

Preprint of the paper:

**"A SPH approach for fluid flow problems in engineering applications"**

G. Mosqueira, L. Cueto-Felgueroso, I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro (2002)  
Proceedings del "II Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas". Guanajuato, México.

<http://caminos.udc.es/gmni>

# UNA FORMULACIÓN SPH PARA PROBLEMAS DE FLUJO DE FLUIDOS EN APLICACIONES EN LA INGENIERÍA

**G. Mosqueira, L. Cueto-Felgueroso, I. Colominas, F. Navarriña y M. Casteleiro**

*Dept. de Métodos Matemáticos e de Representación. Universidade da Coruña.  
E.T.S. Ing. Caminos, C. y P. Campus de Elviña. 15192 A Coruña, España  
e-mail: mosqueira@iccp.udc.es; web page: <http://caminos.udc.es/dmmr/>*

**Resumen.** En este artículo estudiamos y comparamos, a través de varios ejemplos, las principales formulaciones Smooth Particle Hydrodynamics existentes en la bibliografía para resolver problemas de fluidos, especialmente los relacionados con flujo en superficie libre. Nos centramos fundamentalmente en el análisis de las distintas correcciones añadidas al método para aumentar su precisión y mejorar su funcionamiento numérico.

**Palabras clave:** Smooth Particle Hydrodynamics, Meshless, Flujo en superficie libre.

## 1 INTRODUCCIÓN

Los métodos sin malla son un conjunto de técnicas numéricas que se han propuesto recientemente para la resolución de ecuaciones diferenciales en aplicaciones de ingeniería. Su principal ventaja frente a las ya existentes, como el método de elementos finitos o el de diferencias finitas, es evitar la rígida conectividad que exigen para discretizar el dominio de integración. Gracias a esto, la resolución de problemas relacionados con grandes deformaciones, geometrías complicadas, etc., es mucho más sencilla.

El método SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) es uno de los primeros métodos sin malla que aparecen en la bibliografía [1]. Sus orígenes se remontan a finales de los años 70 y sus primeras aplicaciones están relacionadas con problemas de astrofísica. En los últimos

años, debido a su gran versatilidad y a su buen comportamiento numérico, su aplicación se ha extendido a otros campos en el ámbito de la ingeniería como el electromagnetismo o la mecánica de fluidos.

Dentro de este último apartado, la resolución de problemas de flujo en superficie libre con el método SPH presenta grandes ventajas frente a otros métodos, fundamentalmente cuando el planteamiento es puramente lagrangiano. En este caso, el fluido se descompone en un conjunto de partículas, cada una de las cuales tiene una determinada masa, volumen, velocidad, densidad, y ejerce una determinada fuerza sobre las demás y sobre los contornos. El objetivo último es determinar la posición de cada una de estas partículas en un instante de tiempo para conocer así la evolución del fluido.

En este artículo nos centramos en este tipo de aplicaciones planteadas en su vertiente lagrangiana. El estudio lo ceñimos a los dos modos más populares de afrontar este tipo de problemas con el SPH, el denominado método estándar [1] y el método corregido [2]. En ambos casos explicamos en qué consiste la formulación empleada y analizamos y comparamos, a través de distintos ejemplos, el comportamiento de cada uno de ellos. Así mismo, proponemos una combinación de ambas técnicas (método estándar-correcto), que permite analizar la importancia de cada una de las correcciones.

El esquema del presente artículo es el siguiente: En primer lugar, planteamos las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido en régimen de superficie libre. Seguidamente, analizamos cómo aproximar estas ecuaciones en el espacio y en el tiempo. Por último, resolvemos un ejemplo que permite estudiar el comportamiento de ambas técnicas.

