de $[0, L]$ definida por los nodos $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$. En lo que sigue utilizaremos la notación $h = L/N$. Llegados a este punto resulta muy útil definir el número adimensional

$$H_e = \frac{ah}{2(k - \tau a^2)} \quad (33)$$

que es el equivalente al número de Péclet en la descripción estándar del problema de transporte. Si resolvemos la ecuación (32) usando el método de Galerkin y elementos finitos lineales se obtienen las siguientes ecuaciones en diferencias:

$$(1 - H_e)u_{j+1} - 2u_j + (1 + H_e)u_{j-1} = 0; \quad \forall j = 1, \dots, N - 1 \quad (34)$$

donde u_0 y u_N vienen dados por las condiciones de contorno (32.2), (32.3). Del mismo modo que (23), las ecuaciones en diferencias (34) se pueden resolver analíticamente y se puede obtener la condición de estabilidad

$$|H_e| \leq 1. \quad (35)$$

Si tomamos $\tau = 0$ en (35) obtenemos

$$|P_e| \leq 1 \quad (36)$$

que es la condición de estabilidad utilizada para la formulación estándar. Las condiciones de estabilidad (35) y (36) parecen no ser de utilidad porque sólo pueden ser aplicadas a (32.1) y (21.1) respectivamente. Efectivamente esto es cierto en el caso de (36). Sin embargo, la condición (35) es asintóticamente equivalente a imponer que el tamaño de malla es menor que espacios característicos relacionados con las ondas que determinan la solución del problema del transporte que se deriva de la ecuación de Cattaneo. Como se ha comentado anteriormente, las ondas que determinan la solución del modelo de transporte propuesto se propagan con celeridades $a - c$ y $a + c$. Por tanto, los espacios característicos hacia aguas arriba y hacia aguas abajo son $\tau(c - a)$ y $\tau(a + c)$, respectivamente. Es posible mostrar [5] que

$$h < \min(\tau(c - a), \tau(a + c)) \quad (37)$$

tiende a (35) cuando a tiende a la celeridad de la onda difusiva, excepto por un factor de escala. La condición estabilidad (37) podría ser usada para desarrollar condiciones de estabilidad para problemas más complicados usando su sentido físico.

En lo que sigue representaremos la solución numérica y la solución exacta del problema (32). Usaremos varios conjuntos de valores para los parámetros del problema de modo que se presentarán dos grupos de tres ejemplos cada uno. Para cada grupo el tiempo de relajación es constante. Del mismo modo, el tamaño de malla, la difusividad, la longitud del dominio y los valores prescritos en el contorno son los mismos para todos los ejemplos

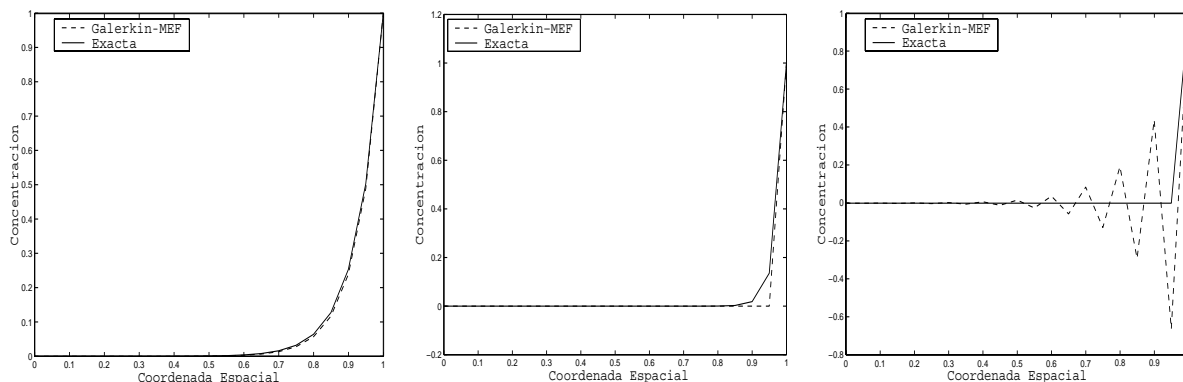


Figura 3: Tres problemas de transporte formulados mediante la ley de Cattaneo en flujo subcrítico. Estos ejemplos están definidos por $k = 1$, $\tau = 0.01$ y tres valores diferentes de H : $H = 0.7$ (izquierda), $H = 0.88278221857319$ (centro), $H = 0.975$ (derecha). Las soluciones numéricas se han obtenido usando el método de Galerkin y 20 elementos finitos lineales.

numéricos. Sin embargo, en cada grupo mostraremos tres problemas definidos por la velocidad del fluido a . Para todos los ejemplos en la sección 4 usaremos una malla de 20 elementos lineales, $L = 1$ (por tanto, $h = 0.05$) y $k = 1$.

