

Preprint of the paper

"Una formulación en elementos finitos para la resolución del flujo viscoso incompresible no permanente"

P. Vellando, J. Puertas, J. Bonillo, J. Fe (1999)

CD Proceedings Congreso de métodos numéricos en ingeniería del Semni Junio 1999)
(ISBN: 84-89925-45-3).

<http://caminos.udc.es/gmni>

UNA FORMULACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS PARA LA RESOLUCIÓN DEL FLUJO VISCOZO INCOMPRESIBLE NO PERMANENTE

***P. Vellando, **J. Puertas, **J. Bonillo, *J. Fe.**

E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de La Coruña.

*Dpto. de Métodos Matemáticos y de Representación.

**Dpto. de Tecnología de la Construcción.

Universidad de La Coruña.

Campus de Elviña. 15192 La Coruña, Spain.

Tel: (34) 981 167000, FAX: (34) 981 167170.

e-mail: vellando@iccp.udc.es

Palabras clave: Flujo incompresible, Elementos Finitos, Navier-Stokes, SUPG.

Resumen. *Se expone en este trabajo el resultado de la elaboración de un código, que basado en el método de los elementos finitos, resuelve la ecuación de Navier–Stokes en un dominio bidimensional, para condiciones iniciales y de contorno dadas. La resolución del sistema de EDPs resultante, se lleva a cabo mediante un algoritmo de aproximaciones sucesivas, con una integración temporal implícita de diferenciación hacia atrás, sobre elementos básicos de tipo $Q1/P0$. La utilización de un algoritmo de tipo SUPG (Streamline Upwinding/Petrov-Galerkin), en lugar de una formulación de Bubnov-Galerkin convencional, logra resolver el flujo para números de Reynolds mayores de 10.000 con mallas no muy refinadas.*

1 INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos en su variante de formulación de Galerkin es el más extensamente utilizado para la resolución numérica de muchos problemas físicos que, como el cálculo de estructuras, dan lugar a matrices de rigidez simétricas. La formulación de Galerkin, en la que se utilizan funciones de test iguales a las de prueba, da lugar, al ser aplicada a la resolución del flujo incompresible, a la aparición de cierta inestabilidad numérica en la solución. Esta inestabilidad se hace más patente cuanto mayor es el carácter turbulento del flujo, más alto es el número de Reynolds y por tanto mayor se hace el peso del término convectivo (no simétrico) con relación al resto de los sumandos de la ecuación de Navier-Stokes que rige el flujo.

Las soluciones de los problemas dominados por la convección cuando las condiciones de contorno de aguas abajo fuerzan un cambio brusco en el flujo, resultan corrompidas por oscilaciones espúreas nodo a nodo, las conocidas “wiggles”, (Brooks⁴). En la formulación Galerkin la inestabilidad sólo se puede reducir mediante el refinamiento progresivo de la malla, lo cual resulta muy costoso desde el punto de vista computacional.

La eliminación de este efecto sin que ello implique el uso de mallas demasiado tupidas es posible haciendo una ponderación mayor de los nodos aguas arriba que de los de aguas abajo (ver por ejemplo Heinrich³). Esto se va a conseguir sustituyendo la formulación tradicional de Galerkin por otra en la que las funciones de test dejan de ser simétricas.

La formulación de Galerkin resulta en una aproximación de las derivadas en diferencias de primer orden centradas. Podemos conseguir acercar esta aproximación a una en la dirección de aguas arriba añadiendo a las funciones de prueba un término función de la derivada segunda centrada. Este término añadido deberá estar adecuadamente ponderado para así conseguir las mejoras arriba expuestas sin convertirlo totalmente en un esquema en derivadas descentradas, con lo que ello supondría de paso de una aproximación de segundo orden a una de primero. La pérdida de exactitud en la aproximación que supone la utilización de una ponderación aguas arriba conduce a una sobredifusión del flujo en el sentido perpendicular a las líneas de corriente cuando nos encontramos en problemas multidimensionales. El método SUPG (Streamline upwind/Petrov-Galerkin) consigue neutralizar esta difusión espúrea considerando otro coeficiente que pondera el nuevo término de segundo orden de las funciones de test. El coeficiente de la nueva ponderación es una función de la velocidad del flujo en el nodo con relación a la del resto de los nodos del elemento. Esta nueva ponderación supone la adición de un término de difusión artificial, pero de forma que éste actúa con más intensidad en la dirección de las líneas de corriente que en sus ortogonales, eliminando así los modos de difusión espúreas (ver Hughes¹⁰).