## 2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA FÍSICO

En este apartado planteamos las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido para conocer la posición de todas las partículas que lo componen en un instante de tiempo  $t$ . Si consideramos fluidos compresibles, newtonianos e isentrópicos estas ecuaciones son [3,4] la de conservación de la masa, conservación del momento y la que proporciona la posición de cada partícula  $\mathbf{x}$  de fluido:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad (1)$$

siendo  $\rho(\mathbf{x}, t)$  la densidad del fluido y  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  su velocidad;  $\mathbf{f}$  son las fuerzas externas por unidad de volumen (la gravedad en problemas de superficie libre) y  $\nabla \cdot \mathbf{T}$  las fuerzas internas por unidad de volumen, siendo  $\mathbf{T}$  el tensor de tensiones de Cauchy, que se calcula a través de la ecuación constitutiva:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\left(\mathbf{D} - \frac{1}{3}\text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I}\right); \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^t), \quad (2)$$

siendo  $\mu$  una constante denominada viscosidad del fluido,  $\mathbf{I}$  el tensor identidad de segundo orden y  $p$  un campo escalar que representa la presión y cuyo valor viene determinado por la siguiente ecuación de la termodinámica:

$$\frac{p}{p_o} = (k + 1)\left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^\gamma - k, \quad (3)$$

en donde  $k$  y  $\gamma$  son parámetros adimensionales que varían ligeramente con la temperatura y  $p_o$  y  $\rho_o$  son los valores atmosféricos estándar. A partir de estos parámetros se define la velocidad del sonido como  $c = \sqrt{\gamma k / \rho}$  [1].

En los siguientes apartados analizaremos cómo realizar las aproximaciones numéricas al sistema de tres ecuaciones diferenciales y tres incógnitas (1), tanto en el espacio como en el tiempo.

### 3 APROXIMACIÓN ESPACIAL: EL MÉTODO SPH

En este apartado estudiamos cómo aproximar una función empleando el método SPH. El planteamiento se realiza desde un punto de vista continuo. Para calcular una aproximación  $u_h(\mathbf{x})$  al valor que toma una función  $u(\mathbf{x})$  en un punto, empleamos los valores que toma esta función en un conjunto de puntos situados dentro de un determinado dominio  $\Omega$ , ponderados con la función  $K(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  [5]:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{r} \in \Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d\Omega \quad (4)$$

Esta es una aproximación “tipo Kernel”. El núcleo  $K(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  desempeña un papel fundamental, permitiendo construir aproximaciones con carácter local. Habitualmente se define de tal forma que tome el máximo valor en el punto  $\mathbf{x}$  ponderando la información aportada por los restantes puntos en función de la distancia a  $\mathbf{x}$ . Así, si la función

de ponderación sólo toma valores distintos de cero en una determinada región del dominio  $\Omega$ , conseguimos el deseado carácter local. Por ejemplo:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \begin{cases} H(z) \Big|_{z=|\mathbf{x}-\mathbf{r}|/h} > 0, & \text{si } \mathbf{r} \in B(\mathbf{x}); \\ 0, & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases} \quad (5)$$

Como función  $H(z)$  normalmente se toma la función de Gauss o un spline cúbico.  $B(\mathbf{x})$  es el denominado soporte del punto  $\mathbf{x}$  y representa el conjunto de puntos de su entorno que contribuyen a construir la aproximación en este punto. Una posible elección de  $B(\mathbf{x})$  es:

$$B(\mathbf{x}) = \{\mathbf{r} \in \Omega / |\mathbf{r} - \mathbf{x}| \leq 2h\} \quad (6)$$

El parámetro de dilatación  $h$  que aparece en la expresión (5) es importante porque caracteriza el soporte del núcleo.

Además de permitir obtener aproximaciones de tipo local, la función  $K(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  permite que la formulación verifique determinados requisitos de consistencia. Estos dependen del orden del polinomio que se quiere que la aproximación represente exactamente. Un ejemplo de núcleo que verifica condiciones de consistencia de orden lineal es el spline cúbico [6].

