

Preprint of the paper

"Resolución Numérica de Problemas de Potencial en Aplicaciones de Ingeniería mediante Métodos sin Malla"

I. Colominas, M. Chao, G. Mosqueira, F. Navarrina, M. Casteleiro (1999)

En "Métodos Numéricos en Ingeniería" (en CD-ROM), Parte XIV: "Métodos sin malla".

R. Abascal, J. Domínguez, G. Bugada (Editores); Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería CIMNE, Barcelona. (ISBN: 84-89925-45-3)

<http://caminos.udc.es/gmni>

RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS DE POTENCIAL EN APLICACIONES DE INGENIERÍA MEDIANTE MÉTODOS SIN MALLA

Ignasi Colominas, Mar Chao, Gonzalo Mosqueira, Fermín Navarrina y
Manuel Casteleiro

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de La Coruña
Campus de Elviña. 15192 La Coruña, España
e-mail: colominas@iccp.udc.es, página web: <http://www.udc.es/caminos/dmmr/>

Palabras clave: Métodos sin Malla, Teoría de Potencial, Electromagnetismo

Resumen. *El proceso de discretización del dominio y la consiguiente generación de una malla de elementos es el punto de partida, pero también una de las mayores dificultades, de la aplicación de los métodos de elementos finitos, diferencias finitas o elementos de contorno, especialmente en aquellos casos en que la geometría del problema es altamente complicada o cambia de forma continua. Con el fin de hacer frente a este problema, en los últimos años se han propuesto diversos métodos numéricos, los métodos “sin malla”, que tratan de plantear la aproximación a la solución en función de puntos del dominio sin necesidad de generar previamente una malla de elementos. En este artículo se presenta una técnica sin malla basada en un método de mínimos cuadrados “móviles” con una formulación de colocación puntual para la resolución de problemas de potencial en el ámbito de la ingeniería eléctrica.*

1 INTRODUCCIÓN

Los avances que han tenido lugar en los últimos años tanto en el estudio de nuevos métodos numéricos como en el desarrollo de lo que se denomina como “ciencias de la computación” han dado lugar a una notable expansión de la modelización numérica de muchos problemas en ingeniería. Así, desde el inicio de la década de los ochenta, las sustanciales mejoras conseguidas en los equipos informáticos (el incremento de su capacidad, el espectacular abaratamiento de costes, etc.) han puesto al alcance de las universidades, los centros de investigación y las empresas, medios de cálculo capaces de abordar el estudio y modelización de muchos problemas reales de aplicación práctica en la ingeniería.

No obstante han surgido, y así se recogen en la bibliografía, numerosos inconvenientes debidos al alto coste computacional que requiere la aplicación de métodos numéricos tales como los elementos finitos, volúmenes finitos, elementos de contorno o diferencias finitas en la resolución de determinados problemas de ingeniería, como por ejemplo, la simulación numérica en ciencia de materiales¹, los relacionados con el tratamiento de discontinuidades móviles en el dominio, los de impacto a altas velocidades², así como numerosos problemas en mecánica de fluidos^{3,4,5} y en electromagnetismo⁶. En la mayor parte de estos casos, el proceso de generación de una malla eficiente de elementos para la discretización del dominio se convierte en el problema principal, que en ocasiones requiere un esfuerzo computacional mayor que la misma resolución del problema.

Por este motivo, en los últimos años se han propuesto una serie de métodos numéricos en los que no se precisa propiamente una malla de elementos: los métodos “sin malla”. En general, el objetivo de estos métodos es la obtención de una solución aproximada en términos de la información en una serie de puntos del dominio, sin requerir una malla, ni consecuentemente una matriz de conectividad para llevar a cabo el ensamblaje de la matriz de coeficientes. Así, el dominio de solución está formado por un conjunto de puntos nodales, cada uno de los cuales tiene asociado un subdominio formado por los puntos más próximos. La aproximación a la solución en cada punto viene dada consecuentemente en función de los puntos de su subdominio, de modo que se garantice el carácter local de la aproximación.

Aunque los primeros métodos sin malla fueron desarrollados en la década de los setenta, los trabajos más importantes, tanto desde el punto de vista teórico como de aplicación, en el ámbito de la ingeniería y de la mecánica computacional han tenido lugar recientemente. Así, en 1992 se propuso el Método de Elementos Difusos⁷, basado en una interpolación por mínimos cuadrados ponderada, y en la que se emplea una malla auxiliar para plantear las ecuaciones discretizadas del problema en una formulación de tipo Galerkin. En esta misma línea de investigación, se desarrolló posteriormente⁸ el “método Libre de Elementos de Galerkin” (o *Element Free Galerkin Method*). En 1995, se propusieron otros métodos que combinan aproximaciones por mínimos cuadrados ponderadas y formulaciones de colocación puntual⁵, de modo que no se requiere ninguna malla auxiliar. Estos métodos permiten desarrollar formulaciones específicas según el

tipo de función de ponderación que se establezca⁹.

En este artículo se presenta la aplicación de métodos de mínimos cuadrados móviles con formulaciones de colocación puntual para la resolución de problemas de potencial en aplicaciones en la ingeniería.

2 APROXIMACIONES DE MÍNIMOS CUADRADOS MÓVILES

2.1 Fundamentación teórica

La idea básica de las aproximaciones por mínimos cuadrados móviles consiste en una interpolación local por mínimos cuadrados ponderados cuyo rango de validez es el subdominio de cada punto nodal formado por los n puntos más próximos a éste (subdominio Ω_k). El carácter local de la aproximación se garantiza mediante la introducción de una función de ponderación que toma su valor máximo en el punto nodal y es nula fuera del subdominio del punto⁵.

Con el fin de que la aproximación sea válida en todos los puntos del dominio, el conjunto de los subdominios Ω_k de los puntos nodales debe cubrir todo el dominio. Así mismo los subdominios contiguos deben superponerse, de modo que en las zonas de intersección existan suficientes puntos nodales para garantizar la convergencia del método¹⁰. La determinación de los puntos que forman el subdominio de un punto nodal dado se puede determinar mediante una técnica efectiva basada en el criterio de los “cuatro cuadrantes”^{5,9}.

