

Preprint of the paper:

"Topology Optimization of Structures: A minimum weight FEM approach"

F. Navarrina, I. Muiños, I. Colominas, M. Casteleiro (2002)

Proceedings del "II Congreso Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas". Guanajuato, México.

<http://caminos.udc.es/gmni>

UNA FORMULACIÓN DE MÍNIMO PESO CON RESTRICCIONES EN TENSIÓN PARA LA OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA DE ESTRUCTURAS

I. Muiños, I. Colominas, F. Navarrina y M. Casteleiro

Dept. de Métodos Matemáticos y de Representación, Universidad de A Coruña
E.T.S. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos
Campus de Elviña
15192 A Coruña, España
e-mail:navarrina@iccp.udc.es
web page: <http://caminos/udc/es/dmmr>

Resumen. En general, los ingenieros tratan de diseñar piezas de peso mínimo que sean capaces de resistir las solicitaciones máximas que se puedan producir durante la vida útil de la pieza. Sin embargo, las formulaciones de optimización topológica se han planteado tradicionalmente con otro objetivo: distribuir una cantidad preestablecida de material de forma que se maximice la rigidez de la pieza que se desea diseñar. En este artículo se analizan y comparan ambos enfoques, y se presenta una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión basada en el Método de Elementos Finitos.

Palabras clave: Optimización Topológica, Diseño Óptimo

1 INTRODUCCIÓN

Desde que Bendsøe y Kikuchi propusieron los conceptos básicos¹ en 1988, la mayor parte de los problemas de optimización topológica se han planteado mediante formulaciones de máxima rigidez. Con este tipo de planteamientos se pretende distribuir una cantidad predeterminada de material en un recinto de forma que se maximice la rigidez (se minimice la energía de deformación) de la pieza resultante para un determinado estado de carga. La formulación SIMP (solid isotropic material with penalty)²⁻⁴ constituye el método de máxima

rigidez más extendido en la actualidad. En ésta formulación, la cantidad de material está limitada superiormente por un porcentaje (factor de llenado) del volumen del recinto y no se establecen restricciones ni sobre el estado tensional ni sobre el campo de desplazamientos de la pieza.

Frente a las formulaciones de mínimo peso con restricciones en desplazamiento o tensión^{5,6} —que se utilizan habitualmente en la optimización de formas y dimensiones— las formulaciones de máxima rigidez evitan tener que trabajar con numerosas restricciones altamente no-lineales. Sin embargo, el problema de máxima rigidez es un problema intrínsecamente mal planteado^{2,4} cuya solución oscila al refinar la discretización, y no permite contemplar múltiples estados de carga. La formulación SIMP supera parcialmente la primera dificultad y es fácil de implementar en el marco de un modelo de elementos finitos. En líneas generales, el problema consiste en calcular la cantidad de material (poroso) que hay que disponer en cada elemento de forma que se minimice una función objetivo fuertemente no lineal (la energía de deformación) con una sólo restricción sencilla (la cantidad total de material). Por cada elemento hay una variable de diseño a determinar: la densidad relativa, cuyo valor adimensional debe estar comprendido entre 0 y 1.

Existen procedimientos explícitos de actualización^{2,4} de las densidades relativas. Pero se producen normalmente inestabilidades numéricas que impiden la convergencia (configuraciones en damero). Además, un material poroso es un resultado final indeseable. Por ello es necesario imponer penalizaciones o restricciones adicionales^{2,4} tanto para estabilizar la solución como para evitar la existencia de valores intermedios de la densidad relativa, y al resultado final se le suele aplicar un filtrado de imagen que favorezca su interpretación. Las soluciones obtenidas finalmente con estas correcciones semejan estructuras de barras.² Sin embargo este tipo de soluciones son cuestionables, ya que dependen de numerosos parámetros (factor de llenado, grado de discretización, penalizaciones aplicadas, filtrado de imagen, etc.). Además, el diseño final puede no ser aceptable en la práctica, ya que la formulación no tiene en cuenta el estado tensional de la pieza.