- Grupo 1: tiempo de relajación pequeño

El primer grupo de ejemplos está definido por $\tau = 0.01$. Este valor del tiempo de relajación es muy pequeño por lo que no nos hemos alejado mucho de la ley de Fick. Usando los valores de k y τ que se han dado anteriormente se obtiene una celeridad de la onda difusiva de $c = \sqrt{k/\tau} = 10$. Por tanto, si $|a| \geq 10$, entonces (32) no representa un problema de transporte formulado con la ley de Cattaneo. El paso siguiente será calcular el máximo valor de la velocidad a para obtener una solución estable de (32) usando la condición de estabilidad $|H_e| \leq 1$. Procediendo de este modo se deduce que el esquema numérico empleado conduce a soluciones inestables cuando $|a| > 8.8278221857319$. Por tanto, podemos decir que la solución numérica de (32) es estable para casi todos los valores posibles de la velocidad a , porque (32) no representa un problema de transporte cuando $|a| \geq 10$.

En la figura 3 se muestra la solución numérica y la solución exacta para tres valores de a . En la gráfica de la izquierda se han dibujado las soluciones para $a = 7$. En el gráfico central se muestran las soluciones para $a = 8.8278221857319$ que es el mayor valor de a para el que se obtienen soluciones estables. Finalmente, se muestran las soluciones para $a = 9.75$ a la derecha.

- Grupo 2: tiempo de relajación medio

Este grupo de problemas está definido por $\tau = 1$. Por tanto, la celeridad de la onda difusiva es $c = \sqrt{k/\tau} = 1$. Además, según las condiciones de estabilidad (35), la mayor velocidad que conduce a soluciones numéricas estables es $a = 0.98757812194848$.

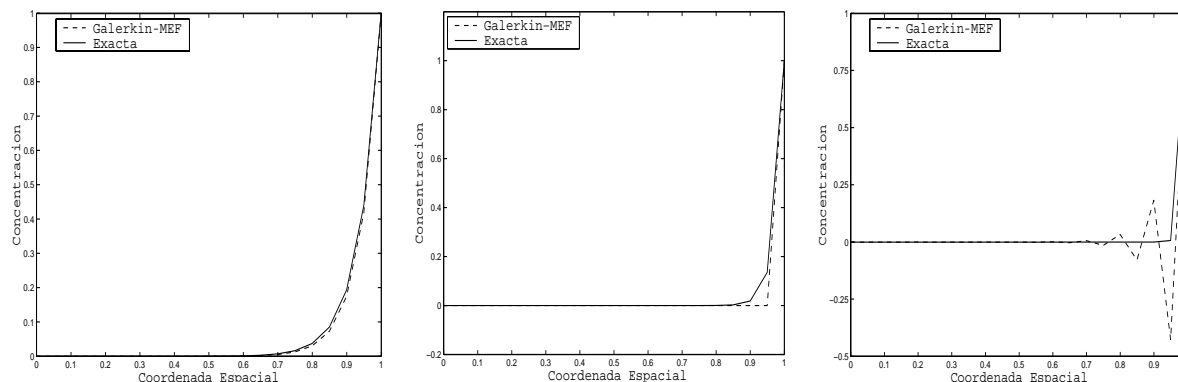


Figura 4: Tres problemas de transporte formulados mediante la ley de Cattaneo en flujo subcrítico. Estos ejemplos están definidos por $k = 1$, $\tau = 1$ y tres valores diferentes de H : $H = 0.97$ (izquierda), $H = 0.98757812194848$ (centro), $H = 0.995$ (derecha). Las soluciones numéricas se han obtenido usando el método de Galerkin y 20 elementos finitos lineales.

Se muestran tres ejemplos numéricos para este tiempo de relajación en la figura 4. Se han representado las soluciones para las velocidades $a = 0.97$ (izquierda), $a = 0.98757812194848$ (centro) y $a = 0.995$ (derecha).

