UNIVERSIDADE DA CORUÑA

Facultade de Economía e Empresa

Traballo de fin de mestrado

A formación de carteiras óptimas: Modelos de Markowitz, Sharpe e Black – Litterman

Elena Varela Pedreira

Titora: Susana Iglesias Antelo

Mestrado Universitario en Banca e Finanzas

Ano 2018

Traballo de Fin de Mestrado presentado na Facultade de Economía e Empresa da Universidade da Coruña para a obtención do Mestrado Universitario en Banca e Finanzas

Resumo

A teoría que se encarga de determinar cal é a mellor alternativa para crear carteiras que sexan óptimas é a Teoría de Carteiras. Esta teoría encárgase de determinar cal é a mellor combinación de activos para un inversor, é dicir, definir tanto a composición da carteira como a proporción de cada activo dentro dela. Lévase a cabo a través dos modelos de optimización. Neste traballo imos traballar con tres deles: o modelo de Markowitz, o modelo de Sharpe e o modelo de Black – Litterman, co obxectivo de explicar o seu funcionamento e comparalos para resaltar as súas semellanzas e discrepancias. Primeiro realizarase unha breve introdución á Teoría de Carteiras e posteriormente unha aproximación teórica e práctica a cada un dos tres modelos para comprender o seu funcionamento e o seu uso na realidade práctica actual.

Palabras clave: Teoría de carteiras, modelo de Markowitz, modelo de Sharpe, modelo de Black – Litterman, xestión de carteiras, optimización.

Abstract

The theory that takes care of deciding which is the best alternative to create optimal portfolios is the Portfolio Theory. This theory is responsible of determining which is the best combination of actives for an investor, that is, defining the composition of the portfolio as well as the proportion of each active inside it. It is carried out through the optimization models. In this project we are going to work with three of them: Markowitz's model, Sharpe's model and Black-Littermans' model, with the objective of explaining their functioning and comparing them to stand out their similarities and differences. First, a brief introduction to the Portfolio Theory will be done and afterwards a theoretical and practical aproachment to each of the three models in order to understand its functioning and its use in current practice reality.

Keywords: portfolio theory, Markowitz model, Sharpe model, Black-Litterman model, portfolio management, optimization.

Índice

Índice de gráficos

Índice de táboas

Introdución

Os inversores son cada vez máis sofisticados e buscan carteiras con resultados que se adapten mellor as súas necesidades. É lóxico que, polo tanto, se trate de obter métodos que consigan isto dunha maneira máis precisa. Por isto, a construción de carteiras converteuse nun dos temas de investigación máis recorrentes da xestión de activos nos últimos anos.

Un inversor racional debería buscar sempre a mellor combinación de activos que se adapte ás súas necesidades de rendibilidade esperada e risco: a súa carteira óptima. A clave é determinar tanto que activos entran na carteira como a proporción de cada un dentro dela. A Teoría de Carteiras trata de axudar ao inversor neste sentido, procurando a formación de carteiras eficientes: que teñan a máxima rendibilidade para un determinado nivel de risco ou un mínimo risco para unha determinada rendibilidade. Dentro desta teoría desenvolvéronse distintos modelos para obter estas carteiras eficientes e óptimas para os inversores, entre os que destacan o modelo de optimización de Markowitz, o de Sharpe e o de Black – Litterman.

O primeiro en presentar un modelo para a optimización de carteiras, co obxectivo de minimizar o risco ante unha rendibilidade dada ou maximizar a rendibilidade ante un risco dado, foi Markowitz (1952). Aínda que é o modelo que máis se estuda de maneira teórica, atopouse que presentaba moitos problemas para a súa aplicación práctica: dificultade de cálculo, emprego de datos históricos, resultados pouco intuitivos, moita sensibilidade ás rendibilidades esperadas, inestabilidade... Máis tarde, Sharpe (1963) tratou de resolver un destes problemas e propuxo un modelo que simplificaba o cálculo, relacionando a rendibilidade esperada de cada activo coa rendibilidade do mercado. Desta maneira non é preciso calcular todas as covarianzas das rendibilidades dos activos, pero precisamente por isto a súa medida do risco infravalora este. Polo demais, o seu modelo de optimización presenta os mesmos problemas que o de Markowitz, excepto o de dificultade de cálculo. Os outros problemas sinalados tratarán de resolvelos Black e Litterman co seu modelo matemático (1992). Partirán dunha carteira de equilibrio baseada en datos actuais do mercado (non estimados) e logo incorporarán, resolvendo por optimización inversa, as opinións dos inversores sobre o mercado.

O obxectivo deste traballo é explicar o funcionamento dos tres modelos citados anteriormente e comparalos para resaltar as súas semellanzas e discrepancias. Primeiro realizarase unha breve introdución á Teoría de Carteiras e posteriormente unha aproximación teórica a cada un dos tres modelos para comprender o seu funcionamento e o seu uso na realidade práctica actual. Coa finalidade de ilustrar o seu funcionamento, realizarase un exemplo práctico de cada modelo. Para esta parte experimental usaremos datos de dez empresas do IBEX35 referidos aos últimos catro anos e o propio IBEX35 como índice de mercado. Con eles formaranse catro carteiras diferentes (carteira de equilibrio, de Markowitz, de Sharpe e de Black – Litterman) coa finalidade de poder comparar a súa composición e o seu risco e rendibilidade.

1. Introdución á teoría de carteiras

Un inversor, normalmente, non inviste só nunha clase de activos, senón que tende a investir en varios activos financeiros diferentes. Esta cesta de diferentes activos é o que se coñece como “carteira”. Temos que diferenciar entre carteiras estáticas (cando a inversión se realiza nun período único que, aínda que sexa longo, suponse que se toma a decisión ao principio e mantense durante todo o período) e carteiras dinámicas (son aquelas nas que se planifican distintos períodos e podemos obter unha solución diferente para cada período).

A Teoría de Carteiras é o conxunto de teorías que axudan ao inversor a decidir en que activos investir e como formar a mellor combinación para recibir unha maior rendibilidade cun risco determinado ou estar exposto a un menor risco para alcanzar unha rendibilidade determinada.

Para a formación de carteiras óptimas temos que partir do suposto de que os inversores son persoas racionais e que van desexar manter só as carteiras que sexan eficientes. Os inversores serán racionais sempre que prefiran a opción que lles reporte maiores beneficios (gañar máis que menos) e menor risco (vai preferir a rendibilidade máis certa). Hai que destacar que o comportamento dos individuos non vai ser sempre racional, senón que se poden dar comportamentos irracionais nos inversores, pero, en xeral, agárdase que os inversores profesionais actúen racionalmente. Para o desenvolvemento deste traballo imos supoñer que os inversores analizados van ser sempre racionais.

A Teoría de Carteiras ponse en práctica a través de modelos de optimización entre os que podemos destacar: o modelo de Markowitz, o modelo de Sharpe e o modelo de Black – Litterman dos que falaremos máis adiante.

Neste primeiro apartado, vaise facer unha breve aproximación aos conceptos máis relevantes desta Teoría de Carteiras. Falarase dos seus elementos fundamentais nos que se destacarán o risco e o rendemento, dos diferentes métodos de xestión (activa e pasiva) e da importancia que ten a diversificación na creación de carteiras óptimas.

1.1 Elementos fundamentais da xestión de carteiras

Un inversor racional buscará sempre investir en carteiras eficientes e para iso terá que analizar todos os elementos fundamentais destas cestas de activos. Para que as carteiras sexan eficientes, os inversores deberán ter en conta, medir e valorar os dous elementos básicos da xestión de carteiras, que serán:

- Rendibilidade: podemos definila como a capacidade para crear beneficios relativos a partir duns recursos iniciais. É o primeiro no que se vai fixar o inversor porque será o elemento que lle reportará beneficios económicos que é, posiblemente, a finalidade máis estendida das inversións.
- Risco: é a posibilidade de que teña lugar unha situación ou suceso económico que se escape das nosas previsións. Podemos dividilo en dúas partes:
    - Risco obxectivo: "*correspóndese co propio activo e é totalmente independente do que poida ter ou desexar o propio inversor" (*Villalba, 2016).
    - Risco subxectivo: é a diferente concepción que vai ter cada inversor. Este vai depender das súas propias características persoais: idade, necesidades futuras de liquidez, aversión ao risco[1], sentimento ante as perdas...