A continuación se presenta una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión (MPRT) para la optimización topológica de estructuras mediante el Método de Elementos Finitos.

2 MODELO DE CÁLCULO

2.1 El problema de análisis estructural

Sea un dominio Ω^o que se encuentra en equilibrio bajo un conjunto de acciones exteriores. Como consecuencia de ello, el dominio se habrá deformado en otro Ω y sus puntos habrán cambiado de posición. Sea \mathbf{P}^o un punto del dominio Ω^o que al deformarse tendrá otra posición \mathbf{P} en Ω . Sea \mathbf{r}^o el vector de posición de \mathbf{P}^o y \mathbf{r} el vector de posición de \mathbf{p} . Nuestro objetivo es calcular los desplazamientos

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}^o) = \mathbf{r}(\mathbf{r}^o) - \mathbf{r}^o, \quad (1)$$

a partir de los cuales se pueden obtener las deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}^o)$ y las tensiones $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}^o)$. En elasticidad lineal (pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones) las expresiones correspondientes son

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2)$$

Si las acciones exteriores son fuerzas por unidad de volumen $\mathbf{b}(\mathbf{r}^o)$ que actúan en el dominio Ω^o , y fuerzas por unidad de superficie $\mathbf{g}(\mathbf{r}^o)$ que actúan en la superficie Γ_σ^o , el problema de cálculo estructural se puede escribir en los siguientes términos^{7,8}

Hallar $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_u$

tal que $a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{b})_{\Omega^o} + (\mathbf{w}, \mathbf{g})_{\Gamma_\sigma^o} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{H}_w$

siendo $a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \iiint_{\Omega^o} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega, \quad (3)$

$$(\mathbf{w}, \mathbf{b})_{\Omega^o} = \iiint_{\Omega^o} \mathbf{w}^T \mathbf{b} d\Omega, \quad (\mathbf{w}, \mathbf{g})_{\Gamma_\sigma^o} = \iint_{\Gamma_\sigma^o} \mathbf{w}^T \mathbf{g} d\Gamma.$$

donde las funciones de prueba \mathbf{u} deben verificar las condiciones de contorno esenciales (desplazamientos conocidos), y las funciones de prueba \mathbf{w} deben verificar las correspondientes condiciones de contorno homogéneas.

2.2 El modelo numérico de elementos finitos

En general, no es posible obtener la solución analítica del problema anterior. Por ello, reemplazamos los espacios de funciones \mathcal{H}_u y \mathcal{H}_w por subespacios de dimensión finita \mathcal{H}_u^h y \mathcal{H}_w^h , y las funciones de

prueba \mathbf{u} y las funciones de test \mathbf{w} por sus discretizaciones respectivas \mathbf{u}^h y \mathbf{w}^h en estos espacios. Si \mathbf{u}^p es una función que satisface las condiciones de contorno esenciales, y las bases de funciones $\{\phi_i(\mathbf{r}^o)\}$ y $\{w_j(\mathbf{r}^o)\}$ verifican las correspondientes condiciones de contorno homogéneas, podemos escribir^{7,8}

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o) = \mathbf{u}^p(\mathbf{r}^o) + \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\alpha}_i, \quad \Phi_i(\mathbf{r}^o) = \phi_i(\mathbf{r}^o) \mathbf{I}_3, \quad (4)$$

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{r}^o) = \sum_{j=1}^N \mathbf{W}_j(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\beta}_j, \quad \mathbf{W}_j(\mathbf{r}^o) = w_j(\mathbf{r}^o) \mathbf{I}_3. \quad (5)$$