4.2. Ejemplos numéricos en flujo supercrítico

En esta sección abordaremos la resolución numérica del problema del transporte utilizando la ley de Cattaneo en flujo supercrítico. Utilizaremos el método de Galerkin y elementos finitos lineales. Como hemos dicho anteriormente, en flujo supercrítico u y q deben ser prescritos en el contorno de entrada de flujo. La condición de contorno de flujo puede ser impuesta de forma débil usando la relación (19). Para simplificar supondremos $a > 0$. De esta forma, sabemos que el contorno de entrada de flujo es Γ_0 . Por tanto, analizaremos el problema

$$a \frac{du}{dx} - (k - \tau a^2) \frac{d^2u}{dx^2} = 0; \quad x \in (0, L) \quad (38.1)$$

$$u(0) = u_0 \quad (38.2)$$

$$\frac{du}{dx}(0) = -\frac{q_0}{k - \tau a^2} \quad (38.3)$$

que podría también ser planteado en términos del sistema (18) con las condiciones de contorno $u(0) = u_0$, $q(0) = q_0$. Sin embargo, analizaremos este problema resolviendo (38) para ser consistentes con el planteamiento de la sección anterior. De nuevo se presentarán dos grupos de ejemplos. En cada grupo el tiempo de relajación es constante. Los valores de L , k y h son los mismos que en la sección anterior. Los valores impuestos en el contorno ($u_0 = 1$ y $q_0 = -1$) son los mismos para todos los ejemplos.

- Grupo 1: tiempo de relajación pequeño

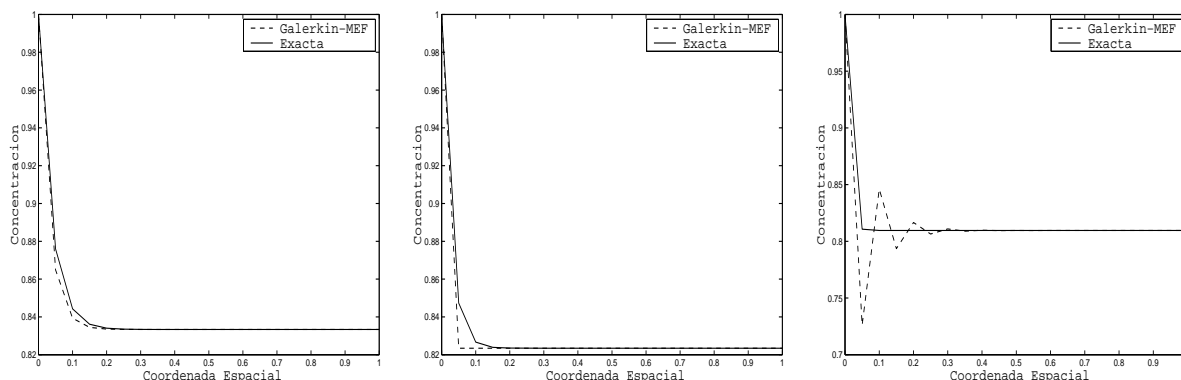


Figura 5: Tres problemas de transporte formulados mediante la ley de Cattaneo en flujo supercrítico. Estos ejemplos están definidos por $k = 1$, $\tau = 0.01$ y tres valores diferentes de H : $H = 1.2$ (izquierda), $H = 1.132782218537319$ (centro), $H = 1.05$ (derecha). Las soluciones numéricas se han obtenido usando el método de Galerkin y 20 elementos finitos lineales.

El primer grupo está definido por $\tau = 0.01$. Este es un valor muy pequeño para el tiempo de relajación por lo que no nos hemos alejado mucho de la ley de Fick. Con los valores de los parámetros anteriores es directo el cálculo de $c = \sqrt{k/\tau} = 10$. Como se ha dicho previamente, el problema (38) representa un problema de transporte sólo cuando $|a| > 10$. El mínimo valor de a que conduce a soluciones estables viene dado por la condición $|H_e| \leq 1$ y resulta ser $a = 11.32782218537319$.

En la figura 5 se muestran la solución numérica y la solución analítica del problema (38) para $a = 12$ (izquierda), para $a = 11.32782218537319$ (centro) que es el mínimo valor de la velocidad para el que se obtienen soluciones estables y para $a = 10.5$ (derecha).

- Grupo 2: tiempo de relajación medio

Este grupo de figuras está definido por el tiempo de relajación $\tau = 1$. En consecuencia, la celeridad de la onda difusiva es $c = 1$. Se muestran tres ejemplos numéricos para este tiempo de relajación en la figura 6. Las soluciones para $a = 1.05$ se muestran a la izquierda. En el gráfico central se han dibujado las soluciones para $a = 1.01257812194848$ que es el mínimo valor de a que conduce a soluciones estables. Finalmente, se han dibujado las soluciones para $a = 1.005$ a la derecha.