Sea Ω_k el dominio de interpolación de una función $u(\mathbf{x})$. Una aproximación $\hat{u}(\mathbf{x})$ a esta función en Ω_k se puede escribir en la forma

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})\alpha_i = \mathbf{p}^t(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha} \quad (1)$$

siendo $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m]^t$ un conjunto de coeficientes a determinar y $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ una base de funciones de interpolación, generalmente monomios cuyo mayor grado es m . Estas funciones de interpolación se pueden normalizar dentro de cada subdominio Ω_k dividiendo por la distancia d entre un punto nodal i y el punto más alejado de su subdominio, de modo que se pueden definir las coordenadas normalizadas ($\boldsymbol{\xi} \equiv [\xi, \eta, \zeta]$),

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = \left[\frac{x - x_i}{d}, \frac{y - y_i}{d}, \frac{z - z_i}{d} \right] \quad (2)$$

Por otra parte, la función $u(\mathbf{x})$ puede ser aproximada en los n puntos del subdominio Ω_k , de modo que

$$\mathbf{u}^h = \begin{pmatrix} u_1^h \\ \vdots \\ u_n^h \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1^t \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^t \end{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{S}\boldsymbol{\alpha} \quad (3)$$

siendo u_j^h los valores de la función incógnita en los puntos nodales de Ω_k ($u_j^h = u(\mathbf{x}_j)$, $j = 1, \dots, n$), $\hat{u}_j = \hat{u}(\mathbf{x}_j)$ sus aproximaciones y \mathbf{p}_j contiene las funciones de interpolación normalizadas evaluadas en $\boldsymbol{\xi}_j$ ($\boldsymbol{\xi}_j = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}_j)$). En la tabla I se resumen las funciones empleadas en una, dos y tres dimensiones para distintos valores de m correspondientes a interpolaciones constantes, lineales y cuadráticas.

Tabla I— Funciones de interpolación constantes, lineales y cuadráticas

m	1D	2D	3D
1	$\mathbf{p}^t = [1]$	$\mathbf{p}^t = [1]$	$\mathbf{p}^t = [1]$
2	$\mathbf{p}^t = [1, \xi]$	—	—
3	$\mathbf{p}^t = [1, \xi, \xi^2]$	$\mathbf{p}^t = [1, \xi, \eta]$	—
4	—	—	$\mathbf{p}^t = [1, \xi, \eta, \zeta]$
6	—	$\mathbf{p}^t = [1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2]$	—
10	—	—	$\mathbf{p}^t = [1, \xi, \eta, \zeta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \eta\zeta, \zeta^2, \zeta\xi]$

En general, el número n de puntos que forman el subdominio es mayor que el orden m de los polinomios de las funciones de interpolación, por lo que la matriz \mathbf{S} es rectangular, y la aproximación no puede verificarse en todos los puntos nodales.

No obstante, los valores aproximados $\hat{u}(\mathbf{x})$ se pueden determinar minimizando la suma ponderada del cuadrado de las diferencias entre los valores exactos u_j^h y los valores aproximados $\hat{u}(\mathbf{x}_j)$ en cada punto nodal \mathbf{x}_j del dominio Ω_k ^{5,9}, es decir, minimizando el siguiente funcional con respecto a los parámetros $\boldsymbol{\alpha}$:

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \omega_k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x})(u_j^h - \hat{u}(\mathbf{x}_j))^2 \quad (4)$$

donde $\omega_k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x})$ es la función de ponderación evaluada en el punto \mathbf{x}_j y su forma y apuntamiento depende de su posición respecto del punto arbitrario \mathbf{x} , cuyo subdominio

es Ω_k . Generalmente, esta función de ponderación se selecciona de modo tal que valga la unidad en el punto \mathbf{x} y se anule fuera de Ω_k . El desarrollo completo de la minimización⁹ del funcional (4) conduce a

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^h \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{P}^t \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}\mathbf{W}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

siendo \mathbf{P} y $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ las matrices auxiliares:

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}_1) \quad \dots \quad \mathbf{p}(\boldsymbol{\xi}_n)] \quad \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{diag} [\omega_k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x})], \quad j = 1, \dots, n \quad (6)$$

La sustitución de (5) en (1) permite obtener la expresión de la función aproximada $\hat{u}(\mathbf{x})$ en el dominio Ω_k :

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^t(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}^h, \quad (7)$$

a partir de la cual podemos definir unas funciones de forma $\mathbf{N}^t(\mathbf{x})$ en Ω_k , análogas a las que suelen definirse en las aproximaciones por elementos finitos ($\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^t(\mathbf{x})\mathbf{u}^h$), como

$$\mathbf{N}^t(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^t(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}))\mathbf{C}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (8)$$

Es importante reseñar que al tratarse de una formulación de mínimos cuadrados, los valores de la función aproximada no coinciden con los valores de la función en los valores nodales $\hat{u}(\mathbf{x}_j) \neq u_j^h$. Por otra parte, en el caso particular de que el número de puntos del subdominio (n) coincida con el grado del polinomio de las funciones interpolantes (m), esta formulación coincide con la aproximación del método de elementos finitos y la función de ponderación no interviene⁵.

2.2 Funciones de ponderación

Las funciones de ponderación juegan un papel importante en el desarrollo de estos métodos sin malla. Según sea su definición se pueden obtener distintas formulaciones de mínimos cuadrados ponderadas⁵. Así, se habla de funciones de ponderación “fijas” en el subdominio de interpolación Ω_j de un punto nodal \mathbf{x}_j , si

$$\begin{aligned} \omega_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j) &= 1 \\ \omega_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) &\neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_j \\ \omega_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \notin \Omega_j, \end{aligned} \quad (9)$$

es decir se define una misma función de ponderación para cada subdominio Ω_j (método DLS o “*diffusse least square method*”), y se habla de funciones de ponderación “móviles” cuando la función de ponderación depende del punto de interpolación en el que se quiere evaluar la aproximación y toma el valor máximo en dicho punto:

$$\begin{aligned} \omega_k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k) &= 1 \\ \omega_k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) &\neq 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_k \\ \omega_k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) &= 0, \quad \mathbf{x} \notin \Omega_k, \end{aligned} \quad (10)$$