En el Método de los Elementos Finitos la incógnita $\boldsymbol{\alpha}_i$ es el vector de desplazamientos del nodo i -ésimo. Además, el dominio Ω^o se discretiza de forma que $\bar{\Omega}^o = \bigcup_{e=1}^{nelem} \bar{E}_e$, siendo E_e cada uno de los elementos utilizados en la discretización. Por otro lado, en mecánica de sólidos es habitual emplear el método de Galerkin, que consiste en utilizar como base de las funciones de test la misma base de las funciones de prueba, es decir $w_j(\mathbf{r}^o) = \phi_j(\mathbf{r}^o)$. Por tanto, el modelo numérico de cálculo de estructuras se formulará en general en los siguientes términos:

$$\begin{aligned} & \text{Hallar } \boldsymbol{\alpha} = \{\boldsymbol{\alpha}_i\}, \quad i = 1, \dots, N \\ & \text{tal que } \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_{ji} \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{f}_j, \quad j = 1, \dots, N \\ & \text{siendo } \mathbf{K}_{ji} = a(\Phi_j, \Phi_i), \\ & \quad \mathbf{f}_j = (\Phi_j, \mathbf{b})_{\Omega^o} + (\Phi_j, \mathbf{g})_{\Gamma_g} - a(\Phi_j, \mathbf{u}^p). \end{aligned} \quad (6)$$

Habitualmente el cálculo se realiza elemento a elemento, de forma que

$$\mathbf{K}_{ji} = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{K}_{ji}^e, \quad \mathbf{f}_j = \iint_{\Gamma_g^o} \Phi_j^T \mathbf{g} \, d\Gamma + \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{f}_j^e, \quad (7)$$

siendo las contribuciones elementales

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji}^e &= \iiint_{E_e} \mathbf{B}_j^T \mathbf{D} \mathbf{B}_i \, d\Omega, \\ \mathbf{f}_j^e &= \iiint_{E_e} (\Phi_j^T \mathbf{b} - \mathbf{B}_j^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u}^p) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (8)$$

Una vez hallada la solución $\boldsymbol{\alpha}$ del problema (6) es posible calcular en cualquier punto $\mathbf{r}^o \in \Omega^o$ las aproximaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o) &= \mathbf{u}^p(\mathbf{r}^o) + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Phi}_i(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\alpha}_i, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o) &= \mathbf{L}\mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o), \quad \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}^o) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o). \end{aligned} \quad (9)$$

3 FORMULACIÓN MPRT

Sea ρ_e la densidad relativa del elemento e -ésimo, que se supone constante dentro del elemento, y sea $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_e\}$ ($e = 1, \dots, nelem$) el vector de densidades relativas, que constituirán las variables de diseño del problema de optimización topológica. Para valores dados de las densidades relativas de cada elemento, el problema de cálculo estructural que hay que resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Hallar } \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho}) \\ &\text{tal que } \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_{ji}(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_j(\boldsymbol{\rho}), \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (10)$$

En este caso el cálculo también se realiza por elementos, de forma que

$$\mathbf{K}_{ji}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{K}_{ji}^e(\rho_e), \quad \mathbf{f}_j(\boldsymbol{\rho}) = \iint_{\Gamma_j^o} \boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{g} \, d\Gamma + \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{f}_j^e(\rho_e), \quad (11)$$

siendo las contribuciones elementales

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji}^e(\rho_e) &= \iiint_{E_e} \mathbf{B}_j^T \mathbf{D} \mathbf{B}_i \rho_e \, d\Omega, \\ \mathbf{f}_j^e(\rho_e) &= \iiint_{E_e} (\boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{b} - \mathbf{B}_j^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u}^p \rho_e) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Obviamente, una vez hallada la solución $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$ del problema (10) es posible calcular en cualquier punto $\mathbf{r}^o \in \Omega^o$ las aproximaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{u}^p(\mathbf{r}^o) + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\Phi}_i(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\rho}), \\ \boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{L}\mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}), \quad \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}). \end{aligned} \quad (13)$$

Comparando (9) con (13) se observa que los desplazamientos, deformaciones y tensiones se calculan en esencia de la manera habitual. Por tanto, para utilizar un modelo numérico de análisis estructural en un sistema de optimización topológica basta con modificar el cálculo de las contribuciones (12).