A medida destes dous elementos faise de forma conxunta. Normalmente o risco mídese coa varianza ou volatilidade (variación do prezo ou da rendibilidade) e é importante analizalo xunto co rendemento. Teñen unha relación directa: a maior risco, agardamos un maior rendemento para realizar a inversión (asumimos o risco só se iso

[1] Un inversor pode ter diferentes concepcións do risco dependendo das súas características persoais: pode ser amante do risco (tomará decisións moi arriscadas) ou adverso ao risco (tratará de fuxir de situacións con risco). Dentro de cada unha destas tres categorías o inversor pode ter distintos graos ou posturas ante o risco.

nos vai reportar uns maiores beneficios) e viceversa (decidiremos ter un menor rendemento a cambio de inversións máis seguras).

1.2 A diversificación

Á hora de investir nun mercado financeiro o inversor pode decidir adoptar diferentes posturas: investir todo nun activo ou diversificar entre varios.

Cando un inversor decide "apostar" todos os recursos que desexa investir nun só activo, porque se prevé que este vai subir de prezo, poden darse dúas situacións: que acerte e o prezo do activo se incremente, facéndolle gañar moito diñeiro, ou que non acerte e perda todo ou gran parte do capital investido. Pero este comportamento non é un comportamento moi racional porque é unha maneira de investir moi volátil, xa que, ten posibilidade dunhas ganancias moi grandes pero tamén unhas perdas potenciais moi importantes.

Unha maneira máis segura de investir será realizando un proceso de diversificación. Cando un inversor decide diversificar o que está facendo é "non apostar todo á mesma carta", é dicir, multiplicando as súas posibilidades de ganancia e reducindo as de perda. Todos os activos son diferentes e teñen distintas volatilidades, é dicir, non varían da mesma maneira (cando o mercado sube, hai activos financeiros que suben e outros que baixan a súa cotización). Por iso, se investimos en activos que varíen de diferente maneira, a nosa carteira terá unha variación inferior cando se produza un cambio no mercado financeiro porque as caídas duns valores son compensadas con subidas doutros.

Dende o punto de vista teórico e práctico investir nun só activo pensando que imos obter unha rendibilidade moi alta é equivocado. Sería erróneo afirmar que non se poden obter beneficios importantes, pero de conseguilos, sería a cambio de ter un risco de sufrir grandes perdas, polo que, ningunha teoría racional vai avalar este comportamento. En consecuencia, é fundamental diversificar para escoller ben as carteiras.

A pesar das vantaxes que presenta a diversificación, pódense destacar algúns inconvenientes desta práctica, por exemplo nos seguintes dous casos:

- Para un inversor pequeno realizar diversificación pode resultar moi caro, sobre todo se busca diversificar comprando títulos de fóra do país de orixe debido aos elevados custos de transacción. Isto pode facer que non lle compensen as vantaxes da diversificación.
- Para un inversor que realiza diversificación fóra do seu país de orixe e, sobre todo, fóra da propia divisa. Isto fará que teña moito máis risco debido á

volatilidade da divisa na que se diversifica, do risco do país ou calquera outro risco que poida ter o mercado no que vai investir.

Moitas veces os inversores opóñense a “non poñer todos os ovos na mesma cesta”, polo que realizan unha diversificación insuficiente porque se senten máis incómodos cando hai moita incerteza ou ambigüidade. Ademais, séntense máis cómodos coa familiaridade sobre o ámbito no que deciden (é dicir, cando coñecen). Estes dous sesgos (de ambigüidade e familiaridade) levan a que se invista máis no mercado doméstico do que recomenda a diversificación eficiente. Se a diversificación é insuficiente hai un aumento do risco do inversor, isto é, para a mesma rendibilidade esperada, o inversor pouco diversificado ten unha maior volatilidade e, en consecuencia, a súa carteira será menos eficiente.

Na exposición que se fará posteriormente de modelos de optimización de carteiras poñerase de manifesto a importancia que ten para a eficiencia destas o proceso de diversificación.

1.3 Métodos de xestión de carteiras

Existen dous métodos de xestión de carteiras básicos: a xestión activa e a xestión pasiva.

1.3.1 Métodos de xestión activa

A xestión activa é a metodoloxía máis usada na análise de carteiras. Estes métodos tratan de atopar a mellor combinación de rendibilidade e risco nunha carteira, é dicir, a carteira que mellor se adapte as necesidades do inversor. A xestión activa úsase para tratar de bater ao mercado con reaxustes periódicos na composición das carteiras. Estes métodos están baseados na análise fundamental e técnica:

- Análise fundamental: é unha metodoloxía que usan os analistas para determinar o prezo que debería ter cada activo financeiro (valor obxectivo ou fundamental), é dicir, calcúlase o verdadeiro valor do título (non a súa cotización, senón o seu prezo obxectivo). Para o cálculo úsase o valor actual dos fluxos monetarios futuros que se recibirán como consecuencia de posuír o activo financeiro que estamos valorando.

  Calcúlase mediante ratios (económicas, financeiras e bursátiles) a través dos estados financeiros das entidades, técnicas de valoracións de empresas, previsións económicas e análises do entorno e, en xeral, calquera tipo de información adicional que poida afectar ao valor do título.

Os problemas deste método serán adiviñar a previsión de beneficios futuros ou fluxos futuros como o cash flow, EBITDA... e a taxa de desconto a aplicar nos cálculos (tendo en conta as taxas futuras de interese e a prima de risco). Por todo isto, os resultados da análise fundamental son aproximacións e non se poden tomar como “verdades universais”. Este método úsase para tomar decisións a longo prazo.

- Análise técnica: o obxectivo desta análise é “*medir a oferta e demanda dun título ou outros activos financeiros para predicir os prezos e movementos futuros dos mesmos. Intenta detectar patróns de comportamento no mercado para facer predicións fiables dos prezos futuros”* (New York Institute of Finance, 1989).

  É a metodoloxía a través da cal, os analistas son capaces de calcular a tendencia que terá o prezo do activo financeiro (polo menos no curto prazo). Esta análise limítase a estudar a actividade do mercado entendendo esta como unha serie de datos históricos nos que se inclúen: prezos ou cotizacións e volumes de contratación. Toma como punto de partida que os patróns de series históricas tenden a repetirse co tempo; polo que, os analistas dedícanse a detectar os patróns de comportamento e os cambios de tendencia para adiantarse ao mercado e obter beneficios.

  Tamén se coñece como análise gráfica (ou chartista) porque se usan unha serie de gráficos para analizar estes datos xunto cunha análise cuantitativa (a través de indicadores e osciladores). Hai que destacar, que esta análise é un pouco subxectiva, porque cos mesmos datos non todas as persoas temos que chegar as mesmas conclusións, é dicir, cada persoa pode facer unha interpretación diferente dos resultados. Tendo en conta iso, este método úsase para tomar decisións a curto prazo.

Estes métodos de análise son importantes pero tamén é necesario ter en conta a variabilidade ou desviación típica das operacións e a relación que poida existir entre os activos (covarianza ou correlación). Unha vez que se estimou a rendibilidade, risco (varianza ou volatilidade) e covarianza entre os títulos, é moito máis apropiado decantarse por aqueles títulos que mostren uns mellores resultados tras realizar a análise técnica e fundamental.

Á hora de realizar unha xestión activa, hai que seguir diferentes pasos:

1. Analizar o nivel de exposición ao risco máximo que está disposto a asumir o inversor.
2. Realizar previsións sobre as rendibilidades futuras: a corto prazo úsase a análise técnica para analizar as tendencias e a longo prazo a análise fundamental. Posteriormente calcularase a rendibilidade prevista para cada activo financeiro, as volatilidades ou desviacións típicas das rendibilidades e as súas covarianzas.
3. Aplícase un modelo de optimización (por exemplo, un dos que son obxecto deste traballo). A solución do modelo proporcionaranos as cantidades a investir en cada activo financeiro, a rendibilidade esperada da carteira e o risco da mesma en termos de volatilidade. Tamén nos proporcionará un intervalo de confianza para poder cotexar os datos. Estes modelos de xestión activa de carteira xorden nos anos cincuenta e o máis coñecido é o modelo de Markowitz, do que falaremos máis adiante.
4. Cada certo tempo é importante recalcular as previsións e reaplicar o modelo de optimización: cada tres ou seis meses ou cando vexamos que para algunha das empresas cambiaron as condicións para o cálculo das variables.
5. Por último, é importante que esteamos atentos ao nivel xeral de prezos.