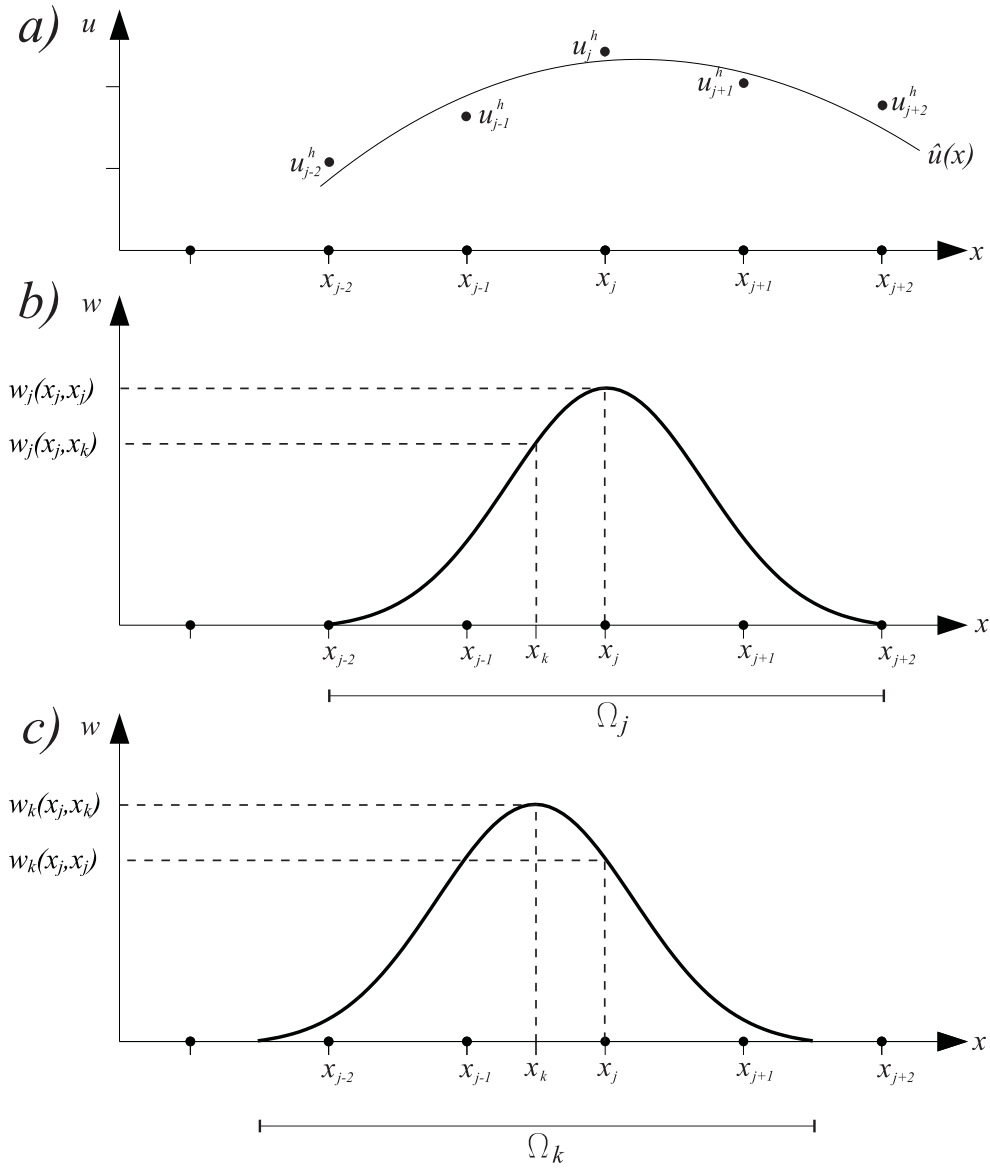


Fig. 1.—Representación cualitativa del ajuste de una función por mínimos cuadrados ponderados: a) interpolación de los puntos nodales, b) función de ponderación “fija” (Ω_j indica el subdominio del punto nodal \mathbf{x}_j), y c) función de ponderación “móvil” (Ω_k es el subdominio de un punto arbitrario \mathbf{x}_k).

siendo Ω_k el subdominio del punto arbitrario \mathbf{x}_k ^{5,6} (métodos MLS o “*moving least square methods*”). En este caso, la definición de funciones de ponderación distintas para cada punto de interpolación es sumamente difícil. Por este motivo es conveniente construir las funciones de ponderación asociadas a los puntos nodales \mathbf{x}_j , de modo que $\omega_k(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$ se sustituye por $\omega_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k)$. En los ejemplos que se presentan en este artículo se han empleado funciones de ponderación de tipo gaussiano^{8,9}, en las cuales

$\omega_j(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_k) = \phi_j(d)$, siendo d la distancia entre un punto nodal \mathbf{x}_j y el punto arbitrario \mathbf{x}_k ($d = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|$), y la función $\phi_j(d)$ es de la forma

$$\phi_j(d) = \frac{e^{-(\frac{d}{c})^2} - e^{-(\frac{d_{max}}{c})^2}}{1 - e^{-(\frac{d_{max}}{c})^2}} \quad (11)$$

donde d_{max} es el dominio de influencia de la función de ponderación en Ω_k y c es un parámetro que define la forma de esta función⁹. En la bibliografía^{5,8,9,11} se pueden encontrar distintas variantes para la determinación de estos valores.

2.3 Derivación de las funciones de forma

Como se ha comentado, en las formulaciones de mínimos cuadrados “móviles” las funciones de ponderación dependen del punto de interpolación \mathbf{x} . Ello implica que el cálculo de las derivadas de las funciones de forma (8) requiere también derivar la matriz $\mathbf{C}(\mathbf{x})$. Como ejemplo, para problemas en una dimensión, las primeras y segundas derivadas de las funciones de forma son:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}^t(x)}{dx} &= \frac{d\mathbf{p}^t(\xi(x))}{dx} \mathbf{C}(x) + \mathbf{p}^t(\xi(x)) \frac{d\mathbf{C}(x)}{dx} \\ \frac{d^2\mathbf{N}^t(x)}{dx^2} &= \frac{d^2\mathbf{p}^t(\xi(x))}{dx^2} \mathbf{C}(x) + \mathbf{p}^t(\xi(x)) \frac{d^2\mathbf{C}(x)}{dx^2} + 2 \frac{d\mathbf{p}^t(\xi(x))}{dx} \frac{d\mathbf{C}(x)}{dx} \end{aligned} \quad (12)$$