Finalmente, para construir una aproximación SPH aplicable en la práctica es necesario pasar de una formulación continua a una discreta, es decir, expresar la integral que representa la aproximación como el producto de unos pesos de integración  $V(\mathbf{r}_i)$  multiplicados por el integrando evaluado en unos puntos de integración [6]. Para ello dividimos el dominio total  $\Omega$  en  $n$  puntos nodales o partículas, de las cuales sólo algunas estarán en el soporte de cada partícula o punto  $\mathbf{x}$ . Estos puntos nodales serán los puntos de integración. Por lo tanto, desde un punto de vista discreto, la aproximación se puede escribir como:

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{r} \in \Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d\Omega \simeq \sum_{i=1}^n V(\mathbf{r}_i) K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_i) u(\mathbf{r}_i) = \hat{u}^h(\mathbf{x}). \quad (7)$$

En los siguientes subapartados estudiamos la aplicación del método SPH a la resolución de un problema de flujo en superficie libre. De las distintas formas propuestas en la bibliografía, nos centramos en dos de ellas que denominaremos “método estándar” [1] y “método corregido”

[2]. En ambos casos, se establecen distintas correcciones que intentan, fundamentalmente, compensar la pérdida de consistencia ocasionada por el paso del continuo al discreto.

### 3.1 El método SPH estándar

En el método estándar se toma como peso de integración el volumen asociado a cada partícula. Es decir, si denominamos  $m_j$  a la masa de la partícula con coordenadas  $\mathbf{r}_j$  y  $\rho_j$  a su densidad, los pesos de integración serán [1]:  $V(\mathbf{r}_j) = m_j/\rho_j$ . Teniendo ésto en cuenta, las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido se pueden aproximar, para cada partícula  $\mathbf{x}_i$ , del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}_i)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{p(\mathbf{x}_i)}{\rho(\mathbf{x}_i)^2} + \frac{p(\mathbf{x}_j)}{\rho(\mathbf{x}_j)^2} + \mathbf{\Pi}_{i,j} \right) \nabla_{\mathbf{r}} K(\mathbf{r}_j, \mathbf{x}_i) \\ \frac{d\rho(\mathbf{x}_i)}{dt} &= -\rho(\mathbf{x}_i) \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) (\mathbf{v}^*(\mathbf{r}_j) - \mathbf{v}^*(\mathbf{x}_i))^t \cdot \nabla_{\mathbf{r}} K(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_j) \\ \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} &= \mathbf{v}^*(\mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (8)$$

Como se puede observar, en el método estándar se considera el fluido no viscoso pero, para corregir las oscilaciones que aparecen en este caso, se añade un término  $\mathbf{\Pi}_{i,j}$  denominado viscosidad artificial. Esta viscosidad se define del siguiente modo [7]:

$$\mathbf{\Pi}_{i,j} = \begin{cases} \frac{-\alpha c_{i,j} \mu_{i,j} + \beta \mu_{i,j}^2}{\rho_{i,j}}, & \text{para } \mathbf{v}_{i,j}^t \cdot \mathbf{r}_{i,j} < 0; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (9)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \mu_{i,j} &= \frac{h \mathbf{v}_{i,j}^t \cdot \mathbf{r}_{i,j}}{\mathbf{r}_{i,j}^2 + 0.01h^2}; & \rho_{i,j} &= \frac{1}{2}(\rho(\mathbf{x}_i) + \rho(\mathbf{r}_j)); \\ c_{i,j} &= \frac{1}{2}(c_i + c_j); & \mathbf{v}_{i,j} &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_j); & \mathbf{r}_{i,j} &= \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j. \end{aligned}$$

Un valor típico de  $\alpha$  es  $\alpha = 0.01$  y  $c_i$  es la velocidad del sonido en el punto  $\mathbf{x}_i$  [1]. El coeficiente  $\beta$  se introduce para amortiguar la influencia de velocidades del sonido demasiado elevadas. En los problemas que tratamos en este trabajo adopta el valor  $\beta = 0$ . La velocidad que se introduce en la ecuación de la continuidad, para calcular la densidad, y en la ecuación que calcula la posición de cada

partícula, es una velocidad corregida que se calcula a partir de la proporcionada por la ecuación del momento, del siguiente modo:

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}_i) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) + \epsilon \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{\mathbf{v}_{i,j}}{\rho_{i,j}} \right) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_j) \quad (10)$$

La intención de esta corrección, denominada XSPH, es conseguir un movimiento más ordenado de las partículas. En esta ecuación el valor habitual de  $\epsilon$  es 0.5 [1].

