

# CONTROL PREDICTIVO FUZZY CON APLICACIÓN A LA DEPURACIÓN BIOLÓGICA DE FANGOS ACTIVADOS

Pedro M. Vallejo Llamas (pedrito@usal.es)  
Dpto. de Informática y Automática. Universidad de Salamanca.  
Plaza de los Caídos s/n, 37008 Salamanca.

Pastora Vega Cruz (pvega@usal.es)  
Dpto. de Informática y Automática. Universidad de Salamanca.  
Plaza de los Caídos s/n, 37008 Salamanca

## Resumen

*El trabajo que aquí se presenta se sitúa en el ámbito del Control Predictivo No Lineal, tomando como base de las predicciones un modelo fuzzy del proceso (FMBPC), obtenido mediante identificación a partir de datos de entrada y salida. En nuestro caso, siguiendo una línea particular introducida previamente por otros autores, tal modelo es tratado adecuadamente para poder expresarlo en forma de ecuaciones de estado, más comprensibles y manejables. Y utilizando estas ecuaciones para el cálculo de las predicciones, junto con la restricción del seguimiento de una trayectoria de referencia, se deducirá una expresión analítica expresa para la Ley de Control. El enfoque elegido reúne dos posibles ventajas, según diversos autores: la idoneidad de los esquemas de control predictivo basados en modelos fuzzy para controlar procesos con una dinámica fuertemente no lineal, por un lado, y la claridad y concreción del procedimiento numérico de obtención de la ley de control predictivo de una manera analítica, frente a los procedimientos basados en optimización. En este artículo se estudia la aplicación de esta estrategia al control de un proceso biológico de depuración de fangos activados, un proceso fuertemente no lineal y multivariable, realizando diversos experimentos de Control Predictivo basado en modelos Fuzzy (FMBPC), mediante simulación.*

**Palabras Clave:** control predictivo, modelo no lineal, identificación fuzzy, espacio de estados, ley de control analítica, depuración de fangos activados.

## 1 INTRODUCCIÓN

El conjunto de estrategias agrupadas bajo la denominación de *Control Predictivo basado en Modelos (MBPC)* [4], constituye una de las alternativas más consolidadas en control de procesos industriales (normalmente multivariables y con restricciones), frente a los esquemas clásicos de

control. Existen numerosas variantes dentro de este grupo, entre ellas las basadas en modelos no lineales del proceso a controlar (*Control Predictivo No Lineal*). De forma abreviada, podemos decir que la estrategia de *Control Predictivo* consiste, en esencia, en la utilización de un modelo del proceso (*modelo de predicciones*) para poder determinar las acciones de control idóneas en cada instante, imponiendo la minimización de alguna función de coste (dependiente del error y generalmente también de los esfuerzos de control, entre otras posibles variables). No existe, sin embargo, una única estrategia de control predictivo, abarcando esta denominación a un amplio conjunto de estrategias que coinciden en el método de determinación de la ley de control que acabamos de describir, pero que admite muchas variantes, dependiendo de varios factores, principalmente del tipo de modelo utilizado para calcular las predicciones y del algoritmo matemático empleado para determinar la ley de control. Dependiendo de la naturaleza del modelo de predicciones (lineal o no lineal), podemos clasificar estas estrategias en dos grandes grupos: *Control Predictivo Lineal* y *Control Predictivo no Lineal*. El segundo grupo está integrado por los métodos que utilizan modelos matemáticos no lineales, como modelos de tipo Fuzzy [12], modelos formalizados mediante Redes Neuronales Artificiales u otras alternativas (...). El presente trabajo pertenece al conjunto de estrategias de control predictivo basadas en modelos no lineales y más concretamente en modelos fuzzy [2, 7 y 9]. En relación con la determinación de la variable de control, la mayoría de las estrategias (tanto con modelo lineal, como con modelo no lineal) utilizan algún tipo de algoritmo matemático de optimización (imponiendo la minimización de alguna función de coste). Sin embargo, en nuestro trabajo tal cálculo no se hace mediante optimización, sino que se lleva a cabo de forma analítica y explícita, que constituye una interesante alternativa.

El modelo de predicciones elegido en este trabajo es

un modelo fuzzy de tipo *Takagi-Sugeno* [10], en el cual las premisas de las reglas son expresiones lógicas difusas relativas a los antecedentes de las reglas, mientras que las conclusiones son combinaciones lineales numéricas de los consecuentes de tales reglas. Los modelos fuzzy son muy apropiados para describir sistemas no lineales, pero existe quizás cierta dificultad a la hora de utilizar las relaciones matemáticas fuzzy y por ello se han formalizado las expresiones del modelo con un formato similar al de las Ecuaciones de Estado, obteniendo así un modelo matemático expresado de manera analítica. Haciendo uso del mismo podremos *despejar* la variable de control que garantice, para cada instante de muestreo, el objetivo de seguimiento deseado. Así, dispondríamos de la variable de control expresada de manera analítica y explícita. Este método podría considerarse una extensión al caso de los sistemas no lineales del denominado *Predictive Functional Control (PFC)*, ideado inicialmente para sistemas lineales.

