

Preprint of the paper

"Una Formulación Numérica para el Análisis de Redes de Tierra de Instalaciones Eléctricas incorporando Modelos de Terreno Multicapa"

I. Colominas, F. Navarrina, J. Aneiros, M. Casteleiro (1999)

En "Métodos Numéricos en Ingeniería" (en CD-ROM), Parte VI: "Electromagnetismo".

R. Abascal, J. Domínguez, G. Bugeda (Editores); Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería CIMNE, Barcelona. (ISBN: 84-89925-45-3)

<http://caminos.udc.es/gmni>

UNA FORMULACIÓN NUMÉRICA PARA EL ANÁLISIS DE REDES DE TIERRA DE INSTALACIONES ELÉCTRICAS INCORPORANDO MODELOS DE TERRENO MULTICAPA

Ignasi Colominas, Fermín Navarrina, Juan Aneiros y Manuel Casteleiro

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de La Coruña
Campus de Elviña. 15192 La Coruña, España
e-mail: colominas@iccp.udc.es, página web: <http://www.udc.es/caminos/dmmr/>

Palabras clave: Redes de tierra, Modelos multicapa, Método de Elementos de Contorno

Resumen. *El correcto diseño de la red de tierras de una gran instalación eléctrica es esencial para garantizar tanto la seguridad de las personas como la protección de los equipos. Para ello se requiere la determinación de los niveles de potencial en la superficie del terreno y la resistencia equivalente del sistema de tierras cuando tiene lugar una situación de fallo. En los últimos años, los autores hemos propuesto una formulación numérica basada en el método de elementos de contorno para el análisis de redes de tierra con modelos de terreno isótropo y homogéneo con los que se han podido calcular y analizar numerosos problemas reales. En este artículo se presenta una generalización de esta formulación incorporando modelos de terreno de varias capas, y se demuestra su viabilidad con la resolución de un caso muy frecuente en la práctica consistente en un sistema de tierras en un terreno estratificado con diferentes propiedades conductoras.*

1 INTRODUCCIÓN

Los principales objetivos de un sistema de tierras de una instalación eléctrica son los de garantizar la integridad de los equipos y asegurar la continuidad del suministro de electricidad, y salvaguardar que una persona que se encuentre en las proximidades de la instalación no pueda sufrir una descarga eléctrica peligrosa. Para estos fines, la resistencia equivalente del sistema de tierras debe ser lo suficientemente baja para garantizar que las corrientes de fallo se disipan principalmente en el terreno a través del sistema de tierras, en tanto que las mayores diferencias de potencial entre puntos en los que una persona pueda estar en contacto deben ser inferiores a determinados límites de máximos establecidos por las normativas de seguridad de este tipo de instalaciones (tensiones de malla, tensiones de paso y tensiones de contacto)^{1,2,3}.

Desde los años sesenta se han propuesto un gran número de métodos para el cálculo y análisis de este tipo de instalaciones, la mayor parte basados en consideraciones de tipo práctico o en ideas intuitivas (tales como la superposición de fuentes puntuales de corriente o los métodos de promediado del potencial)⁴. Aunque estas técnicas supusieron un notable avance se han constatado numerosos inconvenientes, tales como las limitaciones de estos métodos en cuanto al número máximo de conductores de la red de tierras, su disposición y el tamaño de la instalación a proteger¹, o los elevados requerimientos computacionales, los resultados poco realistas al incrementar la discretización de los electrodos, y la incertidumbre en el margen de error⁵.

En los últimos años, los autores del presente artículo hemos desarrollado una formulación numérica basada en el método de elementos de contorno para el análisis de redes de tierra con modelos de terreno isótropo y homogéneo que ha permitido identificar muchos de los métodos intuitivos empleados en la práctica como casos particulares de esta formulación general⁶. Gracias a ella se ha podido explicar matemáticamente el comportamiento asintótico anómalo de esos métodos, se han establecido las fuentes de error y cómo subsanarlas, y se han propuesto nuevas formulaciones numéricas más eficientes y precisas para la resolución de este tipo de problemas^{7,8}. Asimismo, esta formulación de elementos de contorno se ha aplicado con éxito al análisis de tomas de tierra reales de grandes instalaciones eléctricas con un coste computacional perfectamente asumible tanto en tiempo de cálculo como de requerimientos de memoria^{9,10}.

2 MODELO MATEMÁTICO DEL PROBLEMA FÍSICO

2.1 Planteamiento del problema general

El fenómeno físico de la disipación de la corriente eléctrica en un terreno a través de una malla de conductores de tierra se puede analizar en el marco de la Teoría del Electromagnetismo de Maxwell¹¹. De este modo, limitando el análisis a la obtención de la respuesta electrocinética en estado estacionario, y despreciando la resistencia eléctrica

interna de los electrodos de tierra (por lo que el potencial se puede asumir constante en cualquier punto de su superficie), el problema 3D asociado puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} &= 0, & \boldsymbol{\sigma} &= -\boldsymbol{\gamma}\mathbf{grad}V \text{ in } E; \\ \boldsymbol{\sigma}^t\mathbf{n}_E &= 0 \text{ in } \Gamma_E; & V &= V_\Gamma \text{ in } \Gamma; & V &\longrightarrow 0, \text{ if } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (1)$$

donde E el terreno, $\boldsymbol{\gamma}$ su tensor de conductividad, Γ_E la superficie del terreno, \mathbf{n}_E su versor normal exterior unitario y Γ la superficie de los electrodos de tierra^{7,8}. Así, cuando el electrodo adquiere un potencial V_Γ (“nivel de potencial de tierra” o *GPR*, “*Ground Potential Rise*”), la solución de este problema proporciona el potencial V y la densidad de corriente $\boldsymbol{\sigma}$ en un punto arbitrario \mathbf{x} . Por otra parte, dado que V y $\boldsymbol{\sigma}$ son proporcionales al nivel de potencial de tierra (*GPR*), la condición de contorno normalizada $V_\Gamma = 1$ no es en absoluto restrictiva, por lo que se empleará en lo sucesivo⁷.

En términos de estas magnitudes, los parámetros de diseño de los sistemas de tierra tales como la densidad de corriente σ que emana de un punto de la superficie de los electrodos, la intensidad total de corriente I_Γ que fluye al terreno durante una situación de fallo, y la resistencia equivalente del sistema R_{eq} , o aparente del circuito eléctrico electrodo-terreno, se pueden obtener como:

$$\sigma = \boldsymbol{\sigma}^t\mathbf{n}, \quad I_\Gamma = \int \int_\Gamma \sigma \, d\Gamma, \quad R_{eq} = \frac{V_\Gamma}{I_\Gamma}, \quad (2)$$

siendo \mathbf{n} el versor normal exterior a Γ .

2.2 Planteamiento del problema con modelos multicapa

Muchos de los métodos propuestos hasta el momento están basados en la hipótesis de que el terreno es homogéneo e isótropo¹, por lo que el tensor de conductividades $\boldsymbol{\gamma}$ se puede sustituir por un valor escalar de la conductividad que se determina experimentalmente³. Como norma general, esta hipótesis no introduce errores significativos si el terreno es esencialmente uniforme, tanto horizontal como verticalmente, hasta una distancia de tres a cinco veces la longitud de la máxima diagonal en la malla de conductores que forman la toma de tierra, medida desde su perímetro. Asimismo, este modelo de terreno isótropo y homogéneo puede ser empleado, aunque obteniéndose resultados más imprecisos, si la resistividad varía ligeramente con la profundidad¹. No obstante, ya que los parámetros que es preciso determinar para diseñar correctamente una red de electrodos de tierra pueden variar de forma importante si la conductividad del suelo varía de una parte a otra en el zona de emplazamiento de la subestación eléctrica, es razonable desarrollar modelos más precisos que tengan en cuenta la variación de la conductividad del terreno en las inmediaciones del sistema de tierras.