### 3.2 El método SPH corregido

**Corrección del núcleo:** El objetivo es buscar consistencia de orden 0 al pasar de la formulación continua a la discreta. Esto permite garantizar la conservación del momento lineal. Para ello se toman los mismos pesos de integración del método estándar y se modifica el núcleo del siguiente modo [2]:

$$K^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}_i) = \frac{K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_i)}{\sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_j)} \quad (11)$$

El gradiente del núcleo modificado se calcula así:

$$\nabla_{\mathbf{x}} K^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}_i) = \frac{\nabla_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_i)}{\sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_j)} - \frac{K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_i) \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) \nabla_{\mathbf{x}} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_j)}{\left[ \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_j) \right]^2} \quad (12)$$

**Corrección del gradiente:** Con esta corrección se garantiza la conservación del momento angular. El objetivo es que el nuevo gradiente del núcleo verifique la siguiente condición [2]:

$$\sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) \nabla_{\mathbf{x}}^* K^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}_j) \mathbf{r}_j^t = \mathbf{I}. \quad (13)$$

El gradiente corregido del núcleo se define como:

$$\nabla_{\mathbf{x}}^* K^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}_j) = \left[ \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) \nabla_{\mathbf{x}} K^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}_j) \mathbf{r}_j^t \right]^{-1} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} K^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}_j) \quad (14)$$

Teniendo en cuenta estas expresiones, las ecuaciones que se resuelven en este caso son las correspondientes a un fluido viscoso:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}_i)}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \frac{1}{\rho(\mathbf{x}_i)} \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) \mathbf{T}(\mathbf{r}_j) \nabla_{\mathbf{r}}^* K^*(\mathbf{r}_j, \mathbf{x}_i); \\ \frac{d\rho(\mathbf{x}_i)}{dt} &= -\rho(\mathbf{x}_i) \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) \mathbf{v}(\mathbf{r}_j)^t \cdot \nabla_{\mathbf{x}}^* K^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_j); \quad \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \end{aligned} \quad (15)$$

en donde,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{r}_j) &= p(\mathbf{r}_j) \mathbf{I} + 2\mu \left[ \mathbf{D}(\mathbf{r}_j) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{r}_j)) \mathbf{I} \right]; \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}_j) &= \frac{(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}_j) + \nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}_j)^t)}{2}; \quad \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}_j) = \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) \mathbf{v}(\mathbf{r}_j) \nabla_{\mathbf{r}}^* K^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}_j) \end{aligned} \quad (16)$$

### 3.3 El método SPH estándar-correctido

En este trabajo, además de los esquemas expuestos que aparecen en la bibliografía, también hemos estudiado el comportamiento del método SPH estándar sin la corrección XSPH (10) pero con el núcleo y el gradiente del núcleo corregido. Es decir, las ecuaciones que rigen esta tercera técnica son las de la expresión (8), pero empleando la expresión (14) para corregir los gradientes.

Esto permite analizar los dos aspectos siguientes: la influencia del término de viscosidad artificial en la precisión de los resultados y la importancia de que se verifiquen los requisitos de consistencia. Así mismo, en los ejemplos se podrá observar también cómo, a pesar de que la corrección XSPH ayuda a una evolución ordenada de las partículas y reduce la interpenetración de las mismas, es más efectivo el empleo de una formulación consistente, en el sentido contemplado en el apartado 3.