La estrategia de control predictivo considerada en el presente artículo ha sido abordada antes por otros autores. Más concretamente, en [3] se desarrolla para un caso de estudio con una entrada manipulable y una única salida controlada y sin considerar perturbaciones. En este artículo, sin embargo, se aborda un caso de estudio en el que el proceso es multivariable y se consideran perturbaciones en la entrada del mismo. Se trata de un proceso biológico de depuración de fangos activados en el que se han considerado tres entradas y dos salidas. De las tres entradas, únicamente una de ellas es manipulable y las otras dos son perturbaciones. Y el objetivo es controlar simultáneamente ambas salidas. El modelo fuzzy de predicciones se expresará, como hemos dicho anteriormente, en forma de ecuaciones en el espacio de estados. Estas ecuaciones serán matriciales debido al carácter multivariable del proceso y, por otra parte, tendrán la importante particularidad de que los coeficientes de los distintos términos no serán constantes, puesto que, tras la correspondiente formalización matemática, resultan dependientes del vector premisa instantáneo (más concretamente, de los grados de cumplimiento del vector premisa respecto de las diferentes reglas, en cada instante) y por tanto, en última instancia, dependientes del instante de muestreo, siendo necesario por tanto que tales coeficientes sean actualizados (recalculados) en cada período de tiempo. La existencia de dos perturbaciones y una única entrada manipulada, supone que no será fácil controlar el proceso. Sobre todo, teniendo en cuenta que el proceso considerado es de tipo biológico, fuertemente no lineal y bastante más impredecible

que muchos procesos industriales fisicoquímicos. Abordar un caso de estudio con todas estas complejidades constituye precisamente una de las principales aportaciones del presente artículo.

## 2 CASO DE ESTUDIO

Nuestro caso de estudio consiste en una planta depuradora de aguas residuales (*EDAR*) con tratamiento biológico de depuración mediante fangos activados, simplificada a efectos de estudio. En la figura siguiente (Fig. 1) puede verse el diagrama de bloques entrada/salida del sistema elegido, con las distintas variables implicadas y en la Tabla 1 se muestra, organizada, toda la información relativa a las distintas entradas y salidas consideradas:

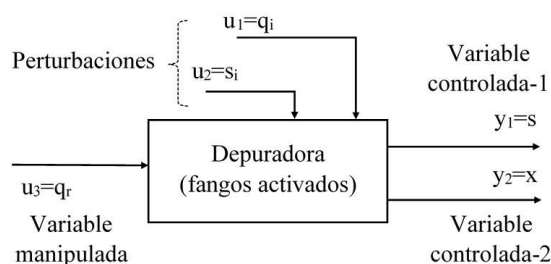


Figura 1: Sistema biológico multivariable (diagrama de bloques entrada/salida)

Tabla 1: Entradas y salidas de la depuradora

Entradas	$u_1$	Perturbaciones	Caudal de agua entrante	$q_i$
	$u_2$		Concentración de sustrato entrante	$s_i$
	$u_3$	Variable Manipulada	Caudal de recirculación de fangos activados	$q_f$
Salidas	$y_1$	Variable Controlada 1	Concentración de sustrato saliente	$s$
	$y_2$	Variable Controlada 2	Concentración de biomasa saliente	$x$

En la depuradora, la eliminación de los contaminantes orgánicos o *sustrato* corre a cargo de la denominada *biomasa*, que son poblaciones de microorganismos que se alimentan de los contaminantes, reaccionando con ellos en presencia de oxígeno, depurando así el agua y generando como subproducto los denominados fangos activados, que son separados mediante sedimentación en el decantador secundario. Una de las principales acciones de control de este tipo de procesos es, precisamente, la recirculación de tales fangos (los

cuales contienen microorganismos digestores), desde el decantador secundario hacia el reactor biológico aerobio, para mantener en un cierto nivel la concentración de microorganismos en el reactor. Y, por supuesto, también influirá en la evolución del proceso de depuración, el grado de aireación en el reactor, acción que se realiza para suministrar el oxígeno que necesitan las reacciones aerobias entre bacterias y contaminantes orgánicos. En nuestro caso, no obstante, y por razones de simplificación, hemos considerado como única variable manipulada el caudal de recirculación de fangos ( $q_r$ ), considerando constante, y con un valor adecuado, el grado de aireación.

El modelo matemático del proceso de depuración utilizado es una simplificación del modelo estándar denominado *Activated Sludge Model No.1*, más conocido por sus siglas en inglés: *ASMI* [6]. La simplificación ha consistido en lo siguiente: por un lado, hemos considerado una planta depuradora con un único reactor aeróbico seguido de un decantador secundario y, por otro, se han considerado únicamente los balances de masa correspondientes al sustrato y a la biomasa (no se ha considerado el del oxígeno). La estructura de la planta y las ecuaciones del modelo considerado pueden verse en [5], teniendo en cuenta la limitación mencionada en cuanto a número de reactores y considerando únicamente la parte del modelo relativa al sustrato y a la biomasa.

### 3 MODELADO FUZZY

En nuestro caso de estudio, el modelado fuzzy constituye una buena alternativa, entre otras posibles, por su potencialidad para capturar dinámicas no lineales. La primera etapa de nuestro trabajo consistió en diseñar y llevar a cabo un proceso de identificación con el objetivo de obtener un modelo fuzzy para el proceso de depuración. La identificación se llevó a cabo partiendo de series de datos numéricos de entrada-salida, determinando previamente las salidas mediante simulación en lazo abierto (con la depuradora representada por su modelo matemático clásico no lineal en forma de ecuaciones diferenciales [5]). Los datos disponibles fueron procesados mediante la herramienta-software de identificación denominada *FMID (Fuzzy Model Identification Toolbox)* [1], junto con algunas adaptaciones y complementos de código que programamos en el entorno de *Matlab & Simulink*. La herramienta fue desarrollada principalmente por el profesor Robert Babuška como soporte software de las teorías y técnicas de modelado e identificación fuzzy descritas en el libro *Fuzzy Modeling for Control* [2]. El mecanismo de identificación de la

herramienta se basa en técnicas de clusterización (mediante el algoritmo de *Gustafson-Kessel*).