siendo

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{C}(x)}{dx} &= \mathbf{C}(x) \mathbf{W}^{-1}(x) \frac{d\mathbf{W}(x)}{dx} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^t \mathbf{C}(x)) \\ \frac{d^2\mathbf{C}(x)}{dx^2} &= -2\mathbf{C}(x) \mathbf{W}^{-1}(x) \frac{d\mathbf{W}(x)}{dx} \mathbf{P}^t \frac{d\mathbf{C}(x)}{dx} + \mathbf{C}(x) \mathbf{W}^{-1}(x) \frac{d^2\mathbf{W}(x)}{dx^2} (\mathbf{I} - \mathbf{P}^t \mathbf{C}(x)) \end{aligned} \quad (13)$$

donde las matrices \mathbf{P} , $\mathbf{W}(x)$ y $\mathbf{C}(x)$ vienen dadas por (5), (6) y (8), y \mathbf{I} es la matriz identidad (las expresiones de las derivadas de orden superior y para problemas en dos y tres dimensiones se obtienen de modo análogo).

En el caso de las formulaciones de mínimos cuadrados “fijas” en las que las funciones de ponderación no dependen del punto de interpolación, la matriz \mathbf{C} es independiente de \mathbf{x} y el cálculo de las derivadas de las funciones de forma a partir de (12) se simplifica notablemente:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}^t(x)}{dx} &= \frac{d\mathbf{p}^t(\xi(x))}{dx} \mathbf{C} \\ \frac{d^2\mathbf{N}^t(x)}{dx^2} &= \frac{d^2\mathbf{p}^t(\xi(x))}{dx^2} \mathbf{C} \end{aligned} \quad (14)$$

De hecho, algunos autores⁷ proponen el empleo de las expresiones (14) como aproximaciones a las derivadas de las funciones de forma en las formulaciones de mínimos cuadrados “móviles” debido a su considerablemente menor coste computacional.

3 PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES DISCRETIZADAS DE UN PROBLEMA DE CONTORNO

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos operadores diferenciales, Ω el dominio de solución del problema y sea Γ su contorno ($\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$). En estos términos, podemos escribir el siguiente problema de contorno escalar:

$$\mathcal{A}(u) = b \quad \text{en } \Omega \quad (15)$$

con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u) &= t & \text{en } \Gamma_t \\ u - u_p &= 0 & \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \quad (16)$$

donde u es la función solución, b y t representan las acciones que actúan sobre el dominio Ω y sobre su contorno Γ_t , y u_p son los valores prescritos de u en el contorno Γ_u .

La aplicación del método de residuos ponderados permite obtener una forma variacional de este problema en términos de la aproximación \hat{u} a la función incógnita u , en la forma

$$\int_{\Omega} \Phi_j [\mathcal{A}(\hat{u}) - b] d\Omega + \int_{\Gamma_t} \hat{\Phi}_j [\mathcal{B}(\hat{u}) - t] d\Gamma + \int_{\Gamma_u} \hat{\hat{\Phi}}_j [\hat{u} - u_p] d\Gamma = 0, \quad j = 1, \dots, n_p \quad (17)$$

que debe satisfacerse para todos los miembros del conjunto de las n_p funciones Φ_j , $\hat{\Phi}_j$ y $\hat{\hat{\Phi}}_j$ de una determinada clase de funciones de test definidas en Ω , Γ_t y Γ_u ^{5,9}.

La selección de diferentes funciones de test en la forma variacional general permite la derivación de distintas formulaciones. Con el fin de obtener las máximas ventajas del carácter “sin malla” de la aproximación se propone adoptar una formulación de colocación puntual ($\Phi_j = \hat{\Phi}_j = \hat{\hat{\Phi}}_j = \delta_j$, donde δ_j es la delta de Dirac)⁵. Otros autores^{1,3,8,11,12,13} han propuesto formulaciones alternativas basadas en métodos integrales (por ejemplo esquemas de tipo Galerkin), que requieren no obstante el empleo de mallas auxiliares de elementos para evaluar los términos integrales resultantes. Con el esquema de colocación puntual, se obtienen las ecuaciones discretizadas

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}(\hat{u})]_j - b_j &= 0, & j = 1, \dots, n_p & \text{en } \Omega \\ [\mathcal{B}(\hat{u})]_j - t_j &= 0, & j = 1, \dots, n_p & \text{en } \Gamma_t \\ \hat{u}_j - u_p &= 0, & j = 1, \dots, n_p & \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \quad (18)$$

Ahora, dado un conjunto de n_p funciones de prueba $\{N_i\}$ definidas en Ω , la aproximación \hat{u} a la solución u se puede discretizar en la forma

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^{n_p} N_i u_i^h = \mathbf{N}^t \mathbf{u}^h, \quad (19)$$

siendo n_p el número total de puntos nodales seleccionados del dominio de solución del problema. Si las funciones \mathbf{N}^t se construyen según la formulación de mínimos cuadrados “móviles” presentada —ecuación (8)—, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (20)$$

cuya matriz de coeficientes se obtiene a partir exclusivamente de la información de los n_p puntos nodales. La matriz \mathbf{K} ($K_{ji} = [\mathcal{A}(N_i)]_j + [\mathcal{B}(N_i)]_j$) es una matriz vacía debido al carácter local de la aproximación, no necesariamente simétrica, y el vector \mathbf{f} se obtiene de las contribuciones de los términos b , t y los valores prescritos u_p . El vector \mathbf{u}^h contiene los valores de la función incógnita en los puntos nodales.

La validación de esta formulación de mínimos cuadrados ponderados con un esquema de Colocación Puntual ha sido realizada con diferentes problemas de test numéricos^{9,14}, y ha sido aplicada con resultados prometedores a la solución de problemas en mecánica de fluidos⁵. En el siguiente apartado presentaremos la aplicación de este tipo de formulaciones a la resolución de problemas de potencial con aplicaciones de interés en la ingeniería, concretamente en el ámbito de la ingeniería eléctrica.