En este punto, es obvio que el desarrollo de modelos capaces de incorporar todas las variaciones de la conductividad del terreno en los alrededores de una red de

tierras es inabordable tanto desde un punto de vista técnico como económico (al coste computacional, sin duda importante, que supondría la resolución de un problema de estas características, habría que añadir las campañas de mediciones experimentales y la propia generación del modelo de suelo). Por este motivo, una aproximación más práctica (y bastante más realista) en los casos en que la conductividad del terreno no sea uniforme con la profundidad, consiste en considerar el terreno estratificado en un determinado número de capas horizontales de distinto espesor, cuya conductividad escalar aparente se obtiene a partir de mediciones experimentales, sondeos o estimaciones según la composición aproximada de cada capa del terreno. De hecho, se acepta ampliamente que, en estos casos, los modelos de terreno de dos capas (o tres, como máximo) son suficientes para obtener en la práctica diseños de los sistemas de tierras razonablemente buenos y seguros^{1,3}.

En un caso general, si se considera el terreno formado por C estratos horizontales de diferente conductividad en el que la malla de electrodos de tierra se encuentre situada en el estrato superior, el problema matemático (1) se reduce al siguiente problema exterior de Neumann:

$$\begin{aligned}
 & \Delta V_1 = 0 \text{ en } E_1; \dots; \Delta V_C = 0 \text{ en } E_C; \\
 & V_1 = V_2, \text{ en } \Gamma_{(1,2)}; \dots; V_{C-1} = V_C, \text{ en } \Gamma_{(C-1,C)}; \\
 & \gamma_1 \frac{dV_1}{dn} = \gamma_2 \frac{dV_2}{dn} \text{ en } \Gamma_{(1,2)}; \dots; \gamma_{C-1} \frac{dV_{C-1}}{dn} = \gamma_C \frac{dV_C}{dn} \text{ en } \Gamma_{(C-1,C)}; \quad (3) \\
 & \frac{dV_1}{dn} = 0 \text{ en } \Gamma_E; \quad V_1 = V_\Gamma \text{ en } \Gamma; \\
 & V_1 \longrightarrow 0, \dots, V_C \longrightarrow 0, \text{ si } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty;
 \end{aligned}$$

siendo E_c cada una de las capas del terreno ($c = 1, C$), $\Gamma_{(c-1,c)}$ la interfase entre dos capas cualesquiera $c - 1$ y c , γ_c la conductividad escalar aparente del estrato c , y V_c el potencial correspondiente a los puntos de la capa c ^{12,13,14}, tal como se muestra en la figura 1. Obviamente, si el electrodo de tierra está enterrado en otro estrato del terreno ($V_c = V_\Gamma$ en Γ), el planteamiento del problema exterior es análogo a (3)¹³.

Con carácter general, y excepto en casos de instalaciones eléctricas muy particulares, el electrodo de tierra está formado por una malla de conductores cilíndricos conectados entre sí, enterrados horizontalmente o clavados verticalmente, con una relación entre su diámetro y su longitud relativamente pequeña (del orden de 10^{-3})¹. Obviamente no es posible disponer de soluciones analíticas a este problema con la configuración habitual que tienen en la práctica estas redes de tierra.

Por otra parte, el empleo de técnicas numéricas estándar, tales como los métodos de elementos finitos o de diferencias finitas, requieren la discretización de los dominios tridimensionales E_c , por lo que la obtención de resultados suficientemente precisos implicarían unas necesidades computacionales absolutamente prohibitivas en la actualidad tanto en memoria como en tiempo de cálculo⁷. Muy recientemente, en este ámbito del análisis y cálculo de tomas de tierra, se han empezado a aplicar otro tipo de técnicas numéricas que tratan de evitar los inconvenientes de la discretización del

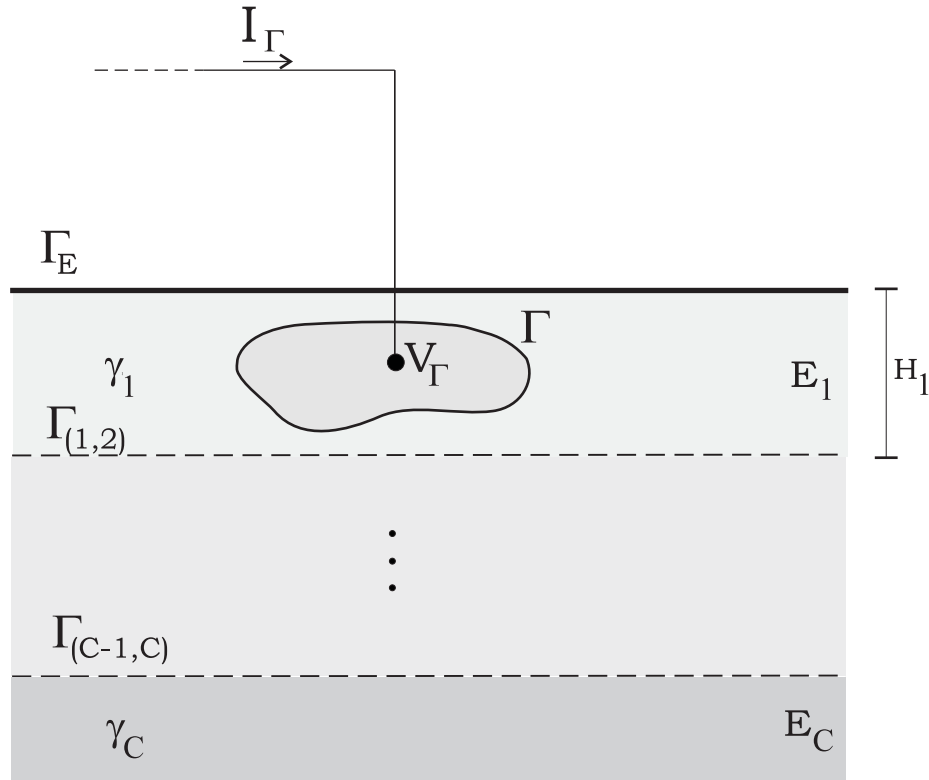


Fig. 1.—Representación esquemática de la disipación de corriente eléctrica a través de un sistema de tierras en un terreno estratificado con un número arbitrario de capas.

dominio (los métodos “sin malla”)¹⁵; estos trabajos se encuentran actualmente en fase de desarrollo y su aplicación está restringida a la resolución de problemas académicos y de test^{16,17}.

Por todo ello, y si se tiene en cuenta que en el diseño de una red de tierras los valores del potencial solamente se precisan en la superficie del terreno Γ_E y que la resistencia equivalente se puede obtener fácilmente en términos de la densidad de corriente σ que emana de los electrodos mediante (2), se ha optado por desarrollar una formulación basada en el método de elementos de contorno que requerirá únicamente la discretización de la superficie de los electrodos Γ , por lo que el problema tridimensional se podrá plantear en términos de otro bidimensional.