#### 3.1 IDENTIFICACIÓN

Uno de los aspectos a destacar del presente trabajo consiste en haber tomado como referencia datos procedentes de campañas de una depuradora industrial real, concretamente de la depuradora municipal de Manresa (provincia de Barcelona). Los registros originales fueron tomados con ocasión del trabajo sobre control predictivo llevado a cabo en su día por Moreno, R. [8]. A partir de esos datos (o de variaciones de ellos), se han realizado numerosas pruebas de identificación. Alguno de los experimentos ya fue presentado con anterioridad [11] y otros, llevados a cabo posteriormente, serán mostrados aquí, ampliando así el estudio con nuevos casos relevantes. Para este artículo se han seleccionado tres casos concretos, correspondientes a tres identificaciones diferentes. Mostraremos de forma gráfica datos de entrada y salida (con el número de muestras en el eje de abscisas) y algunas gráficas de validación. En estas gráficas se incluye el índice de validación denominado  $VAF^1$ , que es uno de los que se usa habitualmente para dar validez a los modelos identificados, comparando la salida *real* con la salida *estimada* del modelo. En nuestro estudio, la salida *real* es una salida obtenida en simulación y la salida *estimada* se obtiene aplicando las mismas entradas al modelo fuzzy identificado.

##### 3.1.1 Caso 1

En las Figuras 2 y 3 vemos la representación gráfica de los datos de entrada y salida y en la Figura 4 se muestran los resultados de validación de este caso:

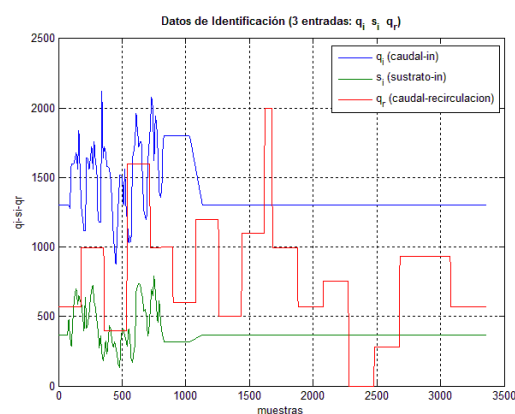


Figura 2: Datos de identificación del caso 1 ( $q_i$ ,  $s_i$ ,  $q_r$ )

<sup>1</sup>  $VAF$ : Percentile variance accounted for between two signals

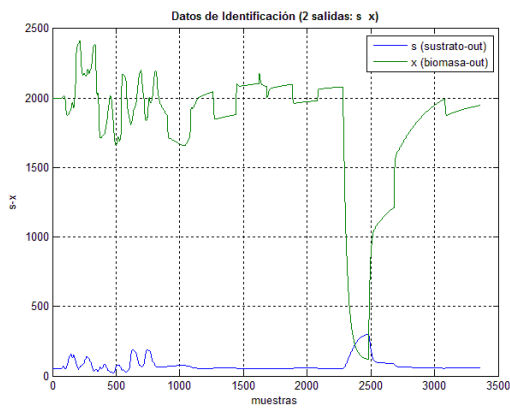


Figura 3: Datos de identificación del caso 1 (s, x)

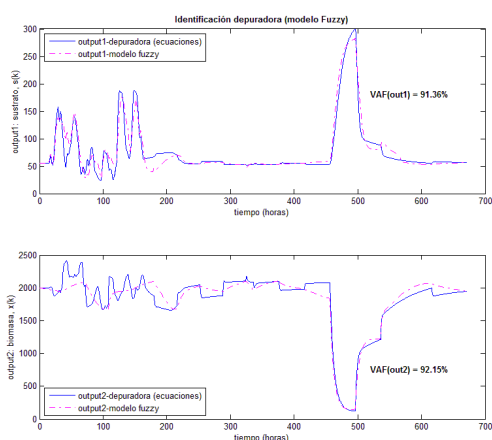


Figura 4: Validación del modelo fuzzy (caso 1)

### 3.1.2 Caso 2

Se utilizaron para la validación datos diferentes a los de identificación. Vemos la gráfica de validación en la figura siguiente (Fig. 5):

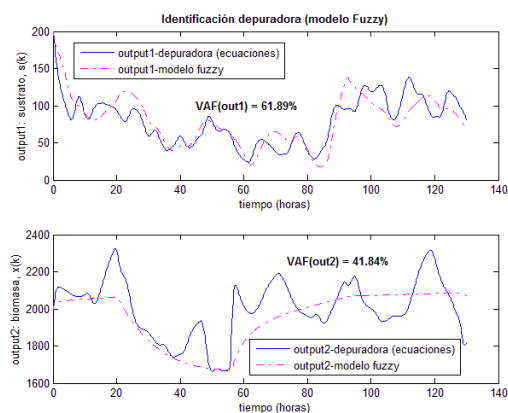


Figura 5: Validación del modelo fuzzy (caso 2)