4 APLICACIÓN A UN PROBLEMA DE POTENCIAL

Un sistema seguro de tierras de una instalación eléctrica debe garantizar la integridad de los equipos y la continuidad del suministro de electricidad bajo condiciones de fallo, de modo que las corrientes de pérdida producidas se disipen de forma efectiva en el terreno, y asegurar que las personas que trabajan o circulan por las inmediaciones de una instalación puesta a tierra no estén expuestas a descargas eléctricas peligrosas. Para lograr estos dos objetivos, la resistencia equivalente del sistema de tierras debe ser lo suficientemente baja para garantizar que la corriente eléctrica se disipa en el terreno a través de la red de tierras, en tanto que las máximas diferencias de potencial entre puntos próximos de la superficie del terreno deben mantenerse por debajo de ciertos límites (tensiones de paso, malla y contacto)^{15,16}.

El fenómeno físico que subyace a la disipación de corrientes eléctricas en un terreno se puede estudiar en el marco de la Teoría del Electromagnetismo de Maxwell. En este caso, si se restringe el análisis a la obtención de la respuesta electrocinética en estado estacionario, y se desprecia la resistencia interna de los electrodos de tierra, el problema tridimensional asociado a la derivación de corriente eléctrica en un suelo viene dada por

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} &= 0, & \boldsymbol{\sigma} &= -\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}\operatorname{grad}V \text{ en } E; \\ \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E &= 0 \text{ en } \Gamma_E; & V &= V_\Gamma \text{ en } \Gamma; & V &\longrightarrow 0, \text{ si } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (21)$$

siendo E denota el terreno, $\underline{\underline{\boldsymbol{\gamma}}}$ su tensor de conductividades, Γ_E la superficie del terreno, \mathbf{n}_E su versor normal exterior unitario y Γ la superficie de los electrodos^{16,17}. Así, cuando el electrodo adquiere un nivel de potencial V_Γ (“nivel de potencial de tierra”, o

Ground Potential Rise, GPR) respecto de un punto remoto, la solución a este problema proporciona el potencial V y la densidad de corriente $\boldsymbol{\sigma}$ en un punto arbitrario \boldsymbol{x} . Por otra parte, dado que V y $\boldsymbol{\sigma}$ son proporcionales a V_Γ , se puede adoptar la condición de contorno unitaria $V_\Gamma = 1$ sin pérdida alguna de generalidad¹⁷.

En los casos en que la conductividad del terreno varíe poco en los alrededores del sistema de tierras puede asumirse la hipótesis de terreno isótropo y homogéneo¹⁵, por lo que el tensor $\underline{\boldsymbol{\gamma}}$ se suele sustituir por una conductividad escalar aparente γ . Es obvio que modelos que contemplen todas las variaciones de la conductividad del terreno serían inabordables, tanto desde el punto de vista técnico como económico. Una aproximación usual en la práctica cuando la conductividad no es uniforme con la profundidad consiste en asumir que el terreno está estratificado en un número de capas horizontales con distinta conductividad cada una de ellas. Así, en la práctica, es ampliamente aceptado que un modelo de dos capas (tres a lo sumo) es suficiente para obtener diseños suficientemente seguros de un sistema de tierras¹⁵. En los modelos de terreno de dos capas, el tensor de conductividades $\underline{\boldsymbol{\gamma}}$ se sustituye en el estrato superior E_1 por una conductividad escalar aparente que se estima experimentalmente γ_1 , y en el estrato inferior E_2 por una conductividad γ_2 . Con este tipo de modelo, cuando el electrodo de tierra está enterrado en el estrato superior, el problema (21) se reduce al siguiente problema exterior de Neumann:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 &= 0 \quad \text{en } E_1, & \Delta V_2 &= 0 \quad \text{en } E_2; \\ \frac{dV_1}{dn} &= 0 \quad \text{en } \Gamma_E, & V_1 &= V_2 \quad \text{en } \Gamma_L, & \gamma_1 \frac{dV_1}{dn} &= \gamma_2 \frac{dV_2}{dn} \quad \text{en } \Gamma_L, \\ V_1 &= V_\Gamma \quad \text{en } \Gamma, & V_1 &\longrightarrow 0 \quad \text{y} \quad V_2 \longrightarrow 0 \quad \text{si } |\boldsymbol{x}| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (22)$$

donde E_1 y E_2 son los estratos superior e inferior, Γ_L es la interfase entre ambos, γ_1 y γ_2 son sus conductividades, y V_1 y V_2 son los potenciales en ambas capas¹⁸.

En los últimos años, los autores hemos propuesto diversas formulaciones numéricas basadas en el método de elementos de contorno para el análisis de sistemas de tierras de grandes instalaciones eléctricas tanto en el caso de modelos de terreno uniforme como en terrenos estratificados. Estas técnicas han supuesto un notable avance en el cálculo y diseño de este tipo de instalaciones al proporcionar un método efectivo y matemáticamente bien fundamentado para su análisis. Estas formulaciones han sido incorporadas a un sistema de CAD para puestas a tierra de subestaciones eléctricas, con el que se han calculado numerosas redes de tierra de instalaciones reales^{16,17,18}.

No obstante, la aplicación de estas técnicas basadas en el MEC en los casos de modelos de terreno estratificados en un número mayor de capas o modelos de suelo heterogéneos implican un considerable esfuerzo computacional. Por otra parte, la geometría específica de estos electrodos de tierra en la práctica (una malla de conductores cilíndricos de gran longitud, en comparación con su diámetro) hace prácticamente imposible el empleo de métodos numéricos estándar (elementos finitos o diferencias finitas), dado que la obtención de resultados suficientemente precisos requeriría un elevadísimo coste computacional por la discretización del dominio (el terreno). Por estos motivos, hemos