Así, si se asume que la superficie del terreno Γ_E y las interfases entre los distintos estratos de terreno $\Gamma_{(c-1,c)}$ son horizontales, la simetría —método de las imágenes— permite reescribir el problema (3) en términos de un Problema Exterior de Dirichlet^{7,13}. Esta hipótesis de superficies horizontales es bastante adecuada si se tiene en cuenta que, en la práctica, el terreno en el que se construye la instalación eléctrica y sus alrededores se regularizan previamente a la colocación de los equipos y ejecución de los viales y zonas de servicios.

La aplicación de la identidad de Green^{8,13} a este problema exterior de Dirichlet conduce a las siguientes expresiones integrales para el potencial $V_c(\mathbf{x}_c)$ en un punto arbitrario $\mathbf{x}_c \in E_c$ ($c = 1, C$), en términos de la densidad de corriente $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ en un punto $\boldsymbol{\xi}$ —de coordenadas $[\xi_x, \xi_y, \xi_z]$ — sobre la superficie del electrodo Γ que se encuentra enterrado en el estrato superior (capa número 1):

$$V_c(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{4\pi\gamma_1} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{1c}(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{x}_c \in E_c; \quad (c = 1, C); \quad (4)$$

donde el núcleo integral $k_{1c}(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi})$ está formado por series infinitas de términos correspondientes a las imágenes generadas al transformar el problema exterior de Neumann en otro de Dirichlet¹². Estos núcleos son débilmente singulares y dependen de los inversos de las distancias del punto \mathbf{x}_c al punto $\boldsymbol{\xi}$ —y a todos los puntos simétricos de $\boldsymbol{\xi}$ respecto de la superficie del terreno Γ_E y de las interfaces $\Gamma_{(c-1,c)}$ entre las capas—, así como del espesor y de las conductividades de cada capa^{13,14}.

Por otra parte, si el electrodo de tierra está enterrado en otro estrato (por ejemplo en la capa b), la aplicación de la identidad de Green conducirá a una expresión análoga a (4) con un núcleo integral $k_{bc}(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi})$:

$$V_c(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{4\pi\gamma_b} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{bc}(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{x}_c \in E_c; \quad (c = 1, C). \quad (5)$$

Aunque el procedimiento para la obtención de imágenes esté muy claro y sea conceptualmente sencillo, en un caso general las expresiones finales de estos núcleos integrales no lo son, y su cálculo en la práctica requiere la evaluación de series infinitas sumamente complicadas¹⁴. En este trabajo los ejemplos que se presentarán corresponden a mallas de tierra con modelos de terreno en dos capas, y las expresiones de estos núcleos integrales vienen dadas por:

$$\begin{aligned} k_{11}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) = & \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, 2iH + \xi_z])} + \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, 2iH - \xi_z])} \right. \\ & \left. + \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -2iH + \xi_z])} + \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -2iH - \xi_z])} \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} k_{12}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}) = & \frac{1 + \kappa}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1 + \kappa}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{(1 + \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, 2iH + \xi_z])} + \frac{(1 + \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, 2iH - \xi_z])} \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

si el electrodo de tierra está en la capa superior, y

$$\begin{aligned}
 k_{21}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1 - \kappa}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1 - \kappa}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])} \\
 &+ \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{(1 - \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -2iH + \xi_z])} + \frac{(1 - \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, 2iH - \xi_z])} \right]; \tag{6a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1 - \kappa^2}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])} \\
 &+ \frac{-\kappa}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, 2H + \xi_z])} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - \kappa^2)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, -2iH + \xi_z])}. \tag{7a}
 \end{aligned}$$

si la red de tierras está en la capa inferior¹³. En las expresiones anteriores, $r(\mathbf{x}, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])$ indica la distancia desde \mathbf{x} a $\boldsymbol{\xi} \equiv [\xi_x, \xi_y, \xi_z]$ —y a los puntos simétricos de $\boldsymbol{\xi}$ respecto de Γ_E y de la superficie de la interfase entre las dos capas—, H es el espesor del estrato superior, y κ es una relación entre las conductividades de las capas: $\kappa = (\gamma_1 - \gamma_2)/(\gamma_1 + \gamma_2)$.

3 PLANTEAMIENTO VARIACIONAL DEL PROBLEMA

La expresión (3) se satisface también en los puntos de la superficie de los electrodos de la malla de tierra en los cuales el potencial es conocido al tratarse de la condición de contorno correspondiente al “nivel de potencial de tierra” (cuando el electrodo está en una capa cualquiera b : $V_b(\boldsymbol{\chi}) = 1$, $\boldsymbol{\chi} \in \Gamma$). En consecuencia, la densidad de corriente σ que emana del electrodo debe verificar la ecuación integral de Fredholm de primera clase definida en Γ

$$1 = \frac{1}{4\pi\gamma_b} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{bb}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \boldsymbol{\chi} \in \Gamma. \tag{8}$$

Finalmente, una forma variacional más débil de la ecuación (8) puede ahora escribirse como:

$$\iint_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma} w(\boldsymbol{\chi}) \left(\frac{1}{4\pi\gamma_b} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{bb}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma - 1 \right) d\Gamma = 0, \tag{9}$$

que debe verificarse para todo miembro $w(\boldsymbol{\chi})$ de una clase adecuada de funciones de test definidas en $\Gamma^{8,9}$. Es evidente que el desarrollo de una formulación de elementos de contorno parece ser la mejor opción para resolver la forma variacional (9).

4 FORMULACIÓN GENERAL DE ELEMENTOS DE CONTORNO

Dados un conjunto de \mathcal{N} funciones de prueba definidas en Γ , y uno de \mathcal{M} elementos de contorno 2D $\{\Gamma^\alpha\}$, la densidad de corriente σ que emana de los electrodos y su superficie Γ se pueden discretizar en la forma,

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i N_i(\boldsymbol{\xi}), \quad \Gamma = \bigcup_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} \Gamma^\alpha, \quad (10)$$

y la expresión (5) puede ser aproximada como:

$$V_c(\mathbf{x}_c) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i V_{c_i}(\mathbf{x}_c); \quad V_{c_i}(\mathbf{x}_c) = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} V_{c_i}^\alpha(\mathbf{x}_c), \quad \forall \mathbf{x}_c \in E_c; \quad (c = 1, C); \quad (11)$$

donde el coeficiente $V_{c_i}^\alpha$ viene dado por

$$V_{c_i}^\alpha(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{4\pi\gamma_b} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\alpha} k_{bc}(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma^\alpha. \quad (12)$$

Por otra parte, dado un conjunto de \mathcal{N} funciones de test $\{w_j(\boldsymbol{\chi})\}$ definidas en Γ , la forma variacional (9) se reduce al sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left(\sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} R_{ji}^{\beta\alpha} \right) \sigma_i = \left(\sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \nu_j^\beta \right) \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}; \quad (13)$$

siendo los coeficientes $R_{ji}^{\beta\alpha}$ y ν_j^β los siguientes:

$$R_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma_b} \int \int_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma^\beta} w_j(\boldsymbol{\chi}) \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\alpha} k_{bb}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma^\alpha d\Gamma^\beta; \quad (14)$$

$$\nu_j^\beta = \int \int_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma^\beta} w_j(\boldsymbol{\chi}) d\Gamma^\beta. \quad (15)$$

En la práctica, la discretización 2D requerida para resolver las anteriores ecuaciones en el caso de problemas reales implica un número extremadamente elevado de grados de libertad. Además, si se tiene en cuenta que la matriz de coeficientes de (13) es llena y que el cálculo de cada término de (14) requiere un gran número de evaluaciones del núcleo integral $k_{bb}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi})$ y una doble integración en un dominio bidimensional, se hace preciso introducir algunas simplificaciones en esta formulación general de elementos de contorno con el fin de disminuir su gran coste computacional.