1.3.2 Métodos de xestión pasiva

Este tipo de métodos están ganando terreo no ámbito da xestión de carteiras. Para a xestión pasiva temos que partir de que os mercados son eficientes e que os inversores son racionais e sempre van actuar desta maneira, porque, no caso de que un inversor non se comportara racionalmente, o resto de axentes que operan no mercado levaríano a abandonar o seu comportamento porque lle ocasionaría perdas ou ganancias inferiores ás óptimas.

Se os mercados son eficientes os prezos dos activos da carteira van reflexar toda a información da que se dispón (información que é pública) e por iso os inversores e xestores consideran que non obterán un beneficio superior ao rendemento medio das carteiras de mercado.

A maneira de investir será a través dunha carteira composta por valores con e/ou sen risco. Seleccionarán unha composición de activos moi diversificada na que o porcentaxe de cada clase de activo dependerá do risco que o inversor queira e poida asumir. É un método que minimiza os costes de transacción porque reduce os cálculos que se realizan para obter a composición da carteira.

A diferencia das estratexias de xestión activa, dáselle menos importancia á maximización do rendemento e máis aos requisitos que desexan os clientes (niveis de risco, principalmente). Por isto, o obxectivo da xestión pasiva será satisfacer as necesidades dos inversores.

Existen varios tipos de xestión pasiva:

- A indexación (*indexing)* que consiste en replicar o comportamento dun índice de referencia.
- A estratexia de comprar e manter (*buy and hold)* que consiste en comprar unha serie de activos e mantelos ata o vencemento.
- A inmunización (*inmunization)* que consiste en reducir (e eliminar se é posible) o risco de tipo de interese que afecta ás carteiras. O obxectivo é conseguir que a evolución dos tipos de interese a longo prazo non afecte ao valor dos títulos que compoñen a carteira. Desta maneira, o valor final da carteira ten que ser igual ao valor inicial.
- A correspondencia entre fluxos de caixa (*cash – flow matching)* que consiste en crear carteiras cunha estrutura capaz de financiarnos unha serie de pagos a través dos rendementos dos activos que a forman.

2. O modelo de Markowitz

Harry Markowitz foi o primeiro en estudar dende unha perspectiva académica a teoría de carteiras. O seu modelo foi desenvolto no ano 1952, posteriormente, publicouse de maneira máis completa en 1959. O piar da súa aportación é resolver de maneira satisfactoria un modelo de selección de carteiras no que a diversificación é un elemento fundamental.

A pesar de ser un modelo que se desenvolveu nos anos 50 segue a ser o máis establecido no ámbito da xestión de carteiras. Vemos a importancia deste modelo en que é a base da maioría dos desenvolvementos financeiros dende os seus inicios e que é unha das ferramentas máis estendidas de axuda para tomar decisións de inversión nos mercados financeiros.

Aínda que inicialmente Markowitz concibiu o seu modelo para ser aplicado á selección de títulos individuais para a formación dunha carteira, o problema ao que é máis aplicado na xestión profesional é ao da asignación de activos (o que se coñece como *asset allocation*). Podemos definir este concepto como "*aquel no que se pretende coñecer que porcentaxes hai que investir dunhas poucas categorías de activos financeiros para maximizar o seu desempeño (performance)"* (Villalba, 2016).

Neste capítulo preséntase o modelo de optimización de Markowitz, os supostos de partida e as ecuacións matemáticas para o seu cálculo. Tamén se fai mención aos problemas que presenta este modelo na súa aplicación práctica e o seu uso na realidade da inversión financeira.

2.1 Modelo de optimización de Markowitz

O obxectivo de Markowitz é obter unha carteira co mínimo risco para unha rendibilidade esperada dada ou unha carteira coa máxima rendibilidade para un risco dado, é dicir, conseguir unha carteira eficiente que sexa a óptima para o inversor.

As hipóteses de partida deste modelo podemos definilas como:

- O rendemento da carteira mídese a través da súa esperanza matemática.
- O risco da carteira mídese a través da varianza ou desviación típica do rendemento da carteira.
- As decisións de inversión tómanse tendo en conta a utilidade esperada da inversión, para iso, analízase en función do rendemento medio e da varianza do rendemento da carteira.
- Os inversores son racionais, non saciables e adversos ao risco, é dicir, que preferirán carteiras coa maior rendibilidade posible a un risco determinado ou o menor risco posible para un rendemento dado (carteira eficiente).

Para alcanzar o obxectivo deste modelo de optimización, pódese dividir o proceso nas seguintes tres fases:

1. Obtención da fronteira de carteiras eficientes.
2. Especificación da actitude ante o risco do inversor.
3. Determinación ou escolla da carteira óptima do inversor.

Este traballo céntrase na primeira fase do modelo, é dicir, determinar o conxunto de carteiras eficientes para o inversor. Con este propósito, Markowitz propón un problema de optimización no que se busca minimizar o risco (a varianza) suxeito á rendibilidade. O problema proposto podemos expresalo como:

$$\min. \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \sigma_{jk} \, x_j \, x_k \tag{1}$$

Suxeito a:

$$\sum_{j=1}^{N} E\,(r_j)\, x_j = E\,(r_j)^*$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0, \;\; \forall_j$$

Onde:

- N é o número de activos financeiros considerados.
- σ_{jk} é a covarianza entre a rendibilidade esperada dos activos j e k.
- X son as incógnitas, é dicir, X_j é a fracción invertida no activo j.
- $E(r_j)$ será a rendibilidade media esperada do activo j.
- $E(r_c)$* é a rendibilidade media esperada da carteira c.
- σ_c^2 é a varianza da rendibilidade da carteira c que se mide coa fórmula expresada na función obxectivo.

Neste modelo o que se pretende é minimizar a varianza dunha carteira baixo unhas condicións:

- A rendibilidade da carteira debe ser a que se adapte ás preferencias do inversor.
- A suma das partes invertidas en cada activo financeiro deben ser iguais a un (se obtemos as proporcións en tanto por un) ou ao total dispoñible para a inversión.
- As inversións teñen que ser non negativas. Esta restrición estará presente cando non se admitan as vendas en corto nos activos, xa que, neste caso as variables x_j poderían tomar valores negativos.

De maneira equivalente, poderíamos propoñer un problema de optimización no que a finalidade sexa maximizar a rendibilidade para unha determinada varianza que tamén nos proporcionaría carteiras eficientes como resultados. É dicir, o problema que temos que resolver neste caso será:

$$\max. \sum_{j=1}^{N} E\,(r_j)\; x_j$$

(2)

Suxeito a:

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \sigma_{jk}\; x_j x_k = \; \sigma_c^{2*}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_j = 1$$

$$x_j \geq 0, \ \forall_j$$

Neste caso estaríamos fixando un risco e, a partir deste dato, calcular as carteiras que nos reportan maior rendibilidade, é dicir, maximizar a rendibilidade suxeita a un risco dado. Para o desenvolvemento deste traballo e o caso práctico, imos quedarnos coa opción exposta anteriormente na que se propón o problema de optimización minimizando o risco.