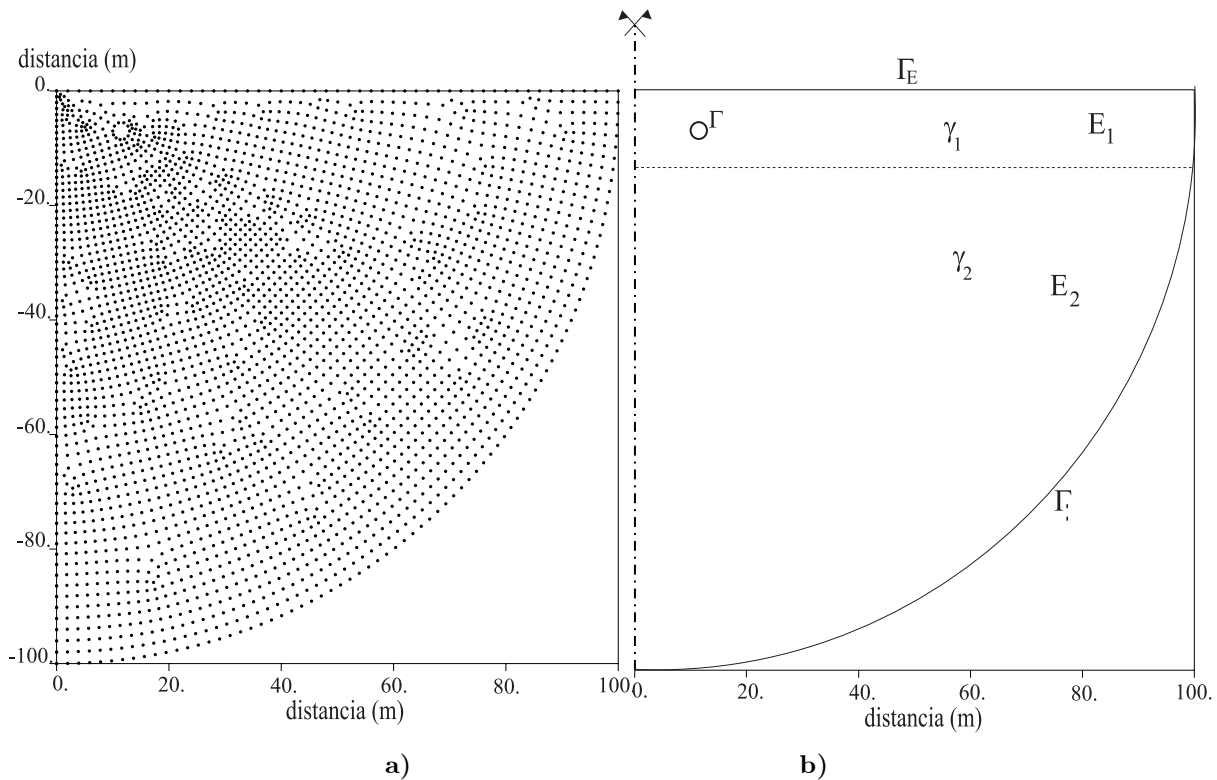


Fig. 2.—Electrodo toroidal enterrado a una profundidad de 7 m: a) distribución empleada de puntos nodales (3091 puntos), y b) esquema del dominio de solución del problema.

optado por investigar la aplicación de métodos numéricos “sin malla” para la solución de este tipo de problema de potencial.

El ejemplo que presentamos consiste en la resolución del problema (22) mediante una formulación de mínimos cuadrados ponderados con un esquema de Colocación Puntual aplicado a un electrodo toroidal enterrado horizontalmente a una profundidad de 7 m. El diámetro interior del toro es 20 m y el diámetro del electrodo es de 3 m. El terreno se considera estratificado en dos capas, en el que el espesor de la superior es 14 m., y la relación entre las conductividades es de 4 a 1 ($\gamma_2 = 4 \gamma_1$). Debido a la simetría de este problema, la solución se puede obtener mediante un modelo en 2D. Este ejemplo se ha resuelto con una distribución de 3019 puntos nodales obtenidos mediante el programa GEN4U¹⁹. Las funciones de interpolación empleadas son lineales y todos los subdominios contienen al menos cinco puntos.

La figura 2 muestra un esquema del dominio de solución del problema planteado y la distribución de puntos empleada en el análisis. En la figura 3 se muestran los resultados (líneas de isopotencial y distribución de potencial en el terreno alrededor del electrodo) obtenidos con la formulación de mínimos cuadrados ponderada en el caso de considerar el terreno formado por un único estrato de conductividad constante. En la figura 4 se