Siendo γ_{mat} la densidad del material, definimos la función objetivo

$$F(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\Omega} \rho^{\frac{1}{p}} \gamma_{mat} d\Omega = \sum_{e=1}^{nelem} (\rho_e)^{\frac{1}{p}} \int_{E_e} \gamma_{mat} d\Omega \quad (14)$$

en la que valores del parámetro p distintos de la unidad permiten primar la compacidad del material ($p > 1$) o su porosidad ($p < 1$). En estos términos, el problema de optimización topológica se reduce a

$$\begin{aligned} \text{Hallar} \quad & \boldsymbol{\rho} = \{\rho_e\}, & e = 1, \dots, nelem \\ \text{que minimiza} \quad & F(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{verificando} \quad & g_j(\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho})) \leq 0, & j = 1, \dots, m \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1, & e = 1, \dots, nelem \end{aligned} \quad (15)$$

donde los \mathbf{r}_j^o son los puntos en los que se aplican las restricciones en tensión, y las tensiones $\boldsymbol{\sigma}^h$ se calculan mediante el modelo numérico propuesto. Se limita inferiormente el valor de la densidad relativa con el fin de impedir la eliminación total del material, lo que podría producir la singularidad de la matriz de coeficientes del problema. Obviamente, se pueden introducir restricciones sobre el valor de los desplazamientos de forma similar.

La implementación de esta formulación se ha realizado utilizando una metodología de tipo general⁵ y las técnicas de análisis de sensibilidad⁶ previamente desarrolladas por los autores. Como algoritmo de programación matemática se ha utilizado un método de programación lineal secuencial con line-search⁹ también desarrollado por los autores. En este caso cabe destacar que la optimización topológica se realiza de forma muy similar a la optimización de dimensiones, ya que las variables de diseño no modifican la forma de los elementos. Además, las modificaciones que ha sido necesario introducir en el módulo de cálculo han sido mínimas, y tan sólo ha sido necesario desarrollar el módulo de análisis de sensibilidad respecto a la densidad relativa, lo que no reviste especial dificultad.

4 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Las figuras 1 y 2 muestran los resultados obtenidos al optimizar una estructura biapoyada con movimientos horizontales coartados y no coartados (respectivamente) y con diferentes relaciones canto/luz. El problema es bidimensional, pero se han representado los resultados en tres dimensiones de forma que la densidad relativa de cada elemento se interpreta como el espesor⁴ de la pieza. Como puede observarse, las soluciones obtenidas parecen ser correctas a pesar de que no son asimilables a estructuras de barras. De hecho, se aproximan más a lo que sugiere la intuición ingenieril que los diseños tipo estructura articulada que proporcionan las formulaciones de máxima rigidez.

5 CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión (MPRT) para la optimización topológica de estructuras. La formulación se ha construido a partir de un modelo de elementos finitos para problemas de elasticidad lineal con pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones, introduciendo las correcciones mínimas que permiten su utilización como módulo de análisis en un sistema de optimización topológica.

Esta formulación conduce a problemas de optimización más complicados y con mayores requerimientos computacionales que las formulaciones de máxima rigidez, ya que en la práctica es necesario tener en cuenta un elevado número de restricciones altamente no lineales con el fin de limitar tensiones y desplazamientos. A cambio, el planteamiento tiene un sentido físico más claro y permite considerar múltiples estados de carga y restricciones de tipo general, y la función objetivo es sencilla en general.

La formulación se ha implementado en un sistema de optimización topológica con el que se han resuelto varios ejemplos de aplicación. Se ha comprobado que no se requieren técnicas de estabilización para producir resultados aceptables. Las soluciones obtenidas parecen ser correctas, no son necesariamente asimilables a estructuras de barras y se aproximan más a lo que sugiere la intuición ingenieril que los diseños tipo estructura articulada que proporcionan normalmente las formulaciones de máxima rigidez.