En este artículo se presentan los resultados obtenidos en el desarrollo de un programa Fortran que, basado en el método SUPG, resuelve el flujo incompresible de una forma computacionalmente efectiva, en comparación con otros algoritmos basados en una formulación convencional de Galerkin, para números de Reynolds suficientemente elevados.

2 ECUACIÓN FUNDAMENTAL

Las ecuaciones de Navier-Stokes que gobiernan el flujo viscoso incompresible y no permanente sobre un dominio Ω de contorno $\partial\Omega$ se pueden expresar como:

$$\dot{u}_i + u_j u_{ij} - \nu(u_{ij} + u_{ji})_j + \frac{1}{\rho} p_{,i} = f_i \quad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \quad (2)$$

para un instante de tiempo t , $0 \leq t \leq T$, donde T es el periodo de tiempo en estudio. Se consideran las siguientes condiciones iniciales y de contorno:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega \quad (3)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \quad (4)$$

El problema consiste en encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ y $p \in L_0^2(\Omega)$ sobre $\Omega \times (0, T)$.

Donde \mathbf{u} es la velocidad, p la presión, t el tiempo, ν, ρ son viscosidad cinemática y densidad del fluido respectivamente, y \mathbf{f} son las fuerzas de masa. Se usa aquí la notación habitual de suma en subíndices repetidos, derivación espacial en subíndices después de comas y derivación temporal denotada como ‘ $\dot{\cdot}$ ’.

3 FORMULACIÓN EN ELEMENTOS FINITOS

Obtendremos la forma débil de la ecuación de Navier-Stokes multiplicando ésta por una función de ponderación, integrándola en el dominio Ω y aplicando el teorema de la divergencia. De esta forma llegamos a la expresión:

$$\int_{\Omega} w_i (\dot{u}_i + u_j u_{ij,j} - f_i) + w_{ij} \nu (u_{ij} + u_{ji}) - w_{,i} \frac{1}{\rho} p \, d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad (5)$$

$$\int_{\Omega} u_{i,i} q \, d\Omega = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \quad (6)$$

El campo de velocidades y presiones se puede ahora aproximar haciendo uso de las funciones de prueba $\phi_n(\mathbf{x})$, $\chi_m(\mathbf{x})$, de tipo Q1/P0 (velocidad bilineal, presión constante), que transforman el problema en encontrar una aproximación $\mathbf{u}^h(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{V}_0^h(\subset \mathbf{H}_0^1(\Omega))$, y $p^h \in S_0^h(\subset L_0^2(\Omega))$, del campo de velocidad y presiones tal que:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n \phi_n(\mathbf{x}) \quad p(\mathbf{x}) = p_h(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^M p_m \chi_m(\mathbf{x}) \quad (7)$$

En el método SUPG como ya se ha comentado, se utilizan funciones de test que difieren de las de prueba en un término de segundo orden, esto lo podemos expresar matemáticamente como:

$$\int_{\Omega} w_i^h (\dot{u}_i^h + u_j^h u_{ij}^h - f_i) + w_{ij} v (u_{ij} + u_{ji}) - w_{ii} \frac{1}{\rho} p \, d\Omega + \quad (8)$$

$$+ \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} \tilde{p}_i^h \left(\dot{u}_i^h + u_j^h u_{ij}^h - v (u_{ij}^h + u_{ji}^h) + \frac{1}{\rho} p_{,i}^h - f_i \right) d\Omega_e = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in H_0^1$$

$$\int_{\Omega} u_{i,i}^h q^h \, d\Omega = 0 \quad \forall q \in S_0^1, \quad (9)$$

donde \tilde{p}_i^h , es la función de peso de perturbación que depende de la derivada primera de las funciones de test y puede escribirse como:

$$\tilde{p}_i^h = c_j w_{ij}^h \quad (10)$$

donde el coeficiente de perturbación c_j se puede definir como:

$$c_i = \frac{z h_e u_i}{2 |u_e|} \quad (11)$$

con:
$$z = \coth(Pe) - \frac{1}{Pe} \approx \min \left[1, \frac{1}{Pe} \right] \quad (12)$$

$$Pe = \frac{|u_e| h_e}{2\nu}, \quad (13)$$

u_e es la velocidad en el centro del elemento, u_i la componente i de la velocidad en el centro del elemento y h_e es la longitud característica del elemento.