5 FORMULACIÓN APROXIMADA DE ELEMENTOS DE CONTORNO

5.1 Planteamiento y forma variacional del problema aproximado

Con este objetivo, y teniendo presente la geometría real de las redes de tierra en la mayoría de las instalaciones eléctricas, se puede asumir que la densidad de corriente que emana es constante en la sección transversal del electrodo cilíndrico⁶, lo que es ampliamente empleado en la mayor parte de los desarrollos teóricos y métodos prácticos recogidos en la bibliografía^{1,3}.

Así, sean L el conjunto de las líneas de los ejes de los conductores enterrados, $\hat{\xi}$ la proyección ortogonal sobre el eje de la barra de un punto genérico $\xi \in \Gamma$, $\phi(\hat{\xi})$ el diámetro del electrodo, $P(\hat{\xi})$ el perímetro circunferencial de la sección transversal en $\hat{\xi}$, y $\hat{\sigma}(\hat{\xi})$ la densidad de corriente aproximada que emana en ese punto (asumida constante en la sección transversal). En estos términos, podemos obtener la expresión aproximada del potencial (5)

$$\hat{V}_c(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{4\gamma_b} \int_{\hat{\xi} \in L} \phi(\hat{\xi}) \bar{k}_{bc}(\mathbf{x}_c, \hat{\xi}) \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL, \quad \forall \mathbf{x}_c \in E_c; \quad (c = 1, C); \quad (16)$$

siendo $\bar{k}_{bc}(\mathbf{x}_c, \hat{\xi})$ el promedio del núcleo integral $k_{bc}(\mathbf{x}_c, \hat{\xi})$ en la sección transversal en $\hat{\xi}$:

$$\bar{k}_{bc}(\mathbf{x}_c, \hat{\xi}) = \int_{\xi \in P(\hat{\xi})} k_{bc}(\mathbf{x}_c, \xi) dS. \quad (17)$$

Ahora, dado que la densidad de corriente que emana no es realmente uniforme en la sección transversal, la condición de contorno $V_c(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in \Gamma$ no se satisface estrictamente y la forma variacional (9) no se verifica en todos los puntos. Sin embargo, si se restringe la clase de funciones de test a aquellas con uniformidad circunferencial (es decir, $w(\mathbf{x}) = \hat{w}(\hat{\mathbf{x}}) \forall \mathbf{x} \in P(\hat{\mathbf{x}})$), la nueva forma variacional resulta ser

$$\frac{1}{4\gamma_b} \int_{\hat{\mathbf{x}} \in L} \phi(\hat{\mathbf{x}}) \hat{w}(\hat{\mathbf{x}}) \left[\int_{\hat{\xi} \in L} \phi(\hat{\xi}) \bar{k}_{bb}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\xi}) \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL \right] dL = \int_{\hat{\mathbf{x}} \in L} \phi(\hat{\mathbf{x}}) \hat{w}(\hat{\mathbf{x}}) dL, \quad (18)$$

que se debe verificar para todas las funciones $\hat{w}(\hat{\mathbf{x}})$ de una determinada clase de funciones de test definidas en L , siendo $\bar{k}_{bb}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\xi})$ el núcleo integral

$$\bar{k}_{bb}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\xi}) = \int_{\mathbf{x} \in P(\hat{\mathbf{x}})} \left[\int_{\xi \in P(\hat{\xi})} k_{bb}(\mathbf{x}, \xi) dP \right] dP. \quad (19)$$

5.2 Formulación numérica de elementos de contorno 1D

La resolución de la ecuación integral (18) requiere la discretización del dominio formado por el conjunto L de las líneas de los ejes de los conductores de la red de tierras. Así, dados un conjunto de n funciones de prueba $\{\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}})\}$ definidas en L , y m elementos de contorno 1D $\{L^\alpha\}$, la densidad de corriente aproximada $\widehat{\sigma}$ que emana de la superficie de los electrodos y el conjunto de las líneas de los ejes L se pueden discretizar en la forma,

$$\widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}), \quad L = \bigcup_{\alpha=1}^m L^\alpha, \quad (20)$$

por lo obtenemos que la forma discretizada de la expresión del potencial aproximado (16) viene dada por

$$\widehat{V}_c(\mathbf{x}_c) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \widehat{\sigma}_i \widehat{V}_{c_i}(\mathbf{x}_c); \quad \widehat{V}_{c_i}(\mathbf{x}_c) = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} \widehat{V}_{c_i}^\alpha(\mathbf{x}_c), \quad \forall \mathbf{x}_c \in E_c; \quad (c = 1, C); \quad (21)$$

donde el coeficiente $\widehat{V}_{c_i}^\alpha(\mathbf{x}_c)$ es

$$\widehat{V}_{c_i}^\alpha(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{4\gamma_b} \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) \bar{k}_{bc}(\mathbf{x}_c, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL^\alpha. \quad (22)$$

Finalmente, para una elección adecuada de n funciones de test $\{\widehat{w}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}})\}$ definidas en L , la forma variacional (18) se reduce al sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} \right) \widehat{\sigma}_i = \sum_{\beta=1}^m \left(\widehat{v}_j^\beta \right), \quad j = 1, \dots, n; \quad (23)$$

siendo los coeficientes $\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha}$ y \widehat{v}_j^β :

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\gamma_b} \int_{\widehat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \phi(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \widehat{w}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) \bar{k}_{bb}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL^\alpha dL^\beta, \quad (24)$$

$$\widehat{v}_j^\beta = \int_{\widehat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \phi(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \widehat{w}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) dL^\beta. \quad (25)$$

Al igual que en el caso del sistema (13), la matriz de coeficientes de esta formulación 1D aproximada es también llena. Sin embargo, en general podremos garantizar una reducción drástica del coste computacional, dado que para un problema dado la actual discretización 1D de (23) será mucho más sencilla que la anterior 2D. Así mismo, es posible obtener aproximaciones altamente eficaces y de relativamente bajo coste

computacional para la evaluación de los núcleos promediados $\bar{k}_{bc}(\widehat{\mathbf{x}}_c, \widehat{\boldsymbol{\xi}})$, $\bar{k}_{bb}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})$, desarrolladas en trabajos previos para formulaciones con modelos de terreno isótropo y uniforme^{7,9}.

En otro orden de cosas, el cálculo de las integrales involucradas en (24) no es en ningún modo obvio, ni es posible emplear cuadraturas numéricas estándar debido al mal comportamiento de los núcleos integrales. No obstante, los coeficientes $\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha}$ de (24) pueden calcularse haciendo uso de las mismas técnicas de integración analítica desarrolladas por los autores para las formulaciones de elementos de contorno con modelos de terreno isótropo y homogéneo^{7,9,13}, lográndose reducciones muy importantes en el coste computacional que implica el análisis de una malla real de tierra con un número importante de electrodos conductores.