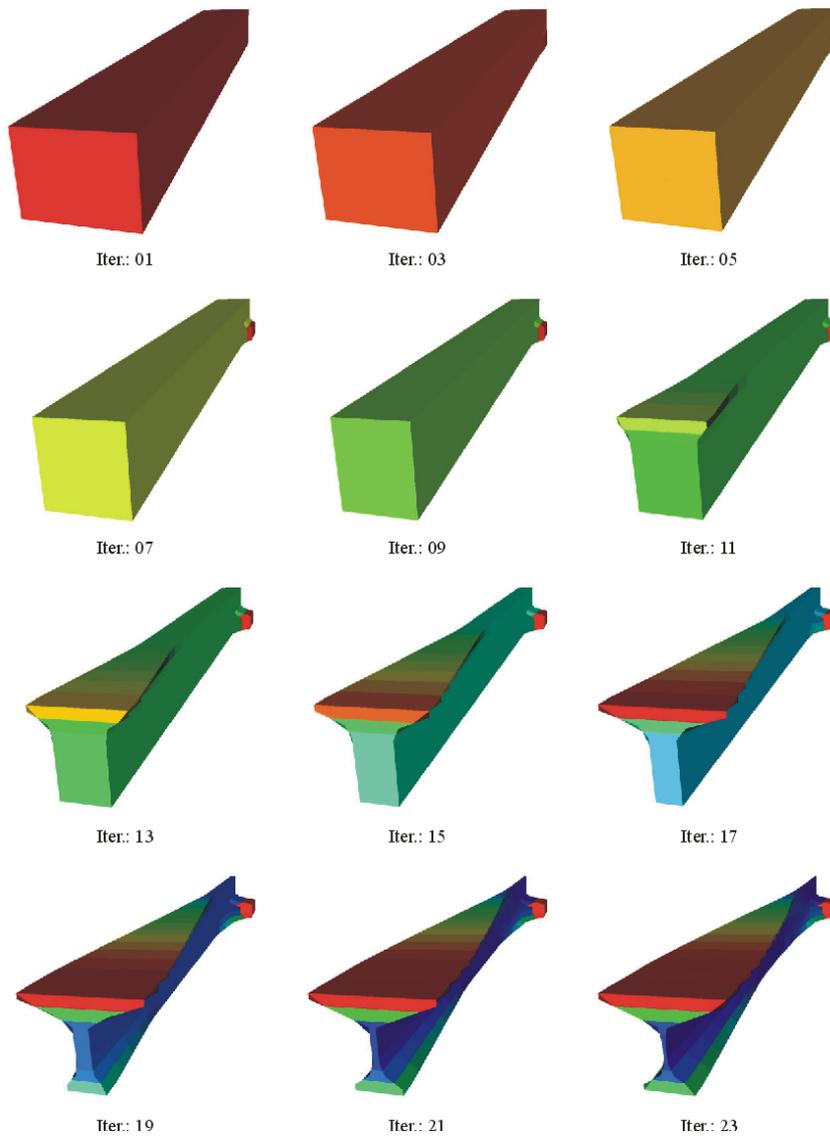


Figura 1: Optimización topológica de estructura biapoyada con movimientos horizontales coartados y pequeña relación canto/luz. Carga puntual en el centro del borde superior. Formulación de mínimo peso con restricciones en tensión. (Nota: Se representa la mitad de la estructura para que pueda apreciarse la forma de la sección central en primer plano.)