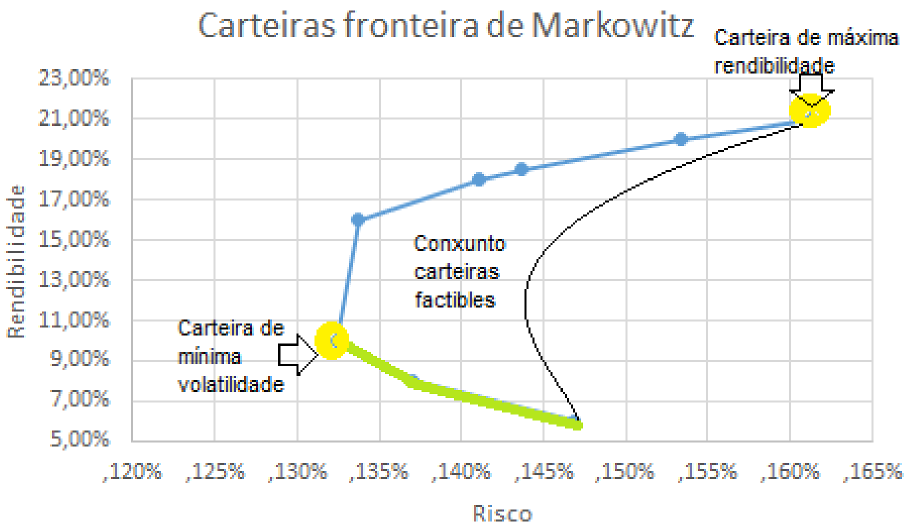
En calquera das dúas formulacións fíxase un dos parámetros que determinará o valor do outro na solución. No primeiro caso, fixamos a rendibilidade que desexa o inversor e obtemos a carteira cun risco ou varianza mínimo. No segundo caso, fixarase o risco que o inversor está disposto a asumir e obterase a rendibilidade esperada máxima. Se en calquera destas dúas formulacións se variamos o parámetro desexado polo inversor imos obter diferentes combinacións de activos, é dicir, diferentes puntos da fronteira eficiente.

No modelo de optimización que estamos usando (na cal se minimiza o risco), a fronteira eficiente estará formada polas mellores combinacións de activos nas que o inversor obterá o menor risco dado un nivel de rendemento, de maneira que se corresponda un maior risco cunha maior rendibilidade (un inversor racional non asumirá un risco maior se iso non lle vai reportar maiores beneficios). Segundo o grado de aversión ao risco que teña o inversor tomará a decisión de situarse nun punto ou outro da fronteira. Como Markowitz parte de que os inversores son racionais, non contempla a posibilidade de que un inversor escolla un punto fóra desta fronteira, porque sería irracional.

No gráfico[2] seguinte móstranse as carteiras que forman parte da fronteira de Markowitz, pero é importante facer aquí unha puntualización, xa que, as carteiras da parte inferior desta curva (que van dende a mínima varianza á mínima rendibilidade) son ineficientes porque para os seus niveis de risco, hai outras combinacións de activos que reportan unha maior rendibilidade (as carteiras da parte superior da curva).

[2] A forma teórica das fronteiras é unha curva convexa. Nestes exemplos, só podemos ver unha aproximación á curva debido a que está calculada a partir duns poucos puntos desas curvas.

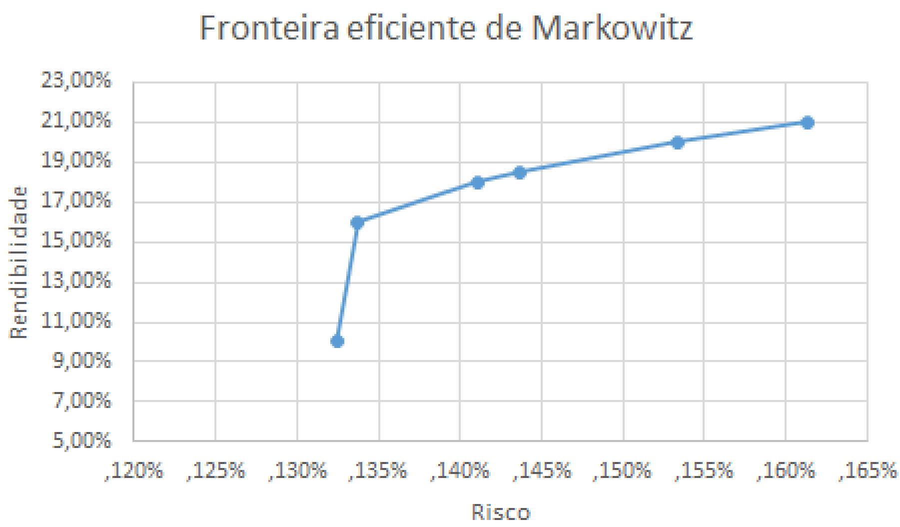
Gráfico 1: Carteiras da fronteira de Markowitz



Fonte: Elaboración propia.

Entón, realmente, a fronteira eficiente de Markowitz estará formada só pola parte superior da curva que incluirá dende a carteira de mínima varianza á carteira de máxima rendibilidade tal e como se mostra no seguinte gráfico:

Gráfico 2: Fronteira eficiente de Markowitz.



Fonte: Elaboración propia.

As combinacións de activos que se atopen na fronteira eficiente serán as carteiras eficientes, é dicir, as que presentan a máxima rendibilidade ou o mínimo risco para os parámetros dados polo inversor. As combinacións que quedan por debaixo desta fronteira serán carteiras factibles pero non eficientes, é dicir, que se poden alcanzar cos recursos dados pero que non serían as que nos reporten mellores resultados.

2.2 Problemas do modelo de Markowitz

Como vimos para o modelo de Markowitz é necesario calcular as varianzas e covarianzas entre todos os activos que se estean analizando. Ata os anos oitenta usar este modelo para problemas grandes e non tan grandes, era moi difícil polo seu método de cálculo: había que calcular varianzas e covarianzas, inverter matrices e manexar moitas ecuacións, moitas incógnitas e resolver problemas de programación cuadrática con funcións obxectivos con moitos termos. Todos isto complicaba o cálculo deste modelo.

A partir dos anos noventa, cando se estende o uso dos ordenadores e comezan a aparecer tecnoloxías capaces de resolver problemas matemáticos, redúcese este problema. Hoxe en día, pódese realizar o cálculo mediante unha función do programa Microsoft Excel (SOLVER) facilitando a resolución de problemas pequenos deste tipo. Pero ademais, existen paquetes dispoñibles no mercado que resolven programación cuadrática de maior dificultade.

Coas novas tecnoloxías resolveuse o problema do difícil cálculo do modelo de Markowitz por iso, actualmente, os problemas para o uso deste modelo veñen dos seus supostos de partida; que son:

- A rendibilidade esperada de cada un dos activos financeiros considerado está presuposta.
- Suponse a varianza de cada un dos activos financeiros e a covarianza que existe entre eles e, ademais, esta é constante no tempo.
- Os rendementos dos diferentes activos financeiros compórtanse seguindo unha distribución normal.
- Os inversores actúan sempre de maneira racional.
- O modelo optimiza para un só período.

A partir destes supostos podemos describir algúns dos problemas que, aínda a día de hoxe, presenta o modelo de Markowitz:

O modelo supón que podemos calcular a rendibilidade, varianza e covarianza dos distintos activos financeiros de maneira exacta. O problema é que a varianza con respecto á rendibilidade esperada en períodos de tempo cortos é moi grande, é dicir, que o erro de predición deses períodos será moi elevado.

Por outra parte, o modelo é moi sensible aos valores das rendibilidades esperadas, isto é que un pequeno cambio no seu valor implica carteiras con composicións moi diferentes. É dicir, que non serán constantes como presupón Markowitz.

As consecuencias destes erros nas estimacións das rendibilidades esperadas son diferentes dependendo de en que variable se cometa o erro de estimación. Así tal e como expón Villalba (2016): “ *Os erros na rendibilidade esperada teñen un impacto 11 veces maior que os erros na estimacións de varianza e 20 veces maior que os erros na covarianza aos efectos de desviación sobre o verdadeiro valor”*

Para os inversores máis adversos ao risco, os erros na rendibilidade esperada son moito máis importantes, é dicir, a solución distará máis do verdadeiro valor que cando se produza o erro nun inversor menos adverso ao risco.

Ademais, é importante destacar que as varianzas e as covarianzas (a pesar da súa variabilidade) son moito máis estables no tempo que a rendibilidade. Iso fai que poidamos usar como varianzas e covarianzas as históricas sen que supoña grandes problemas na escolla da carteira óptima. Pero, as esperanzas das rendibilidades pasadas si que supoñen un problema á hora de usalas como predicións das rendibilidades futuras, xa que, se as usamos obteremos carteiras óptimas moi distintas das que obteríamos se usaramos a rendibilidade real.