4.3. Conclusiones extraídas de los ejemplos numéricos

Mediante los ejemplos numéricos anteriores se ha mostrado que utilizando la ecuación de Cattaneo se obtienen soluciones estables prácticamente en todo el dominio de a . Esto se verifica incluso usando el método de Galerkin. Por tanto, desde un punto de vista práctico podemos decir que la ecuación del transporte formulada mediante la ley de Cattaneo conduce a soluciones estables, ya que los valores de a que hacen que la solución sea inestable son despreciables incluso para valores pequeños del tiempo de relajación. Además,

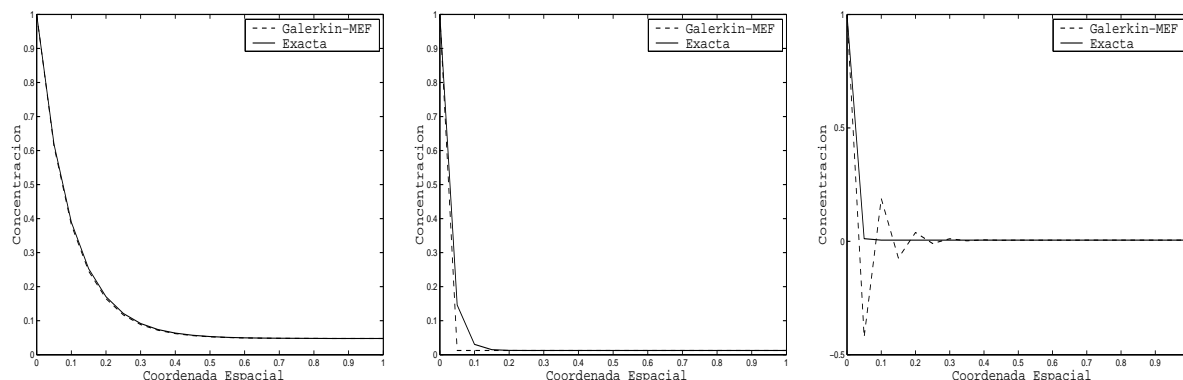


Figura 6: Tres problemas de transporte formulados mediante la ley de Cattaneo en flujo supercrítico. Estos ejemplos están definidos por $k = 1$, $\tau = 1$ y tres valores diferentes de H : $H = 1.05$ (izquierda), $H = 1.01257812194848$ (centro), $H = 1.005$ (derecha). Las soluciones numéricas se han obtenido usando el método de Galerkin y 20 elementos finitos lineales.

se concluye que *a medida que el tiempo de relajación aumenta, el problema del transporte se estabiliza*. De hecho, se puede demostrar que el tamaño (en el dominio de la velocidad) del intervalo que conduce a soluciones inestables es $I = h/\tau$ que disminuye a medida que aumenta τ . Para demostrar la proposición anterior encontraremos los valores de a que hacen que se verifique la relación $|H_e| = 1$. Esta ecuación tiene 4 soluciones reales, a saber

$$a_1 = -a_4 = -\frac{h}{4\tau} - \sqrt{\left(\frac{h}{4\tau}\right)^2 + c^2} \quad (39.1)$$

$$a_2 = -a_3 = -\frac{h}{4\tau} + \sqrt{\left(\frac{h}{4\tau}\right)^2 + c^2} \quad (39.2)$$

De las expresiones anteriores se observa que $a_1 < 0$, $a_1 < -c$, $a_2 > 0$, $a_2 < c$. Teniendo en cuenta lo anterior, el intervalo de velocidades que conduce a soluciones inestables tiene un tamaño de

$$I = a_4 - a_2 + a_3 - a_1 = -2(a_1 + a_2) = h/\tau \quad (40)$$

que decrece cuando τ crece como se ha dicho anteriormente.

5. ANÁLISIS NUMÉRICO DEL MODELO PROPUESTO EN ESTADO TRANSITORIO

5.1. Modelo numérico

En esta sección se realizará la discretización de la ecuación (9). Para ello utilizaremos la relación (11) y la notación (12). Resolveremos la ecuación (9) en un dominio Ω con un contorno Γ . La normal unitaria exterior al contorno será denotada por $\mathbf{n} = (n_1, n_2)^T$. Además, es necesario imponer a esta ecuación una condición inicial y las condiciones de

contorno necesarias (ver sección 3.3). Utilizaremos el método de Taylor-Galerkin de segundo orden propuesto por Donea en [13]. Este método se puede describir como sigue: Sea \mathbf{U}^n la aproximación de elementos finitos en el instante $t^n = n\Delta t$, siendo Δt el incremento de tiempo. La solución \mathbf{U}^{n+1} en el siguiente nivel de tiempo $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ se obtiene mediante una serie de Taylor alrededor de $t = t^n$,

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{U}^n + \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \right)^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} \right)^n \quad (41)$$