Finalmente, es conveniente hacer notar el hecho, ya comentado anteriormente, de que los modelos multicapa para terrenos con variabilidades de la conductividad con la profundidad se plantean en la práctica como máximo con modelos de tres capas. En estos casos, la aplicación de formulaciones de elementos de contorno como las que se exponen en este artículo es viable, aunque el tiempo de CPU puede aumentar considerablemente. Los problemas son esencialmente dos: por una parte, la evaluación de las propias expresiones de los núcleos (que en el caso de modelos de más de dos capas son series infinitas múltiples), y por otra, el coste computacional que implica el análisis de determinados casos es extremadamente elevado, en particular cuando las conductividades de los estratos sean muy distintas entre sí. Por ejemplo, en el caso del modelo de dos capas cuyos núcleos integrales vienen dados por (6), (7), (6a) y (7a), la velocidad de convergencia del cálculo de los núcleos promediados es muy lenta cuando la relación entre las conductividades $|\kappa|$ es muy próxima a 1, lo que supone evaluar un número muy elevado de términos de las series de los núcleos para obtener resultados suficientemente precisos.

En la actualidad la formulación de elementos de contorno que se ha presentado se ha implementado para modelos de terreno de dos capas en el sistema de cálculo y diseño asistido por ordenador de puestas a tierra de instalaciones eléctricas desarrollado por los autores en los últimos años¹⁰, con el que se han resuelto diversos casos de puestas a tierra de subestaciones eléctricas.

6 EJEMPLOS DE APLICACIÓN

A continuación y con el fin de demostrar la viabilidad de la formulación de elementos de contorno desarrollada presentaremos un ejemplo en que se ha tomado como red de electrodos la malla de puesta a tierra existente en la subestación eléctrica Santiago II de la empresa Unión Fenosa, situada en la ciudad de Santiago de Compostela.

La malla de tierras está formada por 582 electrodos cilíndricos de diámetro constante (12.85 mm) enterrada a una profundidad de 75 cm, suplementada por 24 picas verticales de 4 m de longitud y 15 mm de diámetro. En la figura 2 se muestra uno de los planos originales de la subestación con la red de tierras; en la figura 3 se muestra únicamente la

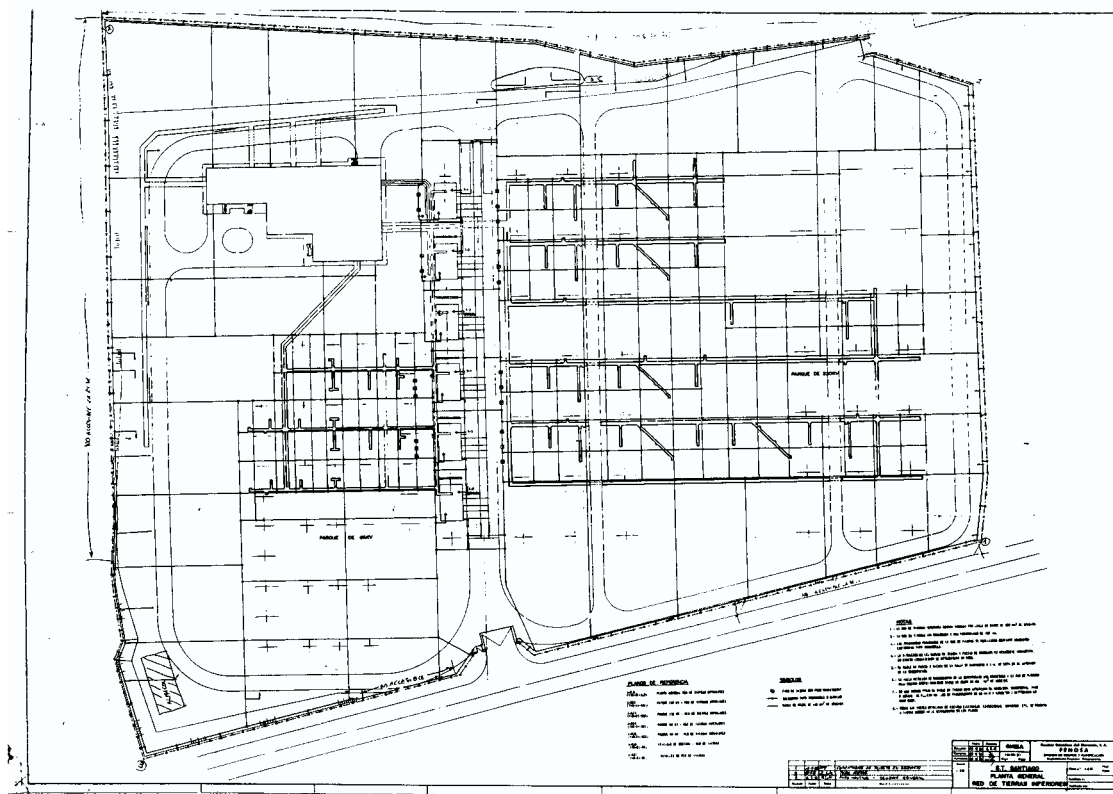


Fig. 2.—Subestación Santiago II : Plano de la red de tierras de la subestación (Reproducido con la autorización de Unión Fenosa Ingeniería S.A.).

Tabla I.—Subestación Santiago II: Características y Modelo Numérico

Datos		Modelo Numérico	
Número de Electrodo :	534	Tipo de Formulación :	Galerkin
Número de Picas :	24	Tipo de Elemento 1D :	Lineal
Diámetro de Electrodo :	11.28 mm	Número de Elementos :	582
Diámetro de Picas :	15.00 mm	Grados de Libertad :	386
Profundidad :	0.75 m		
Longitud de Picas :	4 m		
Max. Dimensiones Malla :	230 m×195 m		
GPR :	10 kV		

mallas de conductores de tierra obtenida directamente a partir del plano de la instalación.

Las dimensiones máximas de esta red de tierras son 230 m por 195 m, y el área total protegida es de casi 38000 m². El área total estudiada es la de un rectángulo