### 3.1.3 Caso 3

En el tercer caso considerado, los datos de validación también fueron diferentes a los datos de identificación. Pero la principal característica de este caso es que, en los parámetros de configuración referentes a las hipótesis de la dinámica del proceso, se ha añadido un parámetro que en los otros dos casos se consideró nulo. Concretamente, en este caso no se ha despreciado en la dinámica del proceso la influencia directa de  $q_i$ . Como consecuencia de ello, el índice de validación es bastante mejor que el del caso 2. En la figura siguiente, (Fig. 6), se muestra la gráfica de validación correspondiente a este caso:

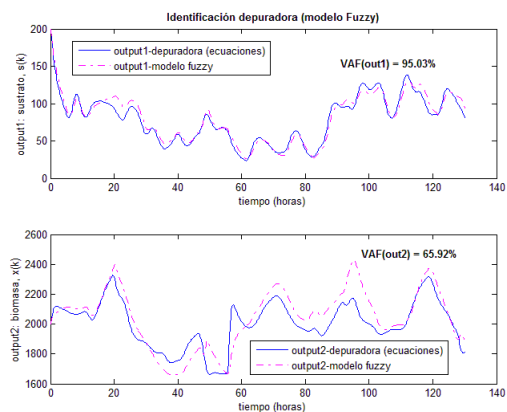


Figura 6: Validación del modelo fuzzy (caso 3)

## 3.2 MODELOS FUZZY IDENTIFICADOS

Los modelos fuzzy identificados son modelos del tipo *Takagi-Sugeno* [10], los cuales están compuestos por un conjunto de reglas *if-then*, cada una de las cuales representa un submodelo lineal. El antecedente o premisa de cada una de las reglas se compone de varias proposiciones simples conectadas mediante operadores lógicos “and”. Las proposiciones simples comparan cada componente del vector antecedente con un cierto valor o conjunto difuso. Y el consecuente o conclusión de cada regla es una combinación lineal de las variables que forman el vector consecuente más un término independiente (submodelo lineal).

Mostraremos a continuación, a modo de ejemplo, sólo las reglas de la salida-1 del modelo fuzzy identificado correspondiente al caso 1 (Tabla 2). Las demás reglas tendrán una estructura similar, pero con coeficientes diferentes y con más o menos componentes para los vectores antecedente y consecuente, como es lógico:

Tabla 2: Modelo *Takagi-Sugeno* para  $y_1 = s(k)$ 

<p>1. if <math>y_1(k-1)</math> is <math>A_{11}</math> and <math>y_2(k-1)</math> is <math>A_{12}</math> and <math>u_2(k-1)</math> is <math>A_{13}</math> and <math>u_3(k-1)</math> is <math>A_{14}</math> and <math>u_3(k-2)</math> is <math>A_{15}</math> then <math>y_1(k) = (7.10) \cdot 10^{-1} \cdot y_1(k-1) - (1.13) \cdot 10^{-3} \cdot y_2(k-1) + (5.50) \cdot 10^{-2} \cdot u_2(k-1) + (1.27) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-1) - (1.39) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-2) - (1.29) \cdot 10^0</math></p> <p>2. if <math>y_1(k-1)</math> is <math>A_{21}</math> and <math>y_2(k-1)</math> is <math>A_{22}</math> and <math>u_2(k-1)</math> is <math>A_{23}</math> and <math>u_3(k-1)</math> is <math>A_{24}</math> and <math>u_3(k-2)</math> is <math>A_{25}</math> then <math>y_1(k) = (5.91) \cdot 10^{-1} \cdot y_1(k-1) - (9.77) \cdot 10^{-3} \cdot y_2(k-1) + (2.48) \cdot 10^{-2} \cdot u_2(k-1) + (4.93) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-1) - (3.41) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-2) + (5.84) \cdot 10^0</math></p> <p>3. if <math>y_1(k-1)</math> is <math>A_{31}</math> and <math>y_2(k-1)</math> is <math>A_{32}</math> and <math>u_2(k-1)</math> is <math>A_{33}</math> and <math>u_3(k-1)</math> is <math>A_{34}</math> and <math>u_3(k-2)</math> is <math>A_{35}</math> then <math>y_1(k) = (9.33) \cdot 10^{-1} \cdot y_1(k-1) - (6.05) \cdot 10^{-3} \cdot y_2(k-1) + (2.47) \cdot 10^{-2} \cdot u_2(k-1) - (1.07) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-1) + (1.01) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-2) + (7.27) \cdot 10^0</math></p> <p>4. if <math>y_1(k-1)</math> is <math>A_{41}</math> and <math>y_2(k-1)</math> is <math>A_{42}</math> and <math>u_2(k-1)</math> is <math>A_{43}</math> and <math>u_3(k-1)</math> is <math>A_{44}</math> and <math>u_3(k-2)</math> is <math>A_{45}</math> then <math>y_1(k) = (8.98) \cdot 10^{-1} \cdot y_1(k-1) - (3.73) \cdot 10^{-2} \cdot y_2(k-1) + (3.11) \cdot 10^{-2} \cdot u_2(k-1) - (5.23) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-1) + (5.64) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-2) + (6.39) \cdot 10^1</math></p> <p>5. if <math>y_1(k-1)</math> is <math>A_{51}</math> and <math>y_2(k-1)</math> is <math>A_{52}</math> and <math>u_2(k-1)</math> is <math>A_{53}</math> and <math>u_3(k-1)</math> is <math>A_{54}</math> and <math>u_3(k-2)</math> is <math>A_{55}</math> then <math>y_1(k) = (1.50) \cdot 10^0 \cdot y_1(k-1) + (5.37) \cdot 10^{-3} \cdot y_2(k-1) - (3.48) \cdot 10^{-2} \cdot u_2(k-1) - (1.90) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-1) + (8.47) \cdot 10^{-3} \cdot u_3(k-2) - (1.39) \cdot 10^{-1}</math></p> <p>6. if <math>y_1(k-1)</math> is <math>A_{61}</math> and <math>y_2(k-1)</math> is <math>A_{62}</math> and <math>u_2(k-1)</math> is <math>A_{63}</math> and <math>u_3(k-1)</math> is <math>A_{64}</math> and <math>u_3(k-2)</math> is <math>A_{65}</math> then <math>y_1(k) = (9.65) \cdot 10^{-1} \cdot y_1(k-1) - (5.22) \cdot 10^{-3} \cdot y_2(k-1) + (2.98) \cdot 10^{-2} \cdot u_2(k-1) + (1.93) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-1) - (2.89) \cdot 10^{-2} \cdot u_3(k-2) - (3.43) \cdot 10^{-1}</math></p>
--