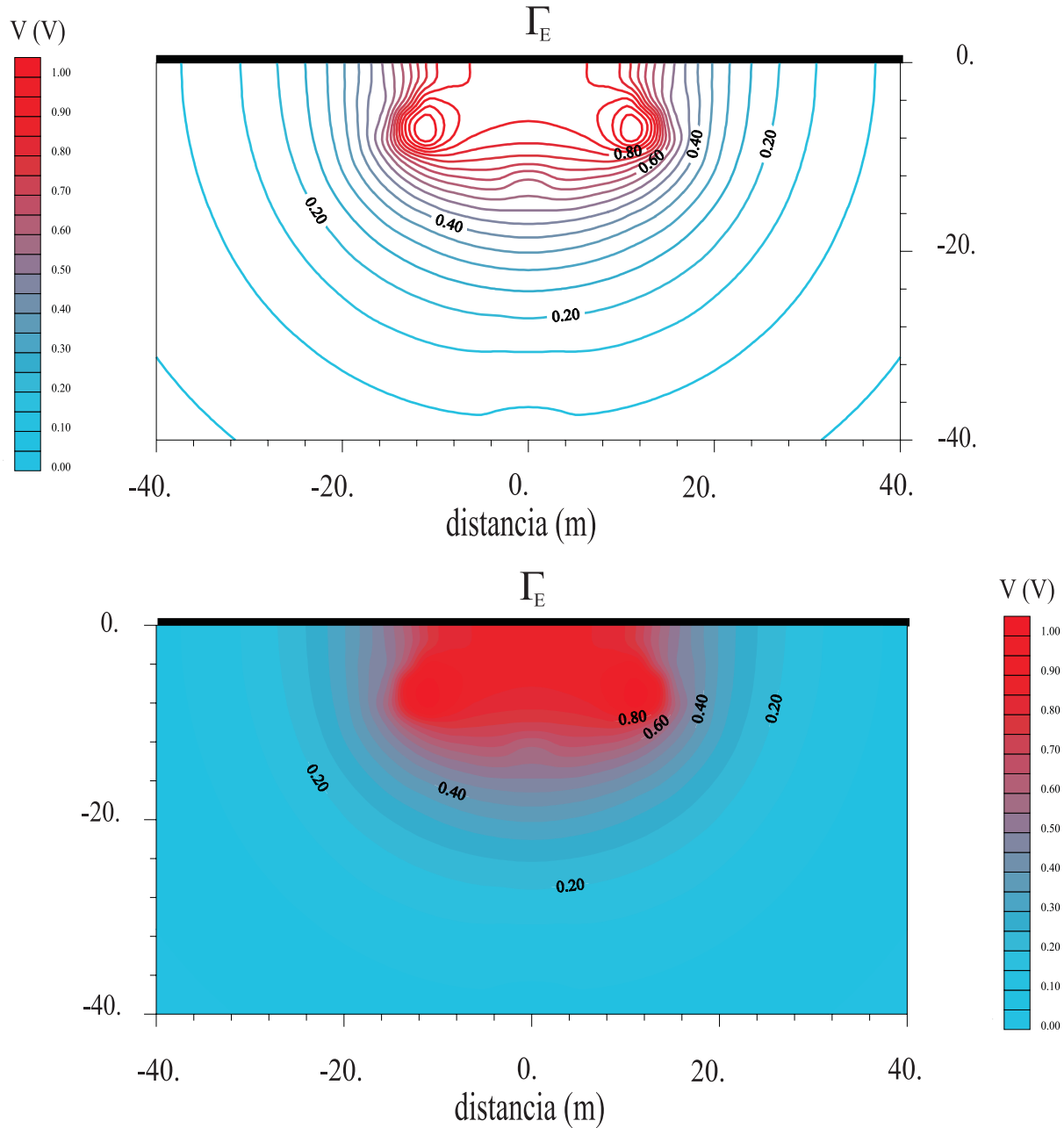


Fig. 3.—Electrodo toroidal enterrado a una profundidad de 7 m: líneas de isopotencial alrededor del electrodo en la hipótesis de terreno isótropo y homogéneo, y distribución de los niveles de potencial en el terreno.

muestran los resultados del análisis de un electrodo de tierra toroidal enterrado en un terreno estratificado en dos capas. Estos resultados concuerdan significativamente con los obtenidos tanto mediante un programa de elementos finitos como empleando una distribución de puntos muy densa. Así mismo, el empleo de funciones de interpolación

de orden superior (cuadráticas) permite obtener resultados de mayor precisión con un pequeño incremento del coste computacional.

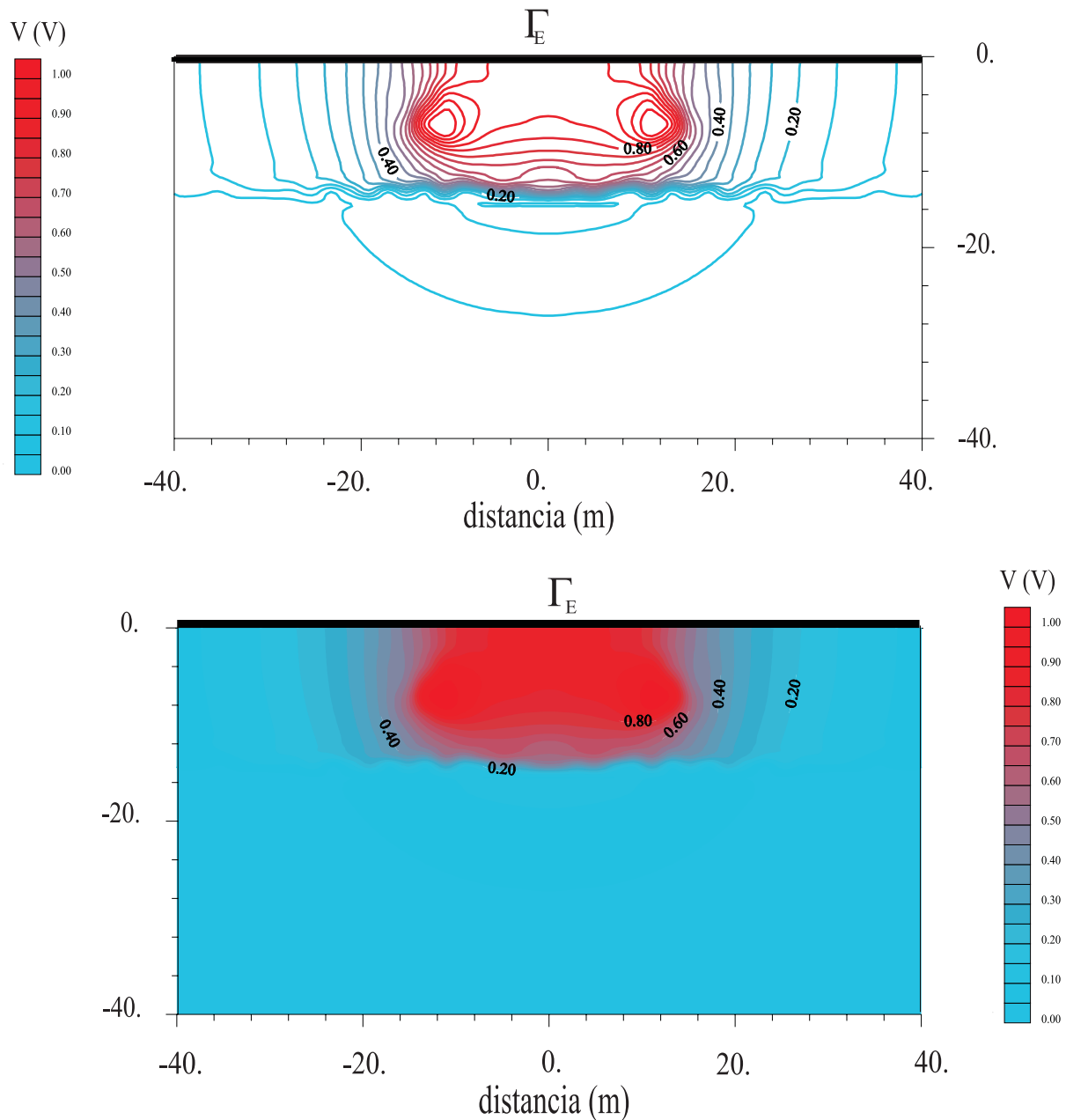


Fig. 4.—Electrodo toroidal enterrado a una profundidad de 7 m: líneas de isopotencial alrededor del electrodo considerando el terreno estratificado en dos capas ($\gamma_2 = 4 \gamma_1$), y distribución de los niveles de potencial en el terreno.