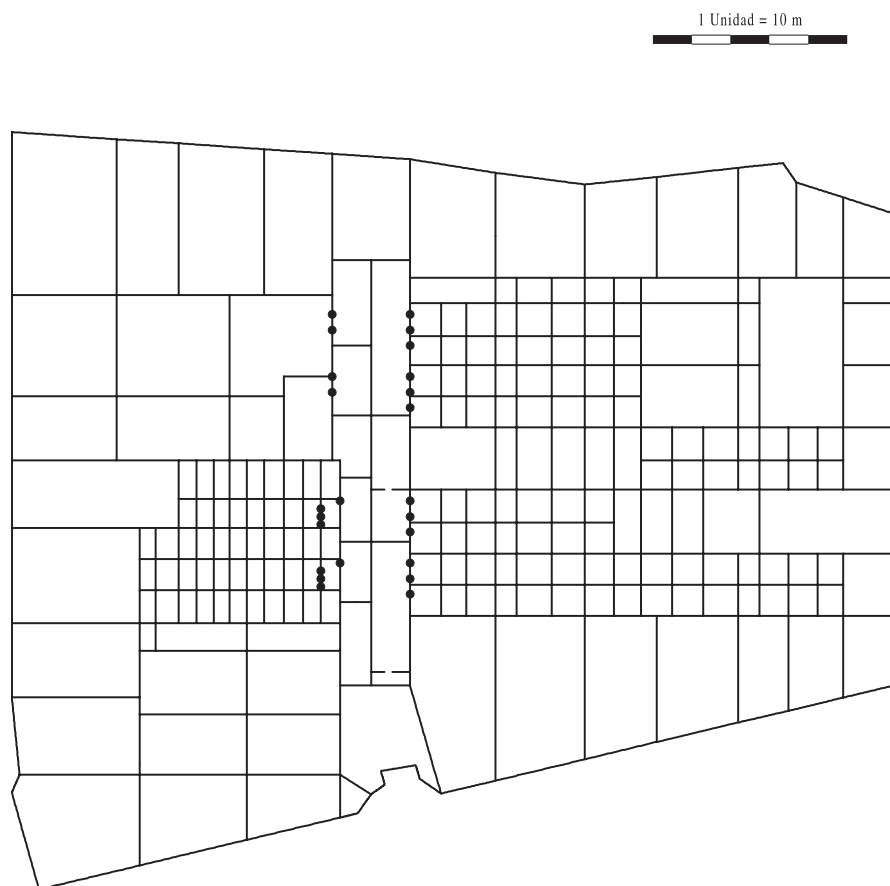


Fig. 3.—Subestación Santiago II : Malla de electrodos de la toma de tierra (los puntos en negrita indican la situación de las picas verticales).

Tabla II.—Subestación Santiago II: Resultados obtenidos con distintos modelos de suelo

Modelo de Dos Capas	Modelo de Una Capa
Resistiv. Capa Superior : 200 Ω m	—
Resistiv. Capa Inferior : 60 Ω m	—
Espesor Capa Superior : 1.2 m	Resistividad Terreno : 60 Ω m
Intensidad Total : 5.61 kA	Intensidad Total : 6.73 kA
Resistencia Equivalente : 0.1782 Ω	Resistencia Equivalente : 0.1486 Ω
Tiempo CPU (AXP 4000): 13.35 min.	Tiempo CPU (AXP 4000): 7.7 s.

que contiene a la red de tierras de 300 m por 260 m, lo que supone una superficie de 78000 m². El nivel de potencial de tierra considerado en este estudio es de 10 kV. Las características generales y el modelo numérico empleado se resumen en la tabla I.

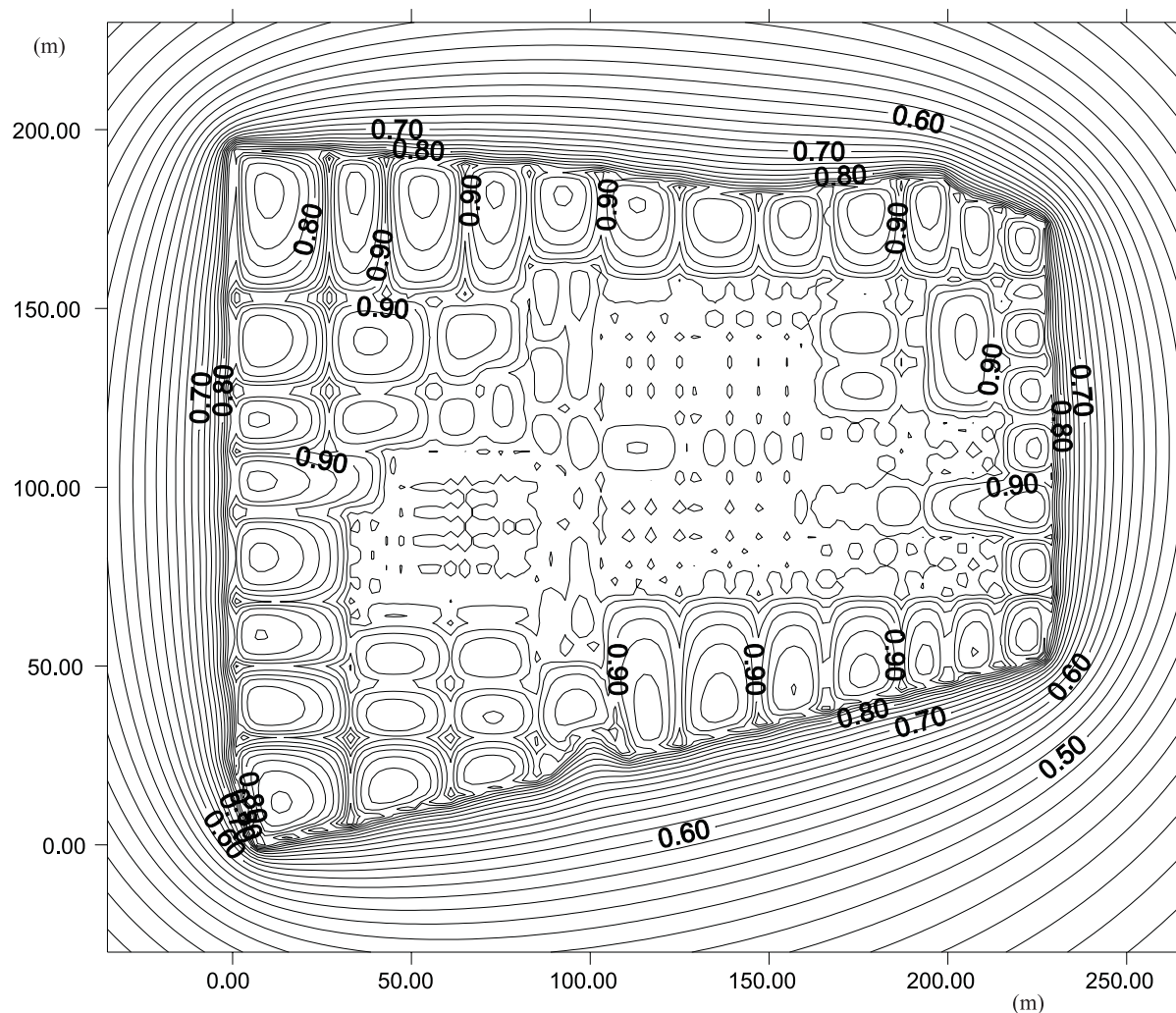


Fig. 4.—Subestación Santiago II : Distribución de los niveles de potencial ($\times 10$ kV) en la superficie del terreno obtenidos con el modelo de terreno isótropo y homogéneo.

En la tabla II se resumen los resultados numéricos del análisis del sistema de tierras: la resistencia equivalente del sistema y la intensidad total que fluye al terreno obtenidos mediante la formulación de elementos de contorno propuesta, tanto para un modelo de terreno isótropo y homogéneo (una capa) como para un modelo de dos capas.