Cada una de las reglas representa un submodelo lineal y las componentes del vector consecuente indican las dependencias del submodelo. En nuestro caso de estudio, el vector antecedente coincide con el vector consecuente y consideraremos un vector  $\mathbf{x}_a = \mathbf{x}$ , común a ambas salidas, constituido por:  $[y_1(k-1), y_2(k-1), u_1(k-1), u_2(k-1), u_2(k-1), u_2(k-2)]$ . La expresión numérica global para cada una de las dos salidas del modelo fuzzy se obtendrá combinando todas las reglas y aplicando un método de cómputo numérico, como el método del centroide, que tiene en cuenta los consecuentes de todas las reglas, con la ponderación adecuada. Se concreta matemáticamente esta idea en la expresión (1):

$$\tilde{y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{m_i} \mu_{A_{j1}}(x_{a1}) \mu_{A_{j2}}(x_{a2}) \dots \mu_{A_{jp_i}}(x_{ap_i}) \phi_{ij}(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^{m_i} \mu_{A_{j1}}(x_{a1}) \mu_{A_{j2}}(x_{a2}) \dots \mu_{A_{jp_i}}(x_{ap_i})} \quad (1)$$

$i = 1, 2$   
 $j = 1, 2, \dots, m_i$   
 $m_i$ : número de reglas de la salida  $y_i$

y con las siguientes funciones de pertenencia:

$$\beta_{ij}(x_a) = \frac{\mu_{A_{j1}}(x_{a1}) \mu_{A_{j2}}(x_{a2}) \dots \mu_{A_{jp_i}}(x_{ap_i})}{\sum_{j=1}^{m_i} \mu_{A_{j1}}(x_{a1}) \mu_{A_{j2}}(x_{a2}) \dots \mu_{A_{jp_i}}(x_{ap_i})} \quad (2)$$

$i = 1, 2$   
 $j = 1, 2, \dots, m_i$   
 $m_i$ : número de reglas de la salida  $y_i$

la expresión numérica de la salida quedará así:

$$\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^{m_i} \beta_{ij}(x_a) \phi_{ij}(\mathbf{x}) \quad (3)$$

$i = 1, 2$   
 $j = 1, 2, \dots, m_i$   
 $m_i$ : número de reglas de la salida  $y_i$

### 3.3 FORMALIZACIÓN EN EL ESPACIO DE ESTADOS

La reformulación de las reglas fuzzy en forma de ecuaciones de estado supondrá la ventaja de poder manipularlas de manera analítica, pudiendo realizar el cálculo de predicciones del algoritmo de control predictivo y expresar la ley de control en forma explícita, que es una de las principales aportaciones de nuestro trabajo, siguiendo la línea iniciada previamente por otros autores [3]. Resumiremos a continuación lo más relevante del correspondiente desarrollo, ya presentado y descrito en [11].

#### 3.3.1 Modelo fuzzy en el espacio de estados

Realizando las adecuadas definiciones matemáticas previas, podemos agrupar conjuntamente las reglas de nuestros modelos fuzzy tipo *Takagi-Sugeno* en las siguientes Ecuaciones de Estado (matriciales):

$$\mathbf{z}_m(k+1) = \bar{\mathbf{A}}_m \mathbf{z}_m(k) + \bar{\mathbf{B}}_m \mathbf{u}_a(k) + \bar{\mathbf{R}}_m \quad (4)$$

$$\mathbf{y}_m(k) = \bar{\mathbf{C}}_m \mathbf{z}_m(k) \quad (5)$$

siendo las *Matrices de Estado* y los coeficientes matriciales:

$$\bar{\mathbf{A}}_m = \sum_{j=1}^{mr} (\beta_j(x_a) \mathbf{A}_{m_j}); \quad \bar{\mathbf{B}}_m = \sum_{j=1}^{mr} (\beta_j(x_a) \mathbf{B}_{m_j}); \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_m = \sum_{j=1}^{mr} (\beta_{j12}(x_a) \mathbf{C}_{m_j}); \quad \bar{\mathbf{R}}_m = \sum_{j=1}^{mr} (\beta_j(x_a) \mathbf{R}_{m_j}) \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_{m_j} = \begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & 0 & b_{j2} \\ 0 & a_{j2}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{mr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{mr} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}_{m_j} = \begin{pmatrix} b_{j3} & b_{j4} \\ b_{j3}^* & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_{m_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{R}_{m_j} = \begin{pmatrix} r_j \\ r_j^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