Resulta un pouco contraintuitivo minimizar tanto as desviacións negativas de rendibilidade como as positivas como fai Markowitz no seu modelo. O inversor entende como risco as desviacións negativas, por iso o quere minimizar, pero un risco é unha situación que se escapa do que tíñamos previsto que tanto pode ser positivo como negativo e isto é o que contempla a varianza. Non terá sentido minimizar todas as desviacións, xa que, as desviacións positivas (que lle van reportar beneficios) buscará maximizalas. Pero Markowitz demostrará en 1959 que se a distribución das rendibilidades é normal, non tería sentido usar unha función de risco diferente para facer isto, porque sería máis complicado a optimización e os resultados non serían distintos.

A hipótese de que as rendibilidades seguen unha función de distribución normal tamén é discutible. Fama (1965 e 1976) sostén que os rendementos dos activos financeiros non poden seguir unha distribución normal pero, a pesar disto, o tratamento que lle da Markowitz no seu modelo é o de considerar que se distribúen de maneira normal. Moitos autores defenderán que sería máis acertado supoñer que seguise unha distribución lognormal. Ao marxe de cal sexa a función de distribución das rendibilidades, hai que destacar os modelos *Lower Partial Moment* (LPM) que defenderán que sería máis adecuado minimizar unha función de erros negativos con respecto a un nivel mínimo de rendibilidade dado; este nivel mínimo sería un valor fixado previamente e de maneira subxectiva polo inversor.

Como último problema a este modelo, critícanse as hipóteses que fai sobre o inversor. Posto que, Markowitz defende que os inversores son racionais e Kahneman e Teversky (1979) proban que os inversores, en determinadas ocasións non se comportan desta maneira. Daniel Villalba defende que se partimos de que os inversores non son racionais, non se pode soster que carteira óptima resultante do modelo de Markowtiz vaia ser unha solución que satisfaga ao inversor, aínda que sexa a mellor opción. Por último, neste ámbito do comportamento dos inversores, hai que destacar que os inversores, normalmente, non invisten para un só período de tempo senón que teñen carteiras que van revisando ao longo do tempo. O modelo que estamos usando só contempla un período, polo que, este será un problema á hora de usalo na realidade económica.

2.3 Uso do Modelo de Markowitz na realidade

O modelo de Markowitz foi un referente teórico fundamental na Teoría de Carteiras pero, a pesar diso, o seu uso na práctica non tivo tanto éxito durante moitos anos. Parte da culpa disto téñena todos os problemas e críticas que se destacaron no apartado anterior.

Este modelo non se aplicaba moito na práctica debido a súa complexidade de cálculo matemático. Era preciso calcular un elevado número de estimacións de rendibilidades esperadas, varianzas e covarianzas. Pero, cando a partir dos anos 80 e 90 aparecen os programas informáticos, isto non supoñía un problema porque xa non eran difíciles de estimar. A pesar disto, o modelo seguiu sen usarse en exceso debido, sobre todo, a inestabilidade das súas solucións. Este inestabilidade recae sobre as hipóteses de partida máis básicas, tal e como se puxo de manifesto no apartado anterior. Pero existen outras razóns debido a outras hipóteses aínda non citadas pero tamén implícitas no modelo, tal e como expón Mendizábal (2002):

- Non ten en conta os costes transaccionais nin os impostos.
- Mantén que os títulos son perfectamente divisibles.
- Non proporciona ningunha ferramenta para que os inversores valoren a súa actitude ante o risco nin a súa función de utilidade.

Todo isto levou a que o modelo de Markowtiz non fose tan importante na práctica como no ámbito teórico e a que moitos autores propuxeran novos modelos para tratar de resolver os problemas que presenta este modelo de carteiras ou simplificar o seu cálculo. Dous destes modelos son o de Sharpe e o de Black – Litterman, que serán presentados nos capítulos seguintes.

Non obstante, hai que dicir que na actualidade, xa no século XXI, o uso do modelo de Markowitz (por suposto, con adaptacións para recoller restricións adicionais ou medidas diferentes de risco, por exemplo), está superando o que se deu nun pasado e está, cada vez, gozando dunha maior aceptación entre os xestores de inversións.

3. O modelo de optimización de Sharpe

William F. Sharpe (1963,1976) propón pouco despois de Markowitz o seu modelo de optimización de carteiras. Este modelo supón unha simplificación do modelo exposto anteriormente, xa que, está proposto a partir da suposición da existencia dunha relación lineal entre o rendemento do título e o da carteira de mercado, é dicir, a partir desde modelo podemos definir o risco da carteira sen usar as covarianzas. Isto supón unha gran simplificación do cálculo que era un dos maiores problemas que presentaba o modelo de optimización de Markowitz nos anos cincuenta.

A hipótese de partida de Sharpe é que as rendibilidade dos diferentes títulos están relacionadas entre si só porque todas teñen relación cun factor común que lles afecta, que posteriormente, entenderase que é o mercado. O que fai é relacionar a rendibilidade esperada de cada activo coa rendibilidade dunha carteira que represente ao mercado (un índice de mercado).

Sharpe en vez de buscar covarianzas entre os títulos que forman as carteiras, divide o risco dos activos (títulos e carteiras) en dous: risco sistemático e risco non sistemático. O risco sistemático é o que depende do mercado e dos perigos da situación económica do país, por iso é un risco que non se pode eliminar completamente a través da diversificación. O risco non sistemático é o que ven dado por condicionantes propios da empresa emisora do activo e o que, polo tanto, se pode eliminar mediante a diversificación, é dicir, que a medida que aumentamos o número de títulos dentro dunha carteira, este risco diminúe.

Sharpe relaciona o rendemento da carteira co rendemento dun índice de mercado. Parte da carteira estará moi correlacionada co mercado e o seu risco sistemático, polo que o inversor terá que preocuparse deste risco, xa que, o risco sistemático non pode eliminarse a través da diversificación. Para medir este risco, usarase a beta da que se fala no seguinte epígrafe.

Nesta parte do traballo dedicada ao modelo de optimización de Sharpe, faise unha exposición dos puntos máis relevantes destes, unha breve exposición do modelo de mercado e da maneira que ten este de medir o risco ao que están expostas as carteiras.

3.1 Nova medida de risco: beta

Como se dixo ao comezo, o modelo de Sharpe relaciona a rendibilidade dos activos ca de mercado, entón é preciso ter un índice de mercado para medir o efecto deste nos activos. Isto faise a través da "beta" que o que mide é o risco sistemático. A beta é unha medida do risco que relaciona o risco dun activo co risco de mercado. Podemos calculalo da seguinte maneira como se verá no apartado 3.2:

$$\beta_j = {}^{\sigma_{jM}}\!\big/_{\sigma_M^2} \tag{3}$$

Dependendo do valor que tome, podemos sacar conclusións:

- O índice de mercado ten unha beta igual a 1. Se un activo ten tamén beta 1 isto implica que o activo vai ter o mesmo risco que o mercado. Se engadimos á carteira de mercado un activo que se comporte exactamente igual ao mercado, non variaríamos o risco da carteira pero tampouco poderíamos esperar unha rendibilidade diferente a que presenta a carteira de mercado. Estes activos serán valores normais ou neutros.
- Se a beta dun activo é superior a un: implica que a rendibilidade do activo aumenta ou diminúe máis que a do mercado ante aumentos ou diminucións da rendibilidade deste. Son activos moi volátiles, ofensivos ou agresivos.
- Se a beta é inferior a un: implica que a rendibilidade do activo aumenta ou diminúe menos que a do mercado ante aumentos ou diminucións da rendibilidade deste. Son activos pouco volátiles ou defensivos.

- Se a beta é negativa: non son valores habituais, serían ideais para diversificar, porque nos van servir para reducir o risco, xa que, van en contra do mercado.
- Se a beta é igual a cero: a vantaxe de incorporar un activo desta clase a nosa carteira é que non vai incrementar a volatilidade, porque actúa igual que un activo sen risco.

Entón, a beta é unha medida de risco do mercado que supón unha concepción diferente á varianza ou á volatilidade.