En la figura 4 se muestra la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno cuando tiene lugar una derivación de corriente al mismo a través del sistema de tierras, obtenidos haciendo uso de un modelo de una capa, y en la figura 5 los calculados con el modelo de dos capas. Las diferencias entre ambas distribuciones son evidentes; no obstante a la escala del gráfico, estas diferencias pueden parecer poco apreciables. Por este motivo, en la figura 6 se muestran de forma comparativa los perfiles de potencial a lo largo de dos líneas distintas obtenidos para los dos modelos de terreno. Estos

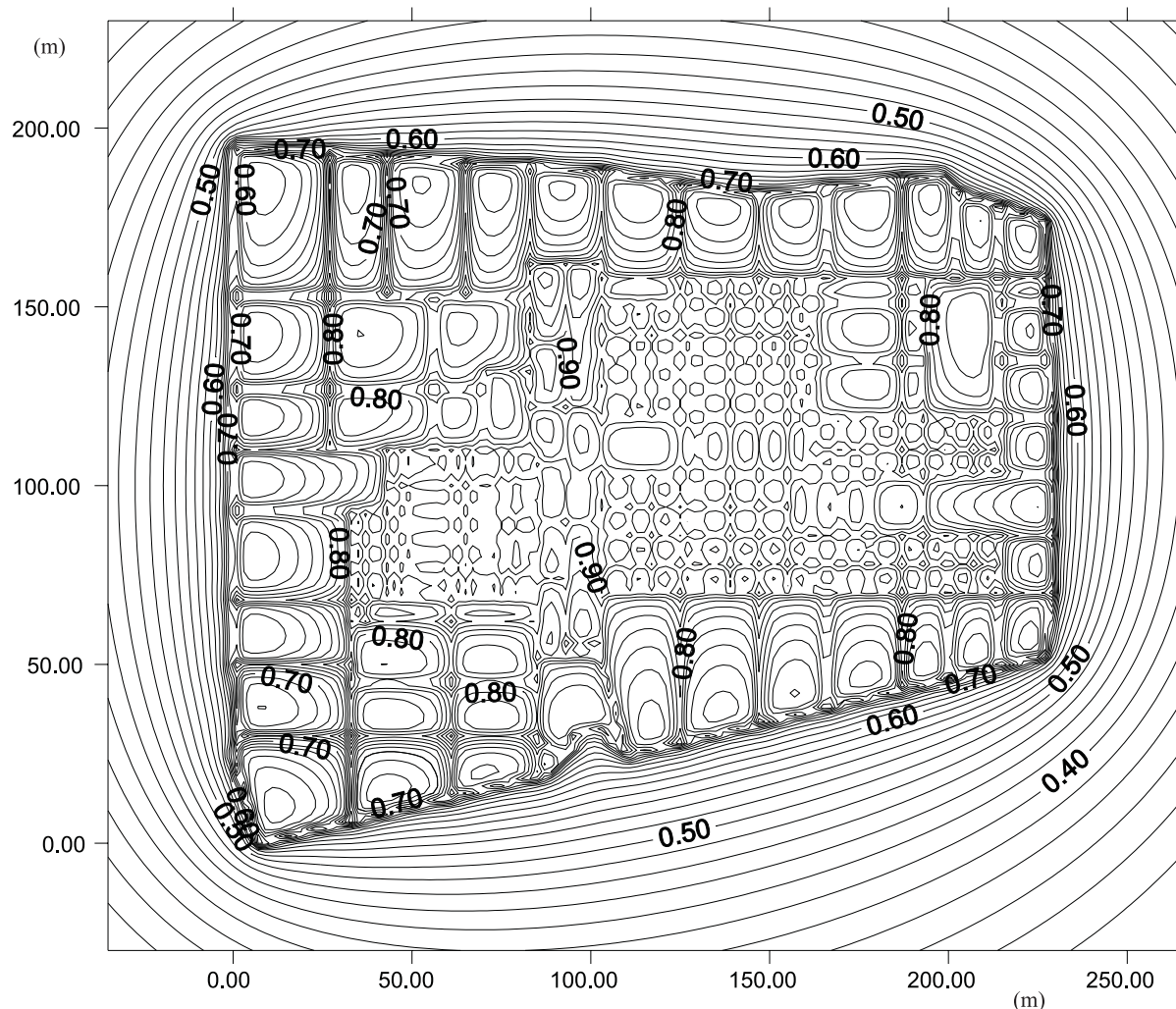


Fig. 5.—Subestación Santiago II : Distribución de los niveles de potencial ($\times 10$ kV) en la superficie del terreno obtenidos con el modelo de terreno de dos capas.

resultados son muy importantes en la práctica dado que a partir de ellos se determinan de forma inmediata parámetros de diseño esenciales de una puesta a tierra tales como las tensiones de paso y las tensiones de contacto de la instalación.

Es conveniente hacer notar que el análisis del sistema de tierras que se ha presentado con el modelo de dos capas es particularmente difícil, no solo por el gran tamaño de la instalación a calcular, sino porque dado que las picas tienen una longitud de 4 m, la malla de electrodos está enterrada a una profundidad de 0.75 m y el espesor de la capa superior es de 1.2 m, por lo que parte de la puesta a tierra está en la capa superior, y parte en la capa inferior. En estos casos, la implementación final de la formulación en un sistema de diseño asistido por ordenador debe realizarse cuidadosamente, con el fin de combinar correctamente las diferentes expresiones de los núcleos integrales,