Entonces, las derivadas temporales de \mathbf{U} son reemplazadas por derivadas espaciales utilizando la ecuación original (9):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{S} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F}) \quad (42.1)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial t^2} = \mathbf{B}(\mathbf{S} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F})) + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{P}) \quad (42.2)$$

donde \mathbf{B} es la matriz Jacobiana asociada al término fuente, a saber

$$\mathbf{B} = \nabla_{\mathbf{U}}(\mathbf{S}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\tau & 0 \\ 0 & 0 & -1/\tau \end{pmatrix} \quad (43)$$

y \mathbf{P} es la matriz que resulta de ensamblar los vectores columna

$$\mathbf{P}_i = -\mathbf{A}_i(\mathbf{S} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F})); \quad i = 1, 2 \quad (44)$$

Si definimos $\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n$ y tenemos en cuenta que el medio es homogéneo se verifica la siguiente relación:

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{b} - \nabla_{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{G}) \quad (45)$$

siendo

$$\mathbf{b} = \Delta t \mathbf{S} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{B} \mathbf{S} \quad \text{y} \quad \mathbf{G} = \Delta t \mathbf{F} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{B} \mathbf{F} - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{P} \quad (46)$$

La formulación en residuos ponderados de (45) usando el método de Galerkin conduce a la siguiente ecuación vectorial en un nodo interior B

$$\sum_A M_{BA} \Delta \mathbf{U}_A = \mathbf{f}_B \quad (47)$$

donde

$$M_{BA} = \iint_{\Omega} N_B N_A d\Omega \quad (48.1)$$

$$\mathbf{f}_B = \iint_{\Omega} N_B \mathbf{b} d\Omega + \iint_{\Omega} \mathbf{G} \nabla_{\mathbf{x}} (N_B) d\Omega - \int_{\Gamma} N_B (\mathbf{G}_1 n_1 + \mathbf{G}_2 n_2) d\Gamma. \quad (48.2)$$

N_A , N_B son las funciones de forma que poseen continuidad \mathcal{C}^0 y \mathbf{G}_i , $i = 1, 2$ es la columna i -ésima de la matriz \mathbf{G} . Varios tests numéricos en problemas unidimensionales han mostrado que el algoritmo (47) puede ser implementado utilizando *matriz de masas condensada* (obtenida por integración nodal de (48.1)) sin perder excesiva precisión.



Figura 7: Flujo subcrítico en un canal. Condición inicial en concentraciones.

5.2. Ejemplos numéricos

En esta sección se mostrarán los resultados obtenidos mediante el esquema numérico presentado en la sección anterior. Se presentarán dos ejemplos de transporte de un contaminante en un canal rectangular. En el primero de ellos el flujo es subcrítico y en el segundo transcrito. Las mallas no estructuradas fueron generadas usando el código GEN4U basado en el algoritmo de Sarrate y Huerta [14].

5.2.1. Flujo subcrítico en un canal rectangular

Consideremos un canal rectangular sobre la región $[0, 10] \times [0, 2]$. Usaremos una malla estándar de cuadriláteros bilineales de modo que $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 0.25$ m. Los valores de los parámetros son $k = 1$ y $\tau = 1$ lo que implica $c = 1$. El campo de velocidades empleado en los cálculos es

$$\mathbf{a}(x_1, x_2) = (0.8x_2(2 - x_2), 0)^T \quad (49)$$

que es un campo solenoidal. Usando las relaciones (15) y (49) es claro que el flujo es subcrítico en todo punto del dominio. Las condiciones iniciales son

$$u(x_1, x_2) = e^{-(x_1^2 + x_2^2)}; \quad \mathbf{q}(x_1, x_2) = 0 \quad (50)$$

La condición inicial en concentraciones ha sido dibujada en la figura 7. Además, se prescribe la concentración y q_2 en el contorno de entrada de flujo; q_1 en el contorno de salida de flujo y $q_2 = 0$ en las paredes del canal (en todos los casos se imponen los valores que resultan de las condiciones iniciales). En lo que sigue presentaremos los resultados obtenidos utilizando el método de Taylor-Galerkin de segundo orden. El paso de integración temporal es $\Delta t = 0.1$ s. y se avanza en el tiempo hasta que se verifica la relación

$$\text{Residuo} = \frac{\|\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n\|}{\|\mathbf{U}^{n+1}\|} \leq 10^{-5} \quad (51)$$

Se muestra la solución de concentraciones en 4 tiempos diferentes: Para $t = 3$ s. (figura 8), para $t = 6$ s. (figura 9), para $t = 9$ s. (figura 10) y para $t = 12$ s. (figura 11). Además, se presenta la solución estacionaria en la figura 12.