La inclusión del factor \tilde{p}_i^h es la base del método SUPG e implica por un lado la consideración de una diferenciación descentrada y por otro la incorporación del coeficiente c_j que permite redirigir el flujo en la dirección de las líneas de corriente.

Introduciendo en la ecuación (8,9) las expansiones de \mathbf{u}_h, p_h , obteniendo la forma débil del segundo factor e integrando llegamos a un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias que en notación matricial se puede escribir como:

$$\mathbf{M} \mathbf{u} + \mathbf{c}(\mathbf{u}) + \nu \mathbf{A} \mathbf{u} + \mathbf{B} \mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (14)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (15)$$

Para linealizar ahora el sistema de ecuaciones (14,15) se va a aproximar el término no lineal $\mathbf{C}(\mathbf{u})$, mediante un esquema iterativo conocido como aproximaciones sucesivas

$$\mathbf{c}(\mathbf{u}_k) \approx \mathbf{C}(\mathbf{u}_{k-1}) \mathbf{u}_k = \int_{\Omega} (u_{k-1})_j^h (u_k)_{ij}^h \cdot w_i^h \, d\Omega + \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} (u_{k-1})_j^h (u_k)_{ij}^h \cdot \tilde{p}_i^h \, d\Omega \quad (17)$$

Así (14,15) se reescribe como:

$$\mathbf{M} \mathbf{u}_k + \mathbf{C} \mathbf{u}_k + n \mathbf{A} \mathbf{u}_k + \mathbf{B} \mathbf{p}_k = \mathbf{f}_k \quad (18)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{u}_k = \mathbf{0} \quad (19)$$

Sistema lineal de EDPs de primer orden de $2N+M$ ecuaciones y $2N+M$ incógnitas. Por último la integración temporal se hace en términos de un esquema implícito hacia atrás que resulta en el sistema algebraico lineal:

$$\mathbf{M} \left(\frac{\mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{u}_n}{\Delta t} \right) + \mathbf{C} \mathbf{u}_{n+1} + n \mathbf{A} \mathbf{u}_{n+1} - \mathbf{B} \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (20)$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (21)$$

Sistema que se resuelve haciendo uso de una factorización de Crout de tipo LU. El almacenamiento de las matrices que intervienen en el problema se ha hecho en ‘skyline’, para economizar memoria, mientras que el cálculo de las integrales que constituyen cada elemento de la matriz de rigidez, se ha llevado a cabo utilizando una integración numérica bidimensional de Gauss con cuatro puntos de interpolación. La resolución del sistema precisa por tanto de dos bucles de iteración para la resolución de la no linealidad y del sistema diferencial respectivamente.

La formulación utilizada en el algoritmo implementado es de tipo mixto por lo tanto mantiene como incógnita el campo de presiones en el sistema principal, lo cual si bien ‘encarece’ la solución en comparación con una formulación penalizada, evita la pérdida de exactitud para parámetros de penalización excesivamente pequeños y la dificultad en la convergencia para valores excesivamente grandes. Se ha utilizado un almacenamiento de matrices en ‘Skyline’ lo que permite una utilización más efectiva de los recursos de memoria del ordenador.

4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para verificar el algoritmo utilizado se ha utilizado el problema genérico del flujo en una cavidad con las siguientes características:

Se trata de un dominio cuadrado de lado unitario sobre el que se ha definido una malla uniforme de 31×31 nodos. Sobre el lado superior se fija una velocidad inicial de valor unidad y se resuelve el problema para valores del número Reynolds de 1.000, 5.000, 10.000 y 15.000, donde el número de Reynolds viene definido como UL/n , donde U , L son la velocidad en el borde superior, y el lado del dominio cuadrado respectivamente.