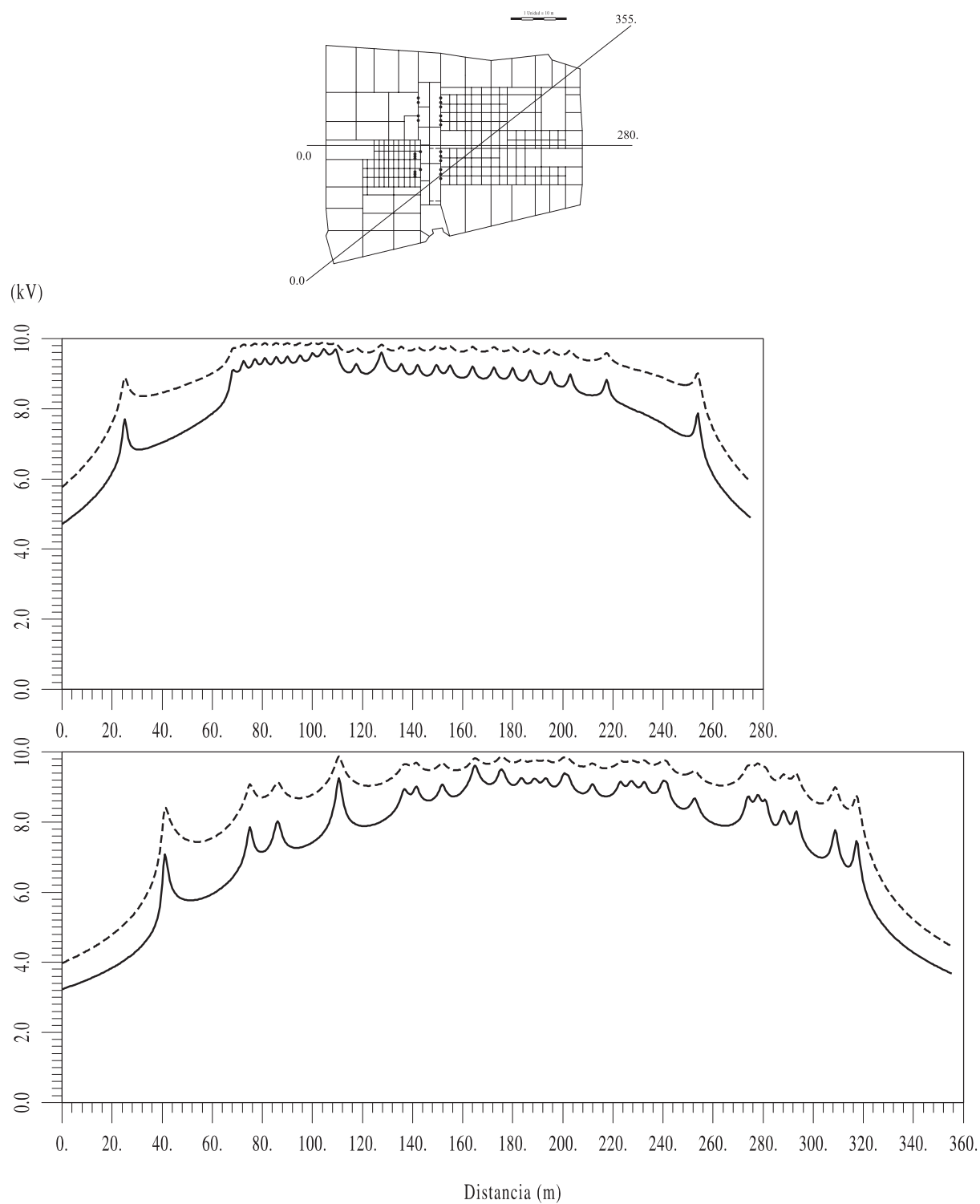


Fig. 6.—Subestación Santiago II : Niveles de potencial a lo largo de dos líneas distintas: en línea discontinua los resultados para un modelo de terreno uniforme, y en línea continua para un modelo de dos capas.

dependiendo de la situación de los electrodos.

Como se ha demostrado en este ejemplo, los resultados que se obtienen con diferentes modelos de terreno son apreciablemente distintos y en consecuencia los parámetros de diseño de la red de tierras puede variar significativamente. Es obvio que en la fase de diseño inicial de la instalación de tierras, y con el fin de disponer de una primer estimación de los parámetros, puede ser suficiente emplear formulaciones con un modelo isótropo y uniforme dado el mayor coste computacional que tienen estas formulaciones de elementos de contorno para modelos multicapa; no obstante, en la fase de definición final del diseño de la red de tierras y en aquellos casos en los que existan variaciones importantes de la conductividad del terreno con la profundidad es esencial analizar y calcular la instalación con una formulación como la que se ha propuesto que incorporen modelos de terreno no uniformes.

7 CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado una formulación general de elementos de contorno para el análisis de una red de tierras con modelos de terreno multicapa. La introducción de ciertas hipótesis razonables atendiendo a las características específicas de este tipo de instalaciones en la práctica, permite transformar la formulación general de elementos de contorno bidimensional en otra aproximada unidimensional⁷. Así mismo, las expresiones discretizadas finales pueden expresarse de modo que es posible hacer uso de las técnicas de integración analítica desarrolladas por los autores en trabajos anteriores para puestas a tierra enterradas en suelos uniformes⁹.

Esta formulación numérica se ha implementado en un sistema de CAD de diseño de redes de tierra de subestaciones eléctricas¹⁰ y se ha aplicado al caso práctico del cálculo de un sistema de tierras en un modelo equivalente de dos capas. Con este sistema es posible obtener resultados de gran precisión en el análisis de casos reales. En estos momentos, el coste computacional que implica el cálculo de una gran instalación requiere unos pocos minutos en un miniordenador; no obstante, es posible conseguir reducciones importantes en el tiempo de CPU mediante la aplicación de técnicas de extrapolación¹³, que están actualmente en fase de desarrollo, que permitirán abordar el análisis en una estación de trabajo convencional prácticamente en tiempo real.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la Subdirección General de Proyectos de Investigación Científica y Técnica (SGPICYT) del Ministerio de Educación y Cultura (proyecto 1FD97-0108), con cofinanciación de fondos FEDER y de la empresa Unión Fenosa Ingeniería S.A. (UFISA), así como por la Secretaría General de I+D de la Xunta de Galicia y por la Universidad de La Coruña mediante proyectos y becas de investigación.

REFERENCIAS

- [1] ANSI/IEEE Std.80 (1986): *Guide for Safety in AC Substation Grounding*, IEEE Inc., New York.
- [2] Ministerio de Industria y Energía (1993): *Reglamento sobre centrales eléctricas, subestaciones y centros de transformación*, Madrid.
- [3] Sverak J.G. *et al.* (1981, 1982): *Safe Substations Grounding*, Part 1: IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 100, 4281–4290. Part 2: IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, vol. 101, 4006–4023.
- [4] Heppe R.J. (1979): *Computation of potential at surface above an energized grid or other electrode, allowing for non-uniform current distribution*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 98, No. 12, 1978–1988.
- [5] Garret D.L. and Pruitt J.G. (1985): *Problems Encountered with the APM of Analyzing Substation Grounding Systems*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 104, No. 12, 4006–4023.
- [6] Navarrina F., Colominas I. and Casteleiro M. (1992): *Analytical Integration Techniques for Earthing Grid Computation by BEM*, En “Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences”, 1197–1206, CIMNE Pub., Barcelona.
- [7] Colominas I. (1995): *Cálculo y Diseño por Ordenador de Tomas de Tierra en Instalaciones Eléctricas: Una Formulación Numérica basada en el Método Integral de Elementos de Contorno*, Ph.D.Thesis, ETSICCP, Universidad de La Coruña.
- [8] Colominas I., Navarrina F. and Casteleiro M. (1997): *Una Formulación Numérica General para el Cálculo y Diseño de Tomas de Tierra en Grandes Instalaciones Eléctricas*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 13, No. 3, 383–401.
- [9] Colominas I., Navarrina F. and Casteleiro M. (1999): *A Boundary Element Numerical Approach for Earthing Grid Computation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, [en prensa].
- [10] Casteleiro M., Hernández L.A., Colominas I. and Navarrina F. (1994): *Memoria y Manual de Usuario del Sistema TOTBEM para Cálculo y Diseño Asistido por Ordenador de Tomas de Tierra de Instalaciones Eléctricas*, ETSICCP, Universidad de La Coruña.
- [11] Durand E. (1966): *Électrostatique*, Masson Ed., Paris.
- [12] Tagg G.F. (1964): *Earth Resistances*, Pitman Pub. Co., New York.
- [13] Aneiros J.M. (1996): *Una Formulación Numérica para Cálculo y Diseño de Tomas de Tierra de Subestaciones Eléctricas con Modelos de Terreno de Dos Capas*, Research Report, ETSICCP, Universidad de La Coruña.
- [14] Sunde E.D. (1968): *Earth conduction effects in transmission systems*, McMillan Ed., New York.
- [15] Colominas I., Chao M., Navarrina F., Casteleiro M. (1998): *Application of Meshless Methods to the Analysis and Design of Grounding Systems*, En “Computational Mechanics: New Trends and Applications” (CD-ROM), parte I: “Mathematical

- Modelling and Numerical Methods”, sección 6: “Meshless Methods”, paper número 3 (18 páginas). CIMNE Pub., Barcelona.
- [16] Colominas I., Chao M., Navarrina F., Casteleiro M. (1998): *A Meshless Numerical Formulation for the Solution of Potential Problems in Engineering Applications*, En “Modeling and Simulation Based Engineering”, vol. 1, sección: “Meshless Methods of Modeling”, 35–40. Tech Science Press, Palmdale, USA.
- [17] Colominas I., Navarrina F., Chao M., Casteleiro M. (1999): *Resolución numérica de problemas de potencial en aplicaciones de ingeniería mediante métodos sin malla*, En “Métodos Numéricos en Ingeniería”, (Actas del IV Congreso sobre Métodos Numéricos en Ingeniería, Sevilla, Junio 1999), SEMNI, Barcelona.