3.2 Modelo de mercado.

O modelo de mercado de Sharpe baséase nun modelo de factor ou índice único para medir as rendibilidades dos activos. Este índice, como xa se adiantou, é o rendemento do mercado. Para calcular a rendibilidade do título propón a seguinte ecuación:

$$r_j = a_j + b_j \, r_M + \varepsilon_j \tag{4}$$

Sendo j = 1, 2 .... N

Onde:

- r_j : rendibilidade do título j no período de referencia.
- r_M: rendibilidade dun índice bursátil representativo da evolución da actividade económica no período.
- a_j: parámetro a estimar que representa a parte da rendibilidade do título j que non se debe á evolución do índice.
- b_j: parámetro a estimar que representa o grado no que o índice afecta á rendibilidade dos títulos.
- ε_j: perturbación aleatoria.
- N: número de títulos.

Para resolver o modelo úsanse datos históricos e o método de estimación de Mínimos Cadrados Ordinarios (MCO). Os estimadores dos parámetros b_j e a_j calcúlanse, polo tanto, da seguinte maneira:

$$\beta_j = {}^{\sigma_{jM}}\!\big/_{\sigma_M^2} \tag{5}$$

$$\alpha_j = E(r_j) - \beta_j E(r_M) \qquad (6)$$

Unha vez que temos calculados estes dous estimadores podemos calcular a rendibilidade media do título e a varianza da súa rendibilidade:

- Rendibilidade media do título:

$$E(r_j) = \alpha_j + \beta_j E(r_M) \qquad (7)$$

- Varianza da rendibilidade do título:

$$\sigma_j^2 = \beta_j^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon j}^2 \qquad (8)$$

Como vemos existe unha parte da varianza da rendibilidade dos títulos que depende do mercado e outra que é independente deste; vemos aquí a diferenza entre o risco sistemático e o non sistemático que se comentou anteriormente. Desta maneira teríamos calculado os valores que nos interesan para valorar a cada título de maneira individual pero a nós o que nos interesa é coñecer a rendibilidade da carteira para saber se nos interesa ou non investir nela. Os parámetros da carteira serán a suma dos valores individuais dos activos:

- Rendibilidade media dunha carteira:

$$E(r_c) = \sum_{j=1}^{N} E(r_j) x_j = \alpha_c + \beta_c E(r_M) \qquad (9)$$

sendo:

$$\alpha_c = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j$$

$$\beta_c = \sum_{j=1}^{N} \beta_j x_j$$

- Varianza da rendibilidade dunha carteira:

$$\sigma_c^2 = \beta_c^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\varepsilon c}^2 \qquad (10)$$

Onde:

$$\sigma^2_{\varepsilon c} = \sigma^2_{\varepsilon 1}\, x_1^2 + \cdots + \sigma^2_{\varepsilon_N}\, x_N^2 \tag{11}$$

Esta última ecuación ten esta forma porque, todas as covarianzas entre os termos residuais dos títulos considéranse nulas porque Sharpe considera que as rendibilidades dos títulos só covarían pola súa relación co índice.

3.3 Modelo de optimización de Sharpe

O modelo de optimización de Sharpe é similar ao modelo de optimización de Markowitz, pero usando as medidas de rendibilidade esperadas e varianzas que derivan do modelo de mercado presentado no epígrafe anterior. Este modelo tamén se coñece como “Modelo Diagonal” porque, como xa se apuntou, a matriz de varianzas – covarianzas entre residuos presupóñense nulas.

Baséase igual que Markowitz nunha minimización do risco da carteira, da seguinte maneira:

$$\min \sigma^2_c = \beta^2_c\, \sigma^2_M + \sigma^2_c = (\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_N\, x_N)^2\, \sigma^2_M + (\sigma^2_{\varepsilon 1}\, x_1^2 + \cdots + \sigma^2_{\varepsilon N}\, x_N^2) \tag{12}$$

Suxeito a:

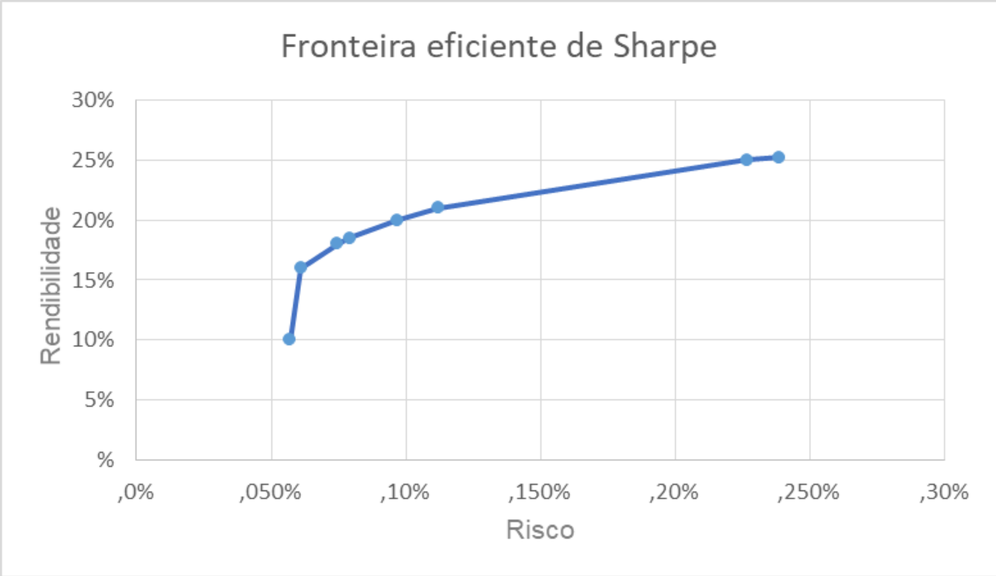
$$(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_N x_N) + (\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_N x_N)\, E(R_M) = E(R^*_c)$$

$$x_1 + \cdots + x_N = 1$$

$$x_j \geq 0, \forall_j$$

Podemos realizar unha representación gráfica das combinacións resultantes entre rendibilidade e risco dando lugar a unha fronteira eficiente como vimos no caso do modelo de Markowitz. As carteiras que se atopen dentro desta fronteira serán as carteiras que presenten a máxima rendibilidade ou o mínimo risco para os parámetros que desexe o inversor ou xestor.

Gráfico 3: Fronteira eficiente de Sharpe



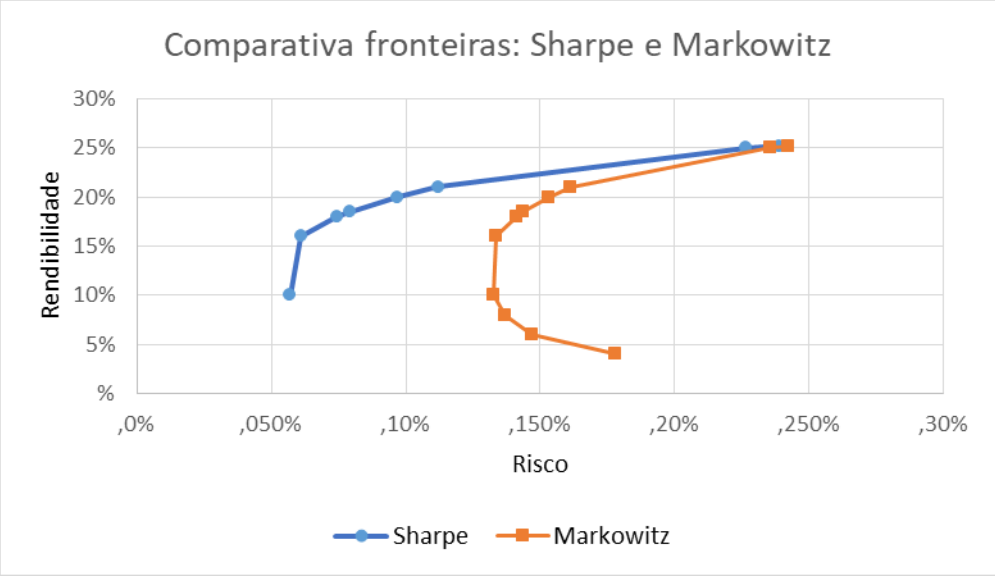
Fonte: Elaboración propia.