En la figura 1 quedan representadas las líneas de corriente del campo de velocidades para los distintos valores del número de Reynolds. Como puede observarse la consideración de una turbulencia creciente provoca la aparición de remolinos secundarios además del principal, centrado en la cavidad, que van aumentando en magnitud según se incrementa el número de Reynolds, lo que concuerda con otros autores ver por ejemplo Choi²².

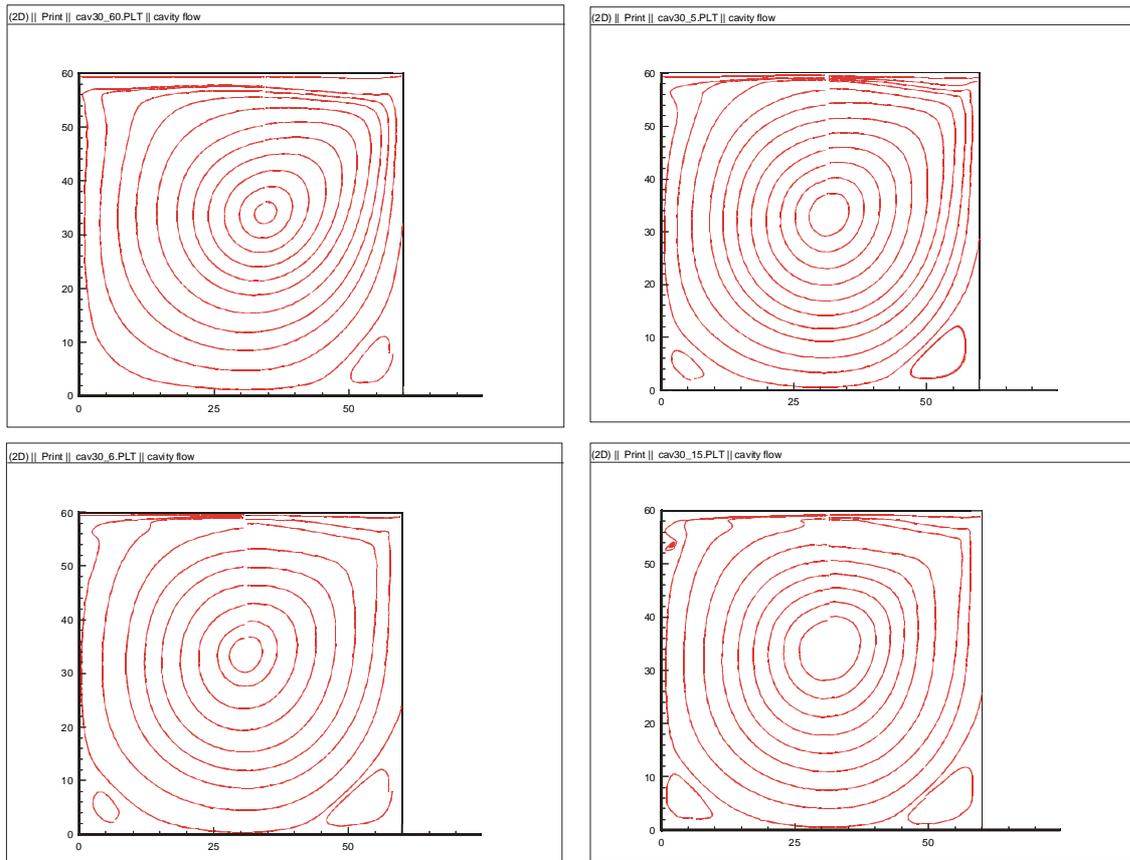


Figura 1: Campo de velocidades y líneas de corriente del flujo en cavidad para números de Reynolds de 1.000,5.000,10.000 y 15.000

La figura 2 muestra los resultados obtenidos por Hannani²⁰ y Ghia⁶ para un problema análogo comparados con los de este estudio. En el primero de los gráficos podemos ver los valores de la componente horizontal de la velocidad a lo largo de una línea central vertical para números de Reynolds de 1.000, con formulación de tipo SUPG para distintos niveles de refinamiento de la malla. En él pueden verse los resultados del presente estudio en el que utilizamos una malla regular de 31x31 al contrario de las utilizadas en los otros experimentos representados que no son equiespaciadas. En la segunda gráfica se compara los resultados para un número de Reynolds de 5.000 con los obtenidos según otras formulaciones de tipo SPGU y Galerkin Least Squares con distintos niveles de discretización de la malla y de tipo de elemento básico. La repercusión del grado de refinamiento del elemento básico en la calidad del modelo queda claramente representado en la figura.