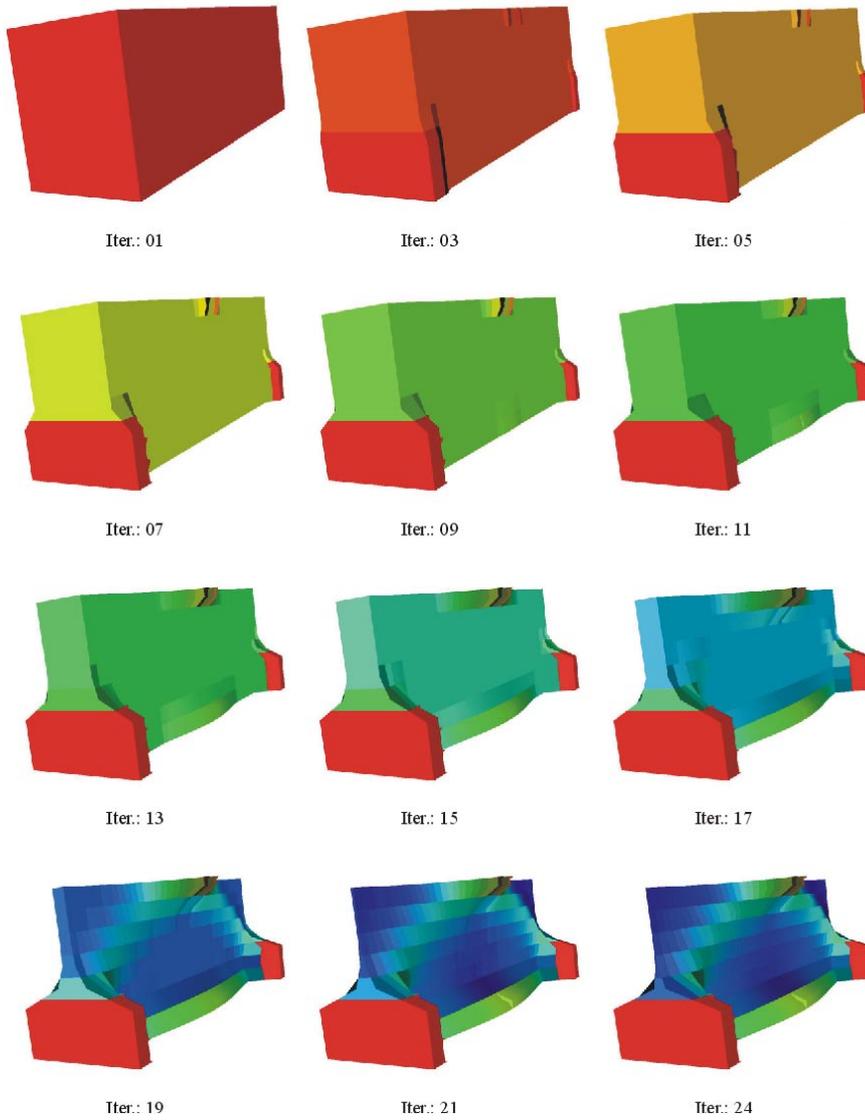


Figura 2: Optimización topológica de estructura biapoyada con movimientos horizontales no coartados y gran relación canto/luz. Carga puntual en el centro del borde superior. Formulación de mínimo peso con restricciones en tensión. (Notas: No se optimiza la zona de los apoyos; no se permite la total eliminación del material.)

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la SGPICT del Ministerio de Ciencia y Tecnología del Gobierno de España (Proyecto TIC-98-0290), por la SXID de la Xunta de Galicia (Proyecto PGIDT-99MAR11801) y por la Universidad de La Coruña.

REFERENCIAS

- [1] M. P. Bendsøe y N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 71, 197–224, 1988.
- [2] M. P. Bendsøe. *Optimization of structural topology, shape, and material*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1995.
- [3] M. P. Bendsøe. Variable-topology optimization: status and challenges. *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics ECCM'99*, W. Wunderlich (Ed.), TUM, Munich, 1999.
- [4] I. Muiños. *Optimización Topológica de Estructuras: Una Formulación de Elementos Finitos para la Minimización del Peso con Restricciones en Tensión*. Proyecto Técnico, ETSICCP, Universidad de La Coruña, 2001.
- [5] F. Navarrina y M. Casteleiro. A general methodological analysis for optimum design. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, 31, 85–111, 1991.
- [6] F. Navarrina, S. López, I. Colominas, E. Bendito y M. Casteleiro. High order shape design sensitivity: A unified approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 188, 681–696, 2000.
- [7] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publishers, New York, 2000.
- [8] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, New York, 1990.
- [9] F. Navarrina, R. Tarrech, I. Colominas, G. Mosqueira, J. Gómez-Calviño y M. Casteleiro. An efficient MP algorithm for structural shape optimization problems. *Computer Aided Optimum Design of Structures VII* (ISBN: 1-85312-868-6), S. Hernández y C.A. Brebbia (Ed.), WIT Press, Southampton, 247–256, 2001.