Figura 8: Flujo subcrítico en un canal. Solución para $t = 3$ s. usando Taylor-Galerkin de segundo orden.



Figura 9: Flujo subcrítico en un canal. Solución para $t = 6$ s. usando Taylor-Galerkin de segundo orden.



Figura 10: Flujo subcrítico en un canal. Solución para $t = 9$ s. usando Taylor-Galerkin de segundo orden.



Figura 11: Flujo subcrítico en un canal. Solución para $t = 12$ s. usando Taylor-Galerkin de segundo orden.



Figura 12: Flujo subcrítico en un canal. Solución estacionaria usando Taylor-Galerkin de segundo orden.

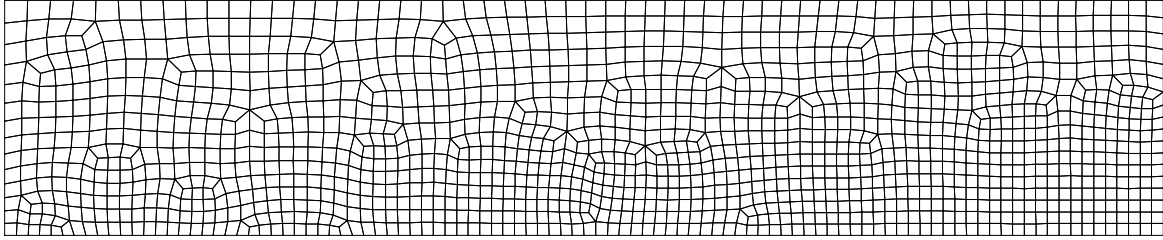


Figura 13: Flujo transcrito en un canal. Malla de cálculo (1375 elementos).



Figura 14: Flujo transcrito en un canal. Condición inicial relativa a la concentración.

5.2.2. Flujo transcrito en un canal rectangular

Consideremos un canal rectangular sobre la región $[0, 10] \times [0, 2]$. La malla de cálculo (1375 elementos) se ha dibujado en la figura 13. Los valores de los parámetros son $k = 10^{-2}$ y $\tau = 1$. Por tanto, la celeridad de la onda difusiva es $c = 0.1$. Resolveremos el problema usando el campo de velocidades

$$\mathbf{a}(x_1, x_2) = (2x_2(2 - x_2), 0)^T \quad (52)$$

que es un campo solenoidal. Usando (15) se puede ver que el flujo considerado es supercrítico excepto cerca de las paredes del canal. De hecho, este es un problema con un flujo de alta velocidad ya que verifica $H = 20$ en la recta $x_2 = 1$. Además, el número de Péclet máximo (asumiendo como dimensión característica del elemento la semisuma de sus diagonales) es $P_e = 21$. Las condiciones iniciales son (50) (la relativa a la concentración se ha dibujado en la figura 14). Además, se prescriben todas las incógnitas (se imponen valores compatibles con las condiciones iniciales) en el contorno de entrada de flujo supercrítico. En la pared sólida se impone $q_2 = 0$ que es también compatible con las condiciones iniciales. Se utiliza un paso de tiempo $\Delta t = 2 \cdot 10^{-2}$ s. y se avanza en el tiempo hasta que se satisface la relación (51). Se muestra la solución de concentraciones en 6 tiempos diferentes: Para $t = 1.5$ s. (figura 15), para $t = 3$ s. (figura 16), para $t = 4.5$ s. (figura 17), para $t = 6$ s. (figura 18) y para $t = 12$ s. (figura 19). Además, se ha dibujado la solución estacionaria en la figura 20.

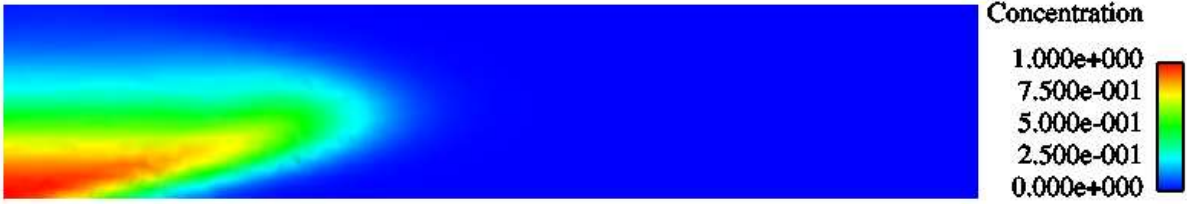


Figura 15: Flujo transcrito en un canal. Solución para $t = 1.5$ s. usando Taylor-Galerkin orden 2.