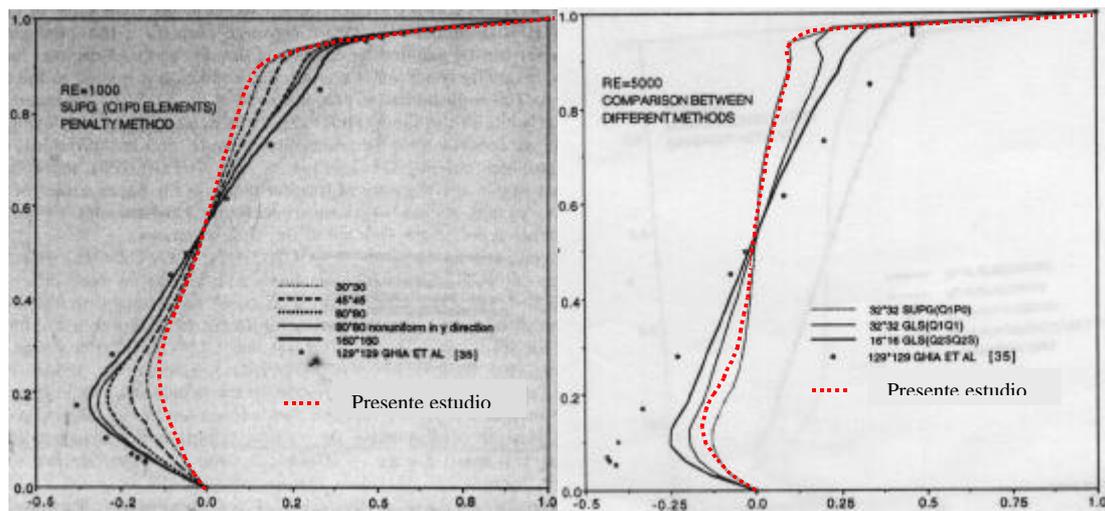


Figura 2: Componente horizontal de la velocidad a lo largo de la línea media vertical de la cavidad para números de Reynolds de 1.000 y 5.000.

La figura 3 muestra el campo de presiones para números de Reynolds de 1.000 y 10.000. La discretización del dominio para las incógnitas velocidad y presión se ha hecho en términos del par Q1/P0 (velocidad bilineal presión constante) que si bien aporta una buena aproximación para el campo de velocidades, al no cumplir la condición de divergencia-estabilidad da lugar a los resultados de campo de velocidades en ‘tablero de ajedrez’, (ver figura 3) para ciertas condiciones de contorno. Aún así es muy extendido su uso, siendo posible eliminar las oscilaciones en la presión mediante técnicas de suavizado. La utilización de elementos básicos no lagrangianos puede dar lugar además a la aparición de esquemas de circulación insatisfactorios, cuando existen grandes cantidades de recirculación (ver Fortin², Brooks⁴, Johnson⁵ y Gunzburger¹¹).

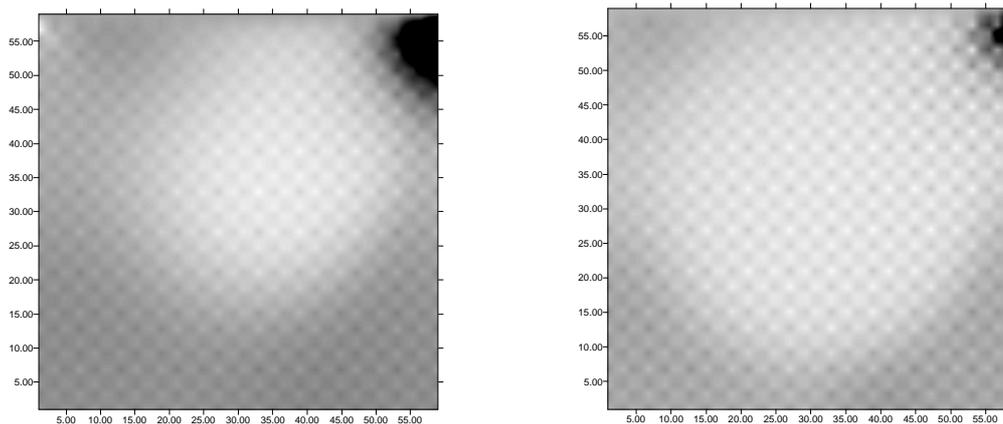


Figura 3: Campo de presiones en la cavidad para n° de Reynolds de 1.000 (izda) y 10.000 (drcha).