#### 3.3.2 Dependencia temporal de los coeficientes de las ecuaciones de estado

Una particularidad importante de las ecuaciones de estado obtenidas es que los coeficientes matriciales  $\bar{\mathbf{A}}_m$ ,  $\bar{\mathbf{B}}_m$ ,  $\bar{\mathbf{C}}_m$  y  $\bar{\mathbf{R}}_m$  dependen del vector antecedente

$x_a$  (a través de  $\beta_j(x_a)$ ) y, por tanto, también dependen del instante de tiempo  $k$ -ésimo, porque  $x_a$  depende del tiempo. Será necesario, por tanto, recalcular tales coeficientes en cada iteración o período de simulación, tras haber actualizado el vector antecedente  $x_a$  y también  $\beta_j(x_a)$ . El comportamiento de nuestro sistema multivariable no lineal identificado mediante un modelo fuzzy ha quedado finalmente representado por un sistema de ecuaciones de estado con coeficientes dependientes del tiempo. En [3] se citan dos referencias teóricas sobre la asociación de sistemas que tengan dinámicas no lineales con sistemas lineales variantes en el tiempo (Leith, D.J., Leithead, W.E., 1998 y 1999).

#### 4 EXPERIMENTOS DE CONTROL PREDICTIVO (FMBPC)

La estrategia de control predictivo empleada consiste en deducir una ley de control analítica y explícita, haciendo uso de las ecuaciones de estado detalladas en (4) y (5) e imponiendo para cada una de las dos salidas la restricción del seguimiento de sendas trayectorias de referencia para un cierto horizonte de predicción. No es posible incluir aquí el desarrollo matemático realizado, por lo que nos centraremos en presentar los resultados de los experimentos en los que se ha usado la ley de control deducida.

##### 4.1 SIMULACIÓN

Los experimentos de control predictivo en simulación han sido desarrollados en el entorno *Matlab & Simulink*. El soporte principal ha sido un diagrama de bloques de *Simulink*, siendo los bloques más significativos el del controlador predictivo y el de la depuradora. El funcionamiento del bloque controlador se ha basado en una *s-function* de *Simulink*, en la que se ha escrito en *Matlab* el código necesario para realizar los cálculos del algoritmo de control predictivo basado en la ley de control analítica obtenida (entre ellos, la actualización en cada iteración de los coeficientes de las ecuaciones).

##### 4.2 RESULTADOS

Se hicieron numerosas pruebas, con distintas perturbaciones de entrada y diferentes referencias de las salidas, para el horizonte de predicción ( $H$ ) y para otros parámetros. Resumiremos los resultados obtenidos presentando las gráficas de la evolución temporal de las variables controladas, es decir, de la concentración de sustrato en el efluente,  $s$  (mg/l) y de la concentración de biomasa en el reactor,  $x$  (mg/l), así como la gráfica de la evolución temporal de la variable de control, es decir, la del caudal de recirculación,  $q_r$  (m<sup>3</sup>/h), que estará determinado por el

algoritmo de control predictivo. Se incluyen también, en las gráficas de  $s$  y  $x$ , las evoluciones de las perturbaciones (caudal de entrada,  $q_i$  (m<sup>3</sup>/h) y concentración de sustrato en la entrada,  $s_i$  (mg/l)). En las pruebas llevadas a cabo se consideraron diferentes valores de referencia para las dos salidas, estando principalmente tales valores en el intervalo de 45 mg/l a 60 mg/l para  $s_{ref}$  y en el de 700 mg/l a 2000 mg/l para  $x_{ref}$ . El intervalo de tiempo de simulación elegido fue de 0 a 166 horas. En ninguno de los casos seleccionados fue necesario imponer cotas al incremento de la acción de control. Sin embargo, hay casos en los que sí sería preciso hacerlo para evitar inestabilidades, pero el análisis de tal problema requiere un estudio más amplio. También sería necesario un estudio complementario para el horizonte de predicción (parámetro muy importante en control predictivo). Se indican los horizontes de predicción usados para los resultados mostrados.

##### 4.2.1 Modelo identificado en 3.1.1, con $H=6$

Evoluciones de las salidas (más perturbaciones):

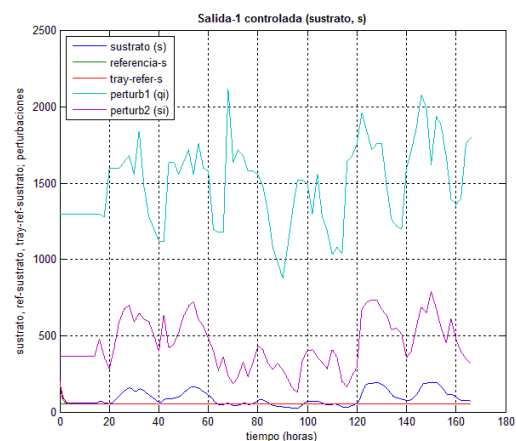


Figura 7. Sustrato y perturbaciones (identif. 3.1.1)