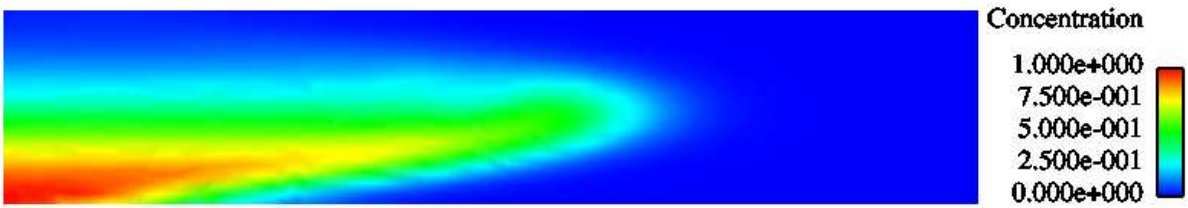


Figura 16: Flujo transcrito en un canal. Solución para $t = 3$ s. usando Taylor-Galerkin orden 2.

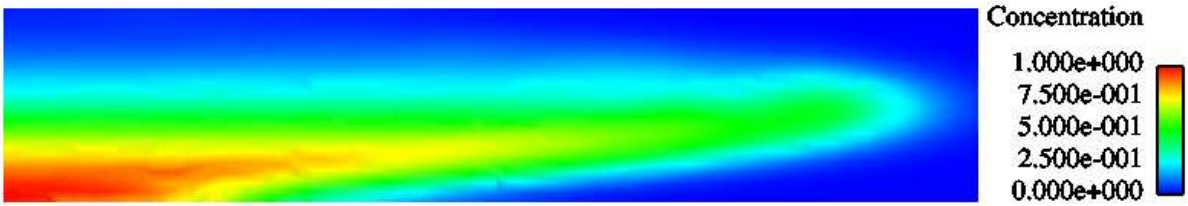


Figura 17: Flujo transcrito en un canal. Solución para $t = 4.5$ s. usando Taylor-Galerkin orden 2.

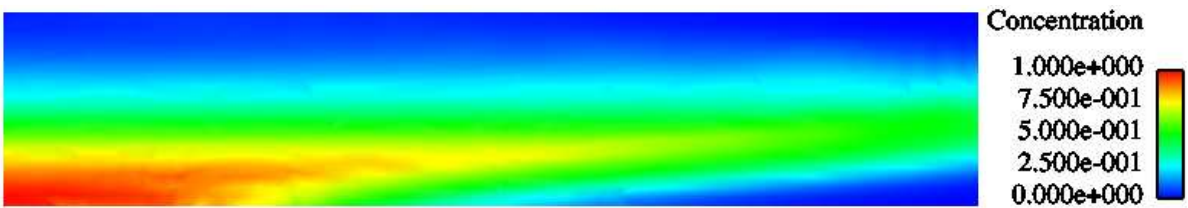


Figura 18: Flujo transcrito en un canal. Solución para $t = 6$ s. usando Taylor-Galerkin orden 2.

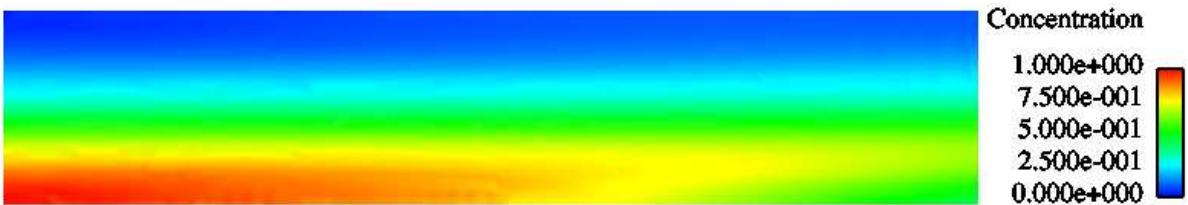


Figura 19: Flujo transcrito en un canal. Solución para $t = 12$ s. usando Taylor-Galerkin orden 2.

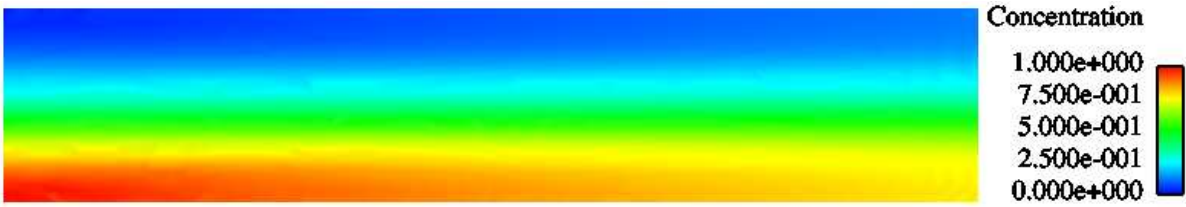


Figura 20: Flujo transcrito en un canal. Solución estacionaria usando Taylor-Galerkin orden 2.