5 CONCLUSIONES

La presente formulación consigue resolver el flujo viscoso incompresible para números de Reynolds incluso superiores a 10000, haciendo uso de mallas muy poco tupidas, gracias a la utilización de un algoritmo en SUPG. Los datos obtenidos se encuentran en consonancia por los publicados por Hannani²⁰, y Choi²² para mallas con el mismo grado de refinamiento.

6 REFERENCIAS

- [1] I. Christie, O. F. Griffith, A. R. Mitchell, O. C. Zienkiewicz. Finite element methods for second-order differential equations with significant first order derivatives. *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 10 (1976) 1389-1396.
- [2] Fortin, M. Analysis of the convergence of mixed finite element methods. *RAIRO Anal. Numer.* 11 (1977) 341-354
- [3] J.C. Heinrich, P. S. Huyacorn, A. R. Mitchell and O. Zienkiewicz. An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equations. . *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 11 (1977) 1831-1844.
- [4] A. N. Brooks, T. J. R. Hughes, Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulation for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equation, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 32 (1982) 199-259.
- [5] Johnson, C. And Pitkarant, J. Analysis of some mixed finite element methods related to reduced integration. *Math. Comp.* 38 (1982) 375-400
- [6] U. Ghia, K. N. Ghia and C. T. Shin, High Re solution for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and the multigrid method. *J. Comput Phys*, 48 (1982) 387-411.
- [6] G. F. Carey, J. T. Oden, *Finite Elements*, Prentice Hall, (1983).
- [7] T. J. R. Hughes, M. Mallet, A. Mizukami, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: II Beyond SUPG, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 54 (1986) 341-355.
- [8] A. C. Benim and W. Zinser. A segregated formulation of Navier-Stokes equations with finite elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 57(1986) 223-237
- [9] J. G. Rice and R. J. Schnipke. An equal order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 58 (1986) 135-149.
- [10] T. J. R. Hughes and L. P. Franca. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VII The Stokes problem with various well-posed boundary conditions: Symetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 65 (1987) 85-96.
- [11] M. D. Gunzburger, "Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows, AcademicPress,(1989).
- [12] O. Pironneau, "FEM for Fluids". Willey, 1989.
- [13] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, G. M. Hulbert. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII The Galerkin Least-Squares Method for advective-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 73 (1989) 173-189.

- [14] P. Hansbo, A. Szepessy. A velocity /pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 84 (1990) 175-192.
- [15] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, Mc Graw Hill, (1991).
- [16] N. Kondo, N. Tosaka, T. Nishimura. Third order upwind finite element formulation for incompressible viscous flow problems. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 93 (1991) 169-187.
- [17] L. P. Franca, S. L. Frey *Stabilized finite element methods: II The incompressible Navier-Stokes equation.* *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 99 (1992) 209-233.
- [18] N. Kondo, N. Tosaka, T. Nishimura. Computation of incompressible viscous flow problems by the third order upwind finite element method. . *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 15 (1992) 1013-1024.
- [19] N. Kondo. Third order upwind finite element solutions of high Reynolds number flows. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 112 (1994) 227-251
- [20] S. K. Hannani, M. Stanislas, P. Dupont, Incompressible Navier-Stokes computations with SUPG and GLS formulations-A comparison study. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 124 (1995) 153-170.
- [21] N. Kondo, S. Yamada. Third order upwind finite element computations of the incompressible Navier-Stokes equations. Part I: Computational flow around rectangular cylinders. *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* 127 (1995) 87-97
- [22] H. G. Choi, H. Choi, J. Y. Yoo. A fractional four-step finite element formulation of the unsteady incompressible Navier Stokes equations using SUPG and linear equal-order element methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 143 (1997) 333-348.