## 4 APROXIMACIÓN EN EL TIEMPO

En este apartado planteamos la discretización temporal. Existen en la bibliografía distintas alternativas, siendo las más empleadas los métodos predictor-corrector [7] o los esquemas leap-frog [2]. En



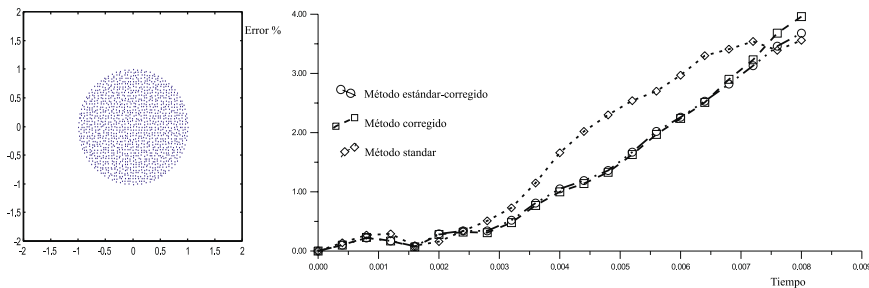


Figura 1: Configuración inicial de partículas y errores en los métodos numéricos empleados.

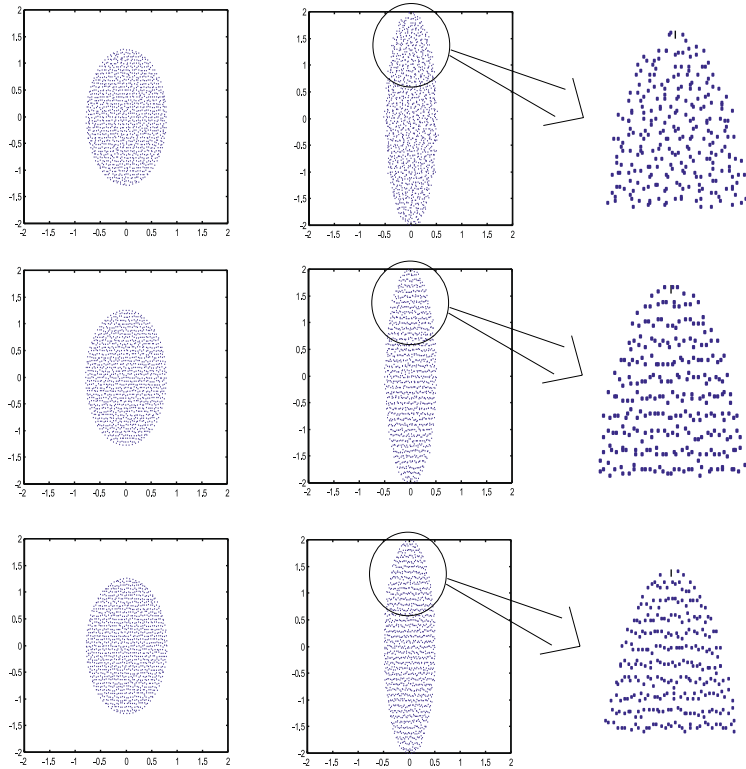
este artículo proponemos el siguiente método, basado en el predictor-corrector, que permite calcular, de forma explícita, las posiciones de cualquier partícula en un tiempo  $t_{i+1}$  conociendo los valores en el tiempo  $t_i$ , prediciendo los valores en un tiempo intermedio denominado  $t_{i/2}$  y corrigiéndolos en ese mismo tiempo, pero llamándolo ahora  $t_{i+1/2}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{i/2} &= \mathbf{v}_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{i-\frac{1}{2}}; \quad \mathbf{x}_{i/2} = \mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_i; \quad \rho_{i/2} = \rho_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)_i \\ \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} &= \mathbf{v}_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{i/2}; \quad \mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}; \quad \rho_{i+\frac{1}{2}} = \rho_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)_{i+\frac{1}{2}} \\ \mathbf{v}_{i+1} &= 2\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_i; \quad \mathbf{x}_{i+1} = 2\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}_i; \quad \rho_{i+1} = 2\rho_{i+\frac{1}{2}} - \rho_i \end{aligned} \quad (17)$$