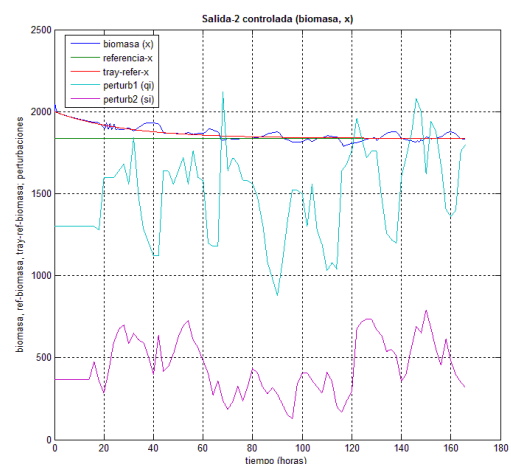


Figura 8. Biomasa y perturbaciones (identif. 3.1.1)

Acción de control predictivo fuzzy:

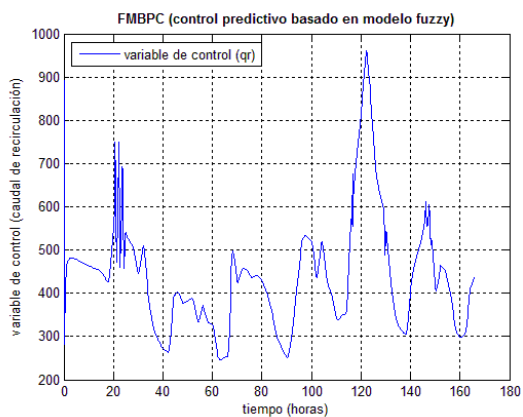


Figura 9. Control predictivo,  $q_r$  (identif. 3.1.1)

Acción de control predictivo fuzzy:

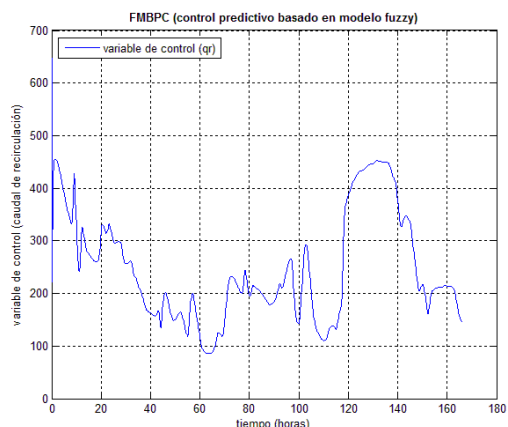


Figura 12. Control predictivo,  $q_r$  (identif. 3.1.2)

4.2.2 Modelo identificado en 3.1.2, con H=3

Evoluciones de las salidas (más perturbaciones):

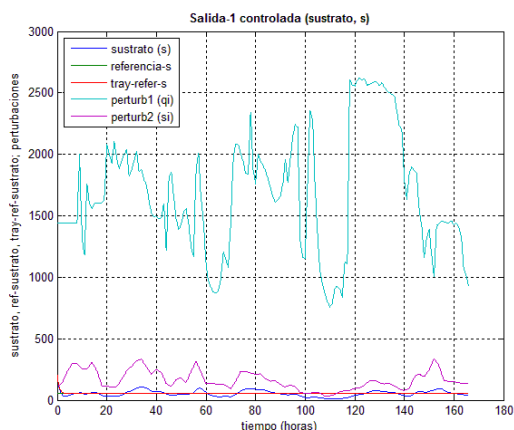


Figura 10. Sustrato y perturbaciones (identif. 3.1.2)

4.2.3 Modelo identificado en 3.1.3, con H=250

Evoluciones de las salidas (más perturbaciones):

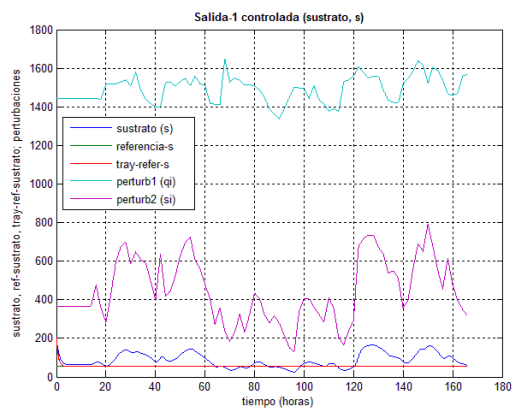


Figura 13. Sustrato y perturbaciones (identif. 3.1.3)

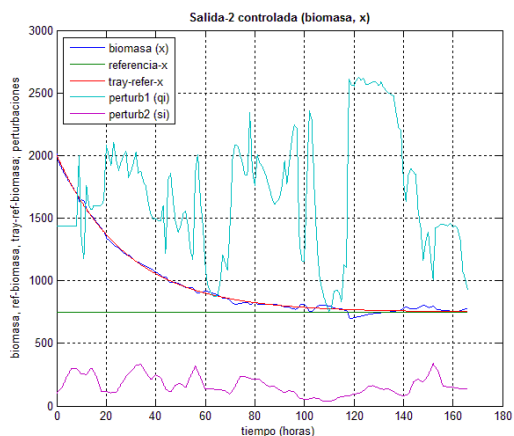


Figura 11. Biomasa y perturbaciones (identif. 3.1.2)