3.4 Uso do modelo de Sharpe na práctica

Este modelo de optimización que se acaba de presentar implicou un gran avance para o uso práctico dos modelos de xestión de carteiras, xa que, supuxo unha redución importante do número de datos necesarios para propoñer o problema de determinación de carteiras eficientes e óptimas con respecto aos que eran precisos para a optimización de Markowitz. Isto é posible porque o modelo proposto por Sharpe non precisa calcular as covarianzas que é o que complicaba e ampliaba moito o número de datos que precisaba Markowitz.

A pesar disto, se comparamos os resultados obtidos entre os dous modelos, vemos como os resultados da optimización de Sharpe subestiman o risco total. Isto débese a que as mencionadas covarianzas entre os residuos non son, en realidade, nulas como se supón neste modelo. Esta cuestión refléxase claramente no gráfico seguinte, xa que, vese que para un mesmo nivel de rendibilidade, o modelo de Markowitz danos un risco maior que o que reporta o modelo de optimización de Sharpe.

Gráfico 4: Comparación fronteira eficiente Markowitz e Sharpe



Fonte: Elaboración propia.

Como consecuencia disto, ao avanzar a tecnoloxía e mellorar as posibilidades de cálculo, a simplificación do modelo diagonal deixou de estar xustificada e o seu uso foise minimizando. Aínda así, a aportación que supuxo o modelo de mercado de Sharpe para a teoría financeira e o seu desenvolvemento posterior que levou ao modelo CAPM, sigue sendo fundamental na práctica da xestión de carteiras actual.

4. O modelo Black – Litterman

No ano 1992 Fisher Black e Robert Litterman publican un modelo matemático para a asignación de carteiras coa finalidade de superar os problemas e limitacións que existían para a aplicación práctica da teoría de carteiras.

O modelo de Black – Litterman é un modelo que combina as ideas do Modelo de Valoración de Activos (CAPM) e o Modelo de Optimización de Markowitz. O obxectivo deste modelo é proporcionar unha ferramenta para que os inversores poidan calcular a combinación máis óptima de activos para as súas carteiras baixo uns parámetros específicos.

Propoñen un modelo alternativo que partirá dunha carteira de equilibrio e, partindo desta, terá en conta os puntos de vista ou opinión dos inversores (ou xestores) sobre os activos e o mercado.

Neste apartado realízase unha exposición do modelo exposto por Black e Litterman. Realízase nun primeiro momento unha comparativa cos modelos tradicionais para poñer de manifesto os problemas que se resolveron con este novo modelo e, posteriormente, unha presentación dos cálculos precisos para conseguir as carteiras óptimas. Para rematar, destácanse as vantaxes que supuxo e o uso na práctica deste modelo.

4.1 Superación dos modelos tradicionais

A teoría de carteiras iníciase co modelo de Markowitz e a optimización máis clásica pero, aínda que teñen moita relevancia teórica na formación de carteiras óptimas, posúen moitas críticas e impedimentos para usalos na práctica. O modelo de Black e Litterman supuxo un avance na optimización de carteiras, xa que, permitiu superar algúns dos límites que presentaba a optimización ata ese momento e impulsar o seu uso práctico.

Entre as críticas que se lle fan ao modelo de Markowitz e que se estenden ao modelo diagonal de Sharpe, podemos destacar os seguintes problemas para o seu uso práctico que Black e Litterman tratarán de resolver:

- Os modelos de optimización clásicos requiren dispoñer de datos esperados sobre todos os activos do mercado referentes a: rendibilidades, varianzas e covarianzas. Os datos esperados son moi difíciles de estimar e, moitas veces, os inversores só teñen información sobre rendibilidades en poucos mercados ou en poucas clases de activos, é dicir, non poden ter información sobre todos os activos existentes nos mercados.
- As proporcións nas que o inversor debería investir en cada activo que compón a carteira óptima son moi sensibles aos supostos de rendibilidade utilizados. É dicir, son modelos sensibles á rendibilidade esperada, isto é que cambios pequenos na rendibilidade esperada provocan grandes cambios na formación das carteiras.
- O modelo de Markowitz leva a asignacións de carteiras extremas, isto é carteiras con resultados moi concentrados en certos activos ou con grandes posicións cortas en activos ou sectores de moito peso no mercado.
- Non teñen en conta as opinión dos inversores en relación ás expectativas sobre a rendibilidade futura dos activos.
- Como consecuencia de todo isto, os resultados dos modelos máis tradicionais son pouco intuitivos, pouco realistas e difíciles de xustificar.

Por todo isto, a pesar da importancia teórica destes modelos (que xa se resaltou previamente), na práctica son modelos pouco atractivos para a asignación de activos en carteiras eficientes. Pero, como o modelo de Black – Litterman soluciona estes problemas?

4.1.1 Rendementos esperados

No modelo de Markowitz precisábase coñecer os rendementos esperados dos activos e as súas covarianzas. Isto era moi complicado pola súa complexidade matemática e, ademais, con frecuencia era difícil estimar de maneira razoable os rendementos esperados para o futuro. Black e Litterman solucionan este problema porque non requirirá estimacións senón que, usan os rendementos esperados iniciais, considerando estes os rendementos usados para a asignación da carteira de equilibrio, é dicir, os que están implícitos no mercado no momento inicial. A partir disto, hai que coñecer a opinión dos inversores sobre os rendementos esperados e o seu grado de confianza nos supostos nos que se basean. Con todo isto, Black – Litterman calculará a asignación de activos desexada para o perfil do inversor.

É dicir, Black – Litterman solucionan o problema da obtención de datos que presentaban os modelos de optimización ata este momento porque non precisa estimar os datos para o futuro senón que partirá de datos actuais, que se poden observar directamente no mercado no momento de realización dos cálculos.

4.1.2 Sensibilidade ao rendemento esperado

Os modelos clásicos presentaban datos moi sensibles aos supostos de rendibilidade esperada. Isto é que, ante pequenos cambios nas cifras de rendibilidade esperada a carteira óptima resultante cambia completamente. Este problema lévanos a pensar na necesidade de usar rendibilidades esperadas estables para reducir esta volatilidade.

Para resolver este problema, Black e Litterman partirán dun punto de equilibrio, é dicir, uns rendementos esperados iniciais que se calcularán en termos de primas de risco. Black e Litterman definen no documento orixinal de presentación do seu modelo estas primas de risco como "*rendementos en exceso que igualan a oferta e a demanda de activos globais e moedas*" (Black e Litterman, 1992). Entón, as primas de risco serán as rendibilidades esperadas por encima da rendibilidade libre de risco ou a rendibilidade "extra" que terán os activos por asumir un risco[3].

Estas primas proporcionan un punto de referencia e usaranse como rendementos esperados. É dicir, os pesos de cada activo na carteira están predefinidos non como nos modelos anteriores que a carteira definíase a partir dos resultados da optimización.

[3] Partindo do modelo CAPM, podemos calcular a prima de risco do activo j a partir da seguinte expresión:

$$E(r_j) - r_f = (E(r_m) - r_f) * \beta_j$$

Onde:

- $E(r_j)$: será a rendibilidade esperada do activo j.
- r_f : será a rendibilidade do activo libre de risco.
- $E(r_m)$: será a rendibilidade esperada do mercado.
- β_j : será unha medida de risco de mercado do activo j.

Ao igual que $E(r_m)$ – rf será a prima de risco do mercado.

A carteira inicial estará formada segundo os pesos dos activos no mercado e tomarase como punto de partida para o desenvolvemento matemático posterior as primas de risco dos activos implícitas no mercado neste momento inicial. Posteriormente, incorporaranse a estas as visións dos xestores para modificar a carteira inicial e aproximarse ás preferencias do inversor na carteira final.

4.1.3 Carteiras extremas

Nos modelos definidos anteriormente, usábanse rendibilidades históricas ou idénticas para todos os activos para definir as rendibilidades esperadas. Isto pode dar lugar a carteiras extremas.

Jaureguizar (2008) define este concepto como "*ou ben posicións de gran peso, tanto largas como cortas, ou ben concentración en poucos activos*". Estas carteiras extremas son resultados moi comúns nos casos nos que existen restricións ou límites ás posicións; nestes casos, os modelos poden chegar a solucións de esquina, isto é con ponderacións cero (ou moi preto a cero) para algúns dos activos analizados ou ponderacións que non son racionais.