## 5 EJEMPLO: Evolución de una gota de agua elíptica

Como ejemplo analizamos la evolución temporal de una gota de agua en dos dimensiones sometida a un campo inicial de velocidades lineal con las coordenadas,  $\mathbf{v}_0 = (-100x, 100y)$ . La configuración inicial es un círculo de radio unidad. Nos centramos en el estudio del movimiento de los semiejes mayor  $b$  y menor  $a$ . Si consideramos el fluido incompresible ( $ab = \text{cte} = 1$ ), el problema se puede resolver de forma analítica [1].

En los siguientes gráficos mostramos los resultados numéricos obtenidos, para distintos tiempos, con el método estándar, el corregido y el estándar-corregido. Los datos empleados son:  $\gamma = 7$ ,  $k = 285,714 \text{ MN/m}^2$  y  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ .



*Figura 2: Evolución de las partículas con el método estándar, el corregido y el estándar-correctado.  $t = 2 \cdot 10^{-3} s$  y  $t = 8 \cdot 10^{-3} s$ .*

En la parte izquierda de la *Figura 1* se puede observar la posición inicial de las partículas. En los tres casos se han empleado 1308 partículas distribuidas en el dominio de forma aleatoria.

En la parte derecha se compara el valor del producto  $ab$ , que en este ejemplo tendría que mantenerse constante e igual a 1, es decir, el fluido se comporta de forma incompresible. Además, este producto da idea de la evolución de ambos semiejes. A la vista de los resultados se ve que el método estándar-correctado y el corregido se comportan de forma similar y con errores inferiores al estándar.

En la *Figura 2* se muestra la evolución temporal obtenida con los tres métodos. Se puede observar que con el método corregido y el estándar-correctado las partículas evolucionan de forma más regular.

## 6 CONCLUSIONES

A la vista de los resultados presentados en el apartado de ejemplos y de los ensayos realizados, se induce que el método SPH simula bien los flujos en superficie libre. De las tres técnicas analizadas, se concluye que lo que más influye en la precisión de los resultados son las correcciones realizadas en el núcleo y en su gradiente. En cambio, que la viscosidad se introduzca de forma artificial o que se resuelvan las ecuaciones considerando términos viscosos, apenas influye.

Actualmente estamos empleando estas formulaciones en aplicaciones relacionadas con problemas de rotura de presa, revistiendo gran importancia la imposición de las condiciones de contorno.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la SGPICIT del Ministerio de Ciencia y Tecnología (#1FD97-0108), así como por la Secretaría Xeral de I+D de la Xunta de Galicia y por la Universidad de La Coruña mediante proyectos y becas de investigación.

## REFERENCIAS

- [1] J.J. Monaghan *Simulating Free Surface Flows with SPH*, Journal of Computational Physics, **110**, 399-406; 1994.
- [2] Bonet J., Lok T.S.L. *Variational and momentum preseving aspects of Smooth Particle Hydrodynamics formulations* Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg., **180**,97-115; 1998
- [3] Gurtin M.E. *An Introduction to Continuum Mechanics* Mathematics in Science and Engineering, **158**, Academic Press; 1981
- [4] White F.M. *Mecánica de fluidos* McGraw-Hill; 1983
- [5] Randles P.W., Libersky L.D. *SPH: Some recent improvements and applications* Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg., **139**,375-408; 1996
- [6] Mosqueira G., Colominas I., Bonet J., Navarrina F., Casteleiro M. *Development of integration schemes for meshless numerical approaches based on the SPH method*. ECCOMAS CFD 2001, Swansea, 4-7 September 2001.
- [7] Morris J.P. *An Overview of the Method of Smoothed Particle Hydrodynamics* Universitat Kaiserslautern. Internal Report; 1995