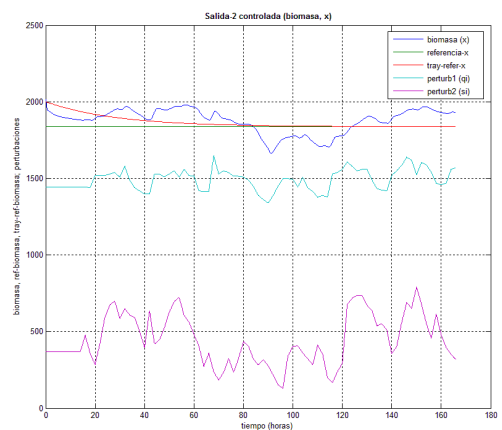


Figura 14. Biomasa y perturbaciones (identif. 3.1.3)

Acción de control predictivo fuzzy:

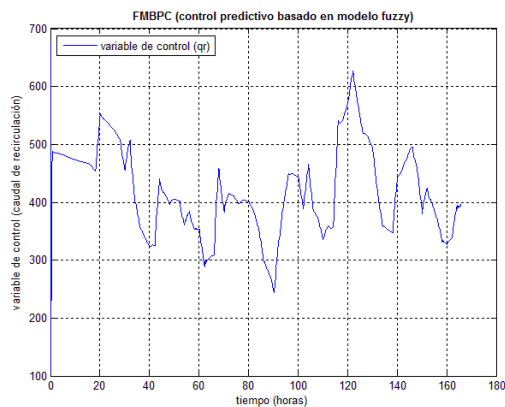


Figura 15. Control predictivo,  $q_r$  (identif. 3.1.3)

## 5 CONCLUSIONES

En los experimentos realizados se ha aplicado una particular metodología de control predictivo fuzzy a un proceso con dinámica compleja, expresando la ley de control en forma analítica y explícita. En todos los casos presentados, la respuesta del sistema controlado (variables  $s$  y  $x$ ) parece razonablemente satisfactoria, teniendo en cuenta la gran dificultad que supone controlar un sistema multivariable, altamente no lineal y de carácter biológico. Además, se ha extendido a un caso multivariable y con perturbaciones, un método de obtención de la ley de control predictivo en forma analítica y explícita, probado previamente para un sistema no multivariable, sin perturbaciones y no tan complejo.

En el proceso de estudio e investigación que precede a la presentación de este artículo se han seguido y se siguen varias líneas de estudio, tanto relativas a la *realizabilidad* y utilidad, para sistemas complejos, de los métodos y algoritmos aquí propuestos, como a la influencia de diversos factores, como las características dinámicas del modelo identificado, el horizonte de predicción o la interrelación entre las referencias de las salidas (sistema multivariable con salidas acopladas), entre otros. Así mismo, se evalúan actualmente posibles estudios complementarios o mejoras del algoritmo propuesto, incorporando restricciones en el cálculo de la ley de control, a satisfacer mediante optimización, con el objetivo de evitar inestabilidades.

### Agradecimientos

Los autores agradecen al MINECO del Estado Español la financiación del proyecto DPI2015-67341-C02-01, en el marco del cual se lleva a cabo esta investigación.

### Referencias

- [1] Babuška, R. (1998-2001). Fuzzy Modeling and Identification Toolbox (FMID)-User's Guide.
- [2] Babuška, R. (1998). Fuzzy Modeling for Control. Kluwer Academic Publishers, Boston, USA.
- [3] Blažič, S., and Škrjanc, I. (2007). Design and Stability Analysis of Fuzzy Model-based Predictive Control—A Case Study. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 49, 279–292.
- [4] Camacho, E.F., y Bordons, C. (1998). Model Predictive Control. Springer, Great Britain.
- [5] Francisco, M., y Vega, P. (2006). Diseño Integrado de procesos de depuración de aguas utilizando control predictivo basado en modelos. *RIAI-Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*, ISSN: 1697-7912, 3(4), 88-98.
- [6] Henze, M., Grady, C. P. L. Jr, Gujer, W, Marais, G v R & Matsuo, T., 1987. Activated Sludge Model No. 1. IAWPRC Scientific and Technical Reports No. 1. London, UK.
- [7] Mollow, S., 2002. Fuzzy Control of Multi-Input Multi-Output Processes. PhD dissertation. Delft University of Technology (Netherlands).
- [8] Moreno, R. (1994). Estimación de Estados y Control Predictivo de Proceso de Fangos Activados. Tesis Doctoral. Facultat de Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona (Spain).
- [9] Roubos, J.A., Mollov, S., Babuška, R., Verbruggen, H.B., (1999). *Fuzzy model-based predictive control using Takagi-Sugeno models*. *International Journal of Approximate Reasoning*, 22(1-2), 3-30.
- [10] Takagi, T., Sugeno, M., (1985). *Fuzzy Identification of Systems and its Application to Modeling and Control*. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 15 (1), 116–132.
- [11] Vallejo, P. y Vega, P. (2017). Proceedings del XV Simposio CEA de Ingeniería de Control. Universidad de Salamanca, 9-10 de febrero de 2017, Salamanca (Spain).
- [12] Zadeh, and Lotfi A., (1990). Fuzzy Sets and Systems. *International Journal of General Systems*, 17 (2), 129-138.