5 CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado la aplicación de una formulación de mínimos cuadrados ponderada con un esquema de Colocación Puntual a la resolución de un problema de potencial en el ámbito de la ingeniería eléctrica. A diferencia de otras formulaciones sin malla que requieren la evaluación de términos integrales, este método tiene la ventaja de no precisar ninguna malla auxiliar, por lo que es posible obtener la solución al problema de contorno planteado (en los ejemplos mostrados, el análisis de un electrodo de tierra en dos tipos diferentes de terreno) a partir de la información de un número finito de puntos del dominio.

Este tipo de técnicas numéricas puede representar un avance importante en el análisis computacional de muchos problemas en la ingeniería, en los que no es posible el empleo de métodos numéricos estándar, como elementos finitos o elementos de contorno, debido a los prohibitivos requerimientos computacionales necesarios en el proceso de discretización. Obviamente, tanto el estudio numérico en profundidad de estos métodos (fundamento matemática, convergencia, estabilidad, consistencia, etc.), como los relativos a sus aplicaciones prácticas están todavía en fase de desarrollo. Los resultados obtenidos hasta el momento en los ejemplos que se analizado con distintas distribuciones de puntos son prometedores, pudiéndose obtener resultados más precisos aumentando el grado de las funciones de interpolación o con distribuciones de puntos más densas, aumentando lógicamente el esfuerzo computacional necesario. En la actualidad se continúa trabajando, entre otros aspectos, en el desarrollo de funciones de enriquecimiento de las funciones de prueba²⁰ de la formulación sin malla para problemas de potencial, de modo que éstas incorporen la solución fundamental de la ecuación diferencial.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Subdirección General de Proyectos de Investigación Científica y Técnica (SGPICYT) del Ministerio de Educación y Cultura (proyecto 1FD97-0108), con cofinanciación de fondos FEDER y de la empresa Unión Fenosa Ingeniería S.A. (UFISA), así como por la Secretaría General de I+D de la Xunta de Galicia y por la Universidad de La Coruña mediante proyectos y becas de investigación.

REFERENCIAS

- [1] Belystchko T., Krongauz Y., Organ D., Krysl P. (1996): *Meshless methods: An overview and recent developments*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 139, 3-48.
- [2] Johnson G.R., Stryk R.A., Beissel S.R. (1996): *SPH for high velocity impact computations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 139, 347-373.

- [3] Günther F.C., Liu W.K. (1998): *Meshfree methods for advection-dominated flows*, En “Modeling and Simulation Based Engineering”, vol. 1, sección: “Meshless Methods of Modeling”, 59–64. Tech Science Press, Palmdale, USA.
- [4] Bonet J., Lok T.S.L. (1998): *Variational and momentum preserving aspects of Smooth Particle Hydrodynamics formulations*, Report 986/98. Civil Engineering Department, University of Wales Swansea.
- [5] Oñate E., Idelsohn S., Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. (1996): *A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 39, 3839–3866.
- [6] Colominas I., Chao M., Navarrina F., Casteleiro M. (1998): *Application of Meshless Methods to the Analysis and Design of Grounding Systems*, En “Computational Mechanics: New Trends and Applications” (CD-ROM), parte I: “Mathematical Modelling and Numerical Methods”, sección 6: “Meshless Methods”, paper número 3 (18 páginas). CIMNE Pub., Barcelona.
- [7] Nayroles B., Touzot G., Villon P. (1992): *Generalizing the Finite Element Method: Diffuse Approximations and Diffuse Elements*, Computational Mechanics, vol 10, 307-318.
- [8] Belystchko T., Gu L., Lu Y.Y. (1994): *Element Free Galerkin Methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 37, 229-256.
- [9] Chao M., Colominas I. (1997): *Introducción a los Métodos Numéricos sin Malla: fundamentación y desarrollo de formulaciones de mínimos cuadrados ponderados*, Research Report. ETSICCP. Universidad de La Coruña.
- [10] Liszka T., Duarte C.A., Tworzydło W.W (1996): *hp-Meshless cloud method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 139, 263-288.
- [11] Hegen D. (1996): *Element Free Galerkin Methods in combination with finite element approaches*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol 135, 143-166.
- [12] Liu W.K., Jun S., Zhang Y.F. (1995): *Reproducing Kernel Particle Methods*, International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol 20, 1081-1106.
- [13] Duarte C.A., Oden J.T. (1995): *A new meshless method to solve Boundary-Value Problems*, Proceedings of the XVI CILAMCE-Iberian Latin American Conference on Computational methods for engineering, Curitiba, Brazil, 90-99, R.D.Ed..
- [14] Taylor R.L., Zienkiewicz O.C., Oñate E., Idelsohn S. (1995): *Moving Least Square Approximations for Solution of Differential Equations*, CIMNE Report no. 74.
- [15] ANSI/IEEE Std.80 (1986): *Guide for Safety in AC Substation Grounding*, IEEE Inc., New York.
- [16] Colominas I. (1995): *Cálculo y Diseño por Ordenador de Tomas de Tierra en Instalaciones Eléctricas: Una Formulación Numérica basada en el MEC.*, Ph.D. Thesis E.T.S.I.C.C.P, La Coruña.
- [17] Colominas I., Navarrina F. and Casteleiro M. (1999): *A Boundary Element Numerical Approach for Earthing Grid Computation*, Computer Methods in Applied Mechanics

and Engineering, [en prensa].

- [18] Colominas I., Aneiros J., Navarrina F. and Casteleiro M. (1998): *A BEM Formulation for Computational Design of Grounding Systems in Stratified Soils*, En “*Computational Mechanics: New Trends and Applications*” (en CD-ROM), Parte VIII: “Application Fields”, Sección 3: “Electromagnetism”, *paper* número 1 (20 páginas). S. R. Idelsohn, E. Oñate, E. Dvorkin (Editors); CIMNE, Barcelona.
- [19] Sarrate J. (1996): *Modelización numérica de la interacción fluido-sólido rígido: Desarrollo de algoritmos, generación de mallas y adaptabilidad*, PhD Thesis E.T.S.I.C.C.P, Barcelona.
- [20] Belytschko T., Black T. (1998): *Elastic crack growth in Finite Elements with minimal remeshing*, Research Report. Department of Mechanical and Civil Engineering. Northwestern University.