5.3. Conclusiones extraídas de los ejemplos numéricos

Mediante los ejemplos anteriores se ha mostrado que el modelo propuesto puede ser utilizado para resolver problemas reales de ingeniería. Se ha presentado un ejemplo en flujo subcrítico y otro en flujo transcrito obteniéndose en ambos casos soluciones estables para mallas relativamente groseras. Además, el problema en flujo transcrito tiene un término convectivo importante ya que el número de Péclet máximo tiene un valor de $P_e = 21$. Por tanto, la formulación propuesta puede utilizarse para simular problemas reales de ingeniería obteniéndose soluciones estables en situaciones de convección dominante.

6. CONCLUSIONES

En este artículo se propone utilizar la ecuación de Cattaneo como ecuación constitutiva para el problema del transporte por convección-difusión. Esta formulación conduce a un sistema de ecuaciones totalmente hiperbólico para el que se puede definir una velocidad finita de propagación de masa. El planteamiento propuesto constituye una descripción más general que el modelo estándar ya que este último se puede considerar un caso particular del modelo propuesto. Cuando se utiliza la ecuación de Cattaneo se pueden producir dos tipos de flujo: flujo subcrítico (el contaminante se puede propagar en cualquier dirección) y flujo supercrítico (la propagación de contaminante hacia aguas arriba no es posible).

Desde un punto de vista numérico, hemos demostrado que las ecuaciones discretas del modelo estacionario estándar representan un problema de transporte formulado con la ley de Cattaneo cuando se emplea el método de Galerkin para la discretización espacial. Por tanto, se podría obtener un problema discreto mal planteado ya que las condiciones de contorno podrían ser incompatibles con las ecuaciones discretas. Finalmente, se han resuelto numéricamente varios ejemplos para mostrar que el modelo propuesto conduce, en general, a soluciones estables.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la SXID de la “Xunta de Galicia” mediante los proyectos # PGDIT01PXI11802PR y # PGDIT03PXIC11802PN, la SGPICT del “Ministerio de Ciencia y Tecnología” mediante el proyecto # DPI-2002-00297 y por la “Universidad de A Coruña” y la “Fundación de la Ingeniería Civil de Galicia”.

REFERENCIAS

- [1] Donea, J. and Huerta, A., *Finite element methods for flow problems*, Wiley & Sons, 2003.
- [2] Fick, A., Uber diffusion, *Poggendorff's Annalen der Physik und Chemie*, **94**:59–86, 1855.
- [3] Gómez, H., Colominas, I., Navarrina, F. and Casteleiro, M., Una formulación alternativa para el problema del transporte por convección-difusión, *7º Congreso de Métodos Computacionales en Ingeniería*, Lisboa, 2004.
- [4] Gómez, H., Colominas, I., Navarrina, F. and Casteleiro, M., On the intrinsic instability of the advection–diffusion equation, *Proc. of the 4th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Jyväskylä, Finlandia, 2004.
- [5] Gómez, H., Una nueva formulación para el problema del transporte por convección-difusión, Proyecto Técnico, Universidad de A Coruña, 2003.
- [6] Cattaneo, M.C., Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanéé, *Comptes Rendus de L'Academie des Sciences: Series I-Mathematics*, **247**:431–433, 1958.
- [7] Vernotte, P., Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur, *Comptes Rendus De L'Académie des Sciences: Series I-Mathematics*, **246**:3154-3155, 1958.
- [8] Manzari, M.T. and Manzari, M.T., On numerical solution of hyperbolic heat equation, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **15**:853–866, 1999.
- [9] Courant R. and Hilbert D. *Methods of mathematical physics. Vol II.*, Wiley & Sons, 1989.
- [10] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The finite element method. Volume 3: Fluid Dynamics*, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [11] Codina, R., A finite element formulation for the numerical solution of the convection-diffusion equation, Monografía N° 14, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), 1993.
- [12] Isaacson, E. and Keller, H.B., *Analysis of numerical methods*, Wiley & Sons, 1966.
- [13] Donea, J., A Taylor-Galerkin method for convective transport problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **20**:101-120, 1984.
- [14] Sarrate, J. and Huerta, A., Efficient unstructured quadrilateral mesh generation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **49**:1327–1350, 2000.