"*A metodoloxía clásica sobrepondera os activos con alta rendibilidade esperada, correlación baixa e pouca volatilidade*" (Jaureguizar, 2008). O modelo Black – Litterman resolverá este problema usando, como se dixo no apartado anterior, as primas de risco ou rendementos en exceso no mercado para crear un punto de equilibrio como punto de partida da súa análise.

4.1.4 Opinións dos inversores

A maioría das veces, os inversores teñen puntos de vista específicos con respecto aos rendementos esperados de algún dos activos nunha carteira que difiren dos que o mercado asume como máis probables. Coa introdución deste suposto, permíteselle aos inversores traducir os seus puntos de vista en rendementos esperados e tamén resolver os problemas dos modelos tradicionais que levaban a resultados irracionais.

O modelo de Black – Litterman o que fai é partir de rendementos de equilibrio para as accións, bonos e moedas e, dende este punto neutral, ter en conta as opinións do inversor:

- Se o inversor non ten un punto de vista particular sobre os rendementos dos activos, úsanse os valores de equilibrio que se calcularon a partir do mercado.

- Se o inversor ten un punto de vista diferente haberá que axustar os valores de equilibrio de acordo con el. É importante destacar, que en todo momento o inversor pode controlar a maneira na que a súa opinión vai influír nos pesos da carteira.

Desta maneira, os rendementos esperados que se usen para a optimización discreparán das primas de riscos de equilibrio de acordo coas opinións do inversor. A maneira na que van influír os diferentes puntos de vista na asignación das carteiras, dependerá da confianza que teña o inversor en cada punto de vista: canto maior sexa o grado de confianza, máis influirá o punto de vista nas súas decisións.

O modelo de Black – Litterman o que permite é que os inversores usen os seus sentimentos ou perspectivas de mercado para o seu propio beneficio permitíndolles calcular en base as súas opinións sobre os activos o rendemento esperado para cada activo. É dicir, inclúe unha visión máis real que é a opinión dos inversores (aínda que esta non ten porque ser certa con respecto ao mercado, xa que, non deixa de ser unha visión subxectiva que ten cada inversor ou xestor).

Se un inversor non ten punto de vista será complicado calcular as súas preferencias e, polo tanto, obter a carteira óptima que mellor se adapte as súas características. O máis adecuado é usar a prima de risco de equilibrio, como fan Black e Litterman, pero existen outros enfoques para construír unha carteira óptima cando os inversores non teñen puntos de vista sobre o mercado:

- Enfoque do promedio histórico: supón que os excesos de rendibilidade, á larga, se igualan cos seus promedios históricos. O problema é que usamos datos históricos que proporcionan pouca información sobre os rendementos futuros (que son unha medida hipotética e estimada), xa que, que uns activos funcionaran ben nun período pasado non nos indica que vaian funcionar de igual maneira no futuro.
- Enfoque da media igual: este método supón que comprando os mesmos activos en diferentes países os resultados finais serán neutros, é dicir, que o que perdamos nuns países será compensado co que se gañe noutros. O problema é que os rendementos excesivos nun país non compensarán os distintos niveis de risco que se asumiron nos outros territorios, porque cada mercado, terá un risco diferente dependendo do país no que estea situado (inflúen a situación política, económica e social de cada territorio).
- Enfoque da media igual axustada ao risco: supón que os activos teñen o mesmo rendemento esperado por unidade de risco. É dicir, inclúe a relación entre

rendemento e risco. Pero, neste enfoque non se ten en conta as correlacións entre os rendementos dos activos polo que tampouco será de todo acertado.

Entón, estes tres enfoques non son realistas e, nos tres casos, obtéñense carteiras irracionais.

En síntese, a optimización de Black - Litterman permite diferenciar entre as opinións do inversor e o conxunto dos rendementos esperados cos que se calcula a carteira óptima. Desta maneira, a composición das carteiras vaise axustar máis as preferencias dos inversores e aos seus puntos de vista. O inversor pode controlar a influencia dos seus puntos de vista na asignación das carteiras e cales son máis importantes. Mellorando así, os seus resultados e a súa incorporación no uso práctico dos modelos de optimización.

4.2 Desenvolvemento do modelo

O modelo de Black – Litterman parte dunha serie de rendibilidades esperadas para unha carteira de equilibrio. Esta será "*aquela que replica ao mercado no caso en que todos os inversores teñan as mesmas perspectivas*" (Black e Litterman, 1992). Para o cálculo da asignación óptima das carteiras usarase un enfoque bayesiano e a optimización inversa.

Aplicará a estatística bayesiana porque traballa con tres probabilidades diferentes: en primeiro lugar, a probabilidade a priori que é a probabilidade da carteira de equilibrio; en segundo lugar, a probabilidade condicionada que será a probabilidade que depende do mercado e das visións dos inversores e, por último, a probabilidade a posteriori que será a combinación das dúas anteriores.

O máis complicado deste modelo será transformar as expectativas dos inversores en datos cos que sexa posible conseguir resultados sobre carteiras óptimas e, para iso, Black e Litterman propoñen os cálculos que se van desenvolver neste apartado.

4.2.1 Punto de partida

O modelo de Black e Litterman parte dos seguintes supostos de partida para realizar os seus cálculos de carteiras:

- Supoñen que existen dúas fontes de información sobre os rendementos esperados:
    - As opinións dos inversores.
    - O equilibrio de mercado.

- Supoñen que as dúas fontes anteriores son incertas e, por iso, se expresan mellor mediante distribucións de probabilidade. En xeral, úsase unha distribución normal pero pode empregarse calquera outra.
- Escollen os rendementos esperados que son máis consistentes con estas dúas fontes de información.

Para introducir os puntos de vista do inversor é necesario coñecer o seu grao de confianza nas súas visións sobre o mercado (porque vai determinar a importancia que se lle dá a cada unha) e o nivel de risco mínimo e máximo que o inversor está disposto a aceptar. Os xestores pode ser que teñan unha referencia explícita sobre o rendemento que agardan ou demandan os inversores. Se temos unha rendibilidade explícita, o que fai o xestor é adaptar a composición da carteira para que a súa volatilidade e risco se adapten ao rendemento agardado. Unha vez que o inversor presenta os seus obxectivos hai que establecer as carteiras óptimas que se adaptan aos seus puntos de vista.

4.2.2 Optimización inversa

O modelo de Black – Litterman parte dun punto de equilibrio no que non se establecen os pesos de cada activo na carteira senón que se parte dos pesos predefinidos. Unha vez que temos establecida a carteira de equilibrio, incorporarase a visión do inversor ou xestor cun novo vector de rendibilidades esperadas e unha nova ponderación dos activos. En vez de atopar unha ponderación dada unha rendibilidade determinada, búscase unha serie de rendibilidades esperadas dadas unhas ponderacións.

É dicir, non se calculan directamente as ponderacións dos activos como se facían nos modelos de optimización tradicionais. Senón, que partindo dunhas ponderacións de equilibrio e tendo en conta as opinións calcúlase un novo vector de rendibilidades esperadas (ou rendibilidades implícitas) e, a partir deste, unha nova ponderación dos activos que será a que se use para a creación da carteira.

4.2.3 Calculo das ponderacións

O primeiro que teñen que facer os inversores é calcular os retornos de mercado implícito que derivan do modelo CAPM. Así calcúlase o punto de partida neutral ou de equilibrio do modelo a partir dos rendementos que se despexan do mercado. Se os inversores están de acordo con este rendemento implícito, poden usar os pesos neutrais ou de equilibrio dados polo modelo para desenvolver a súa carteira óptima. Pero, no caso de que teñan puntos de vista diferentes ao rendemento implícito do mercado, terán que usar o modelo para axustar as ponderacións de equilibrios as súas opinións.

Os inversores ou os xestores poden expresar a súa opinión, perspectiva ou vista de diferente maneira que son (Idzorek, 2002):

- Vista en termos absolutos: os inversores especifican o rendemento porcentual que creen que proporcionará un activo determinado. Por exemplo: o bono X terá un rendemento do 6,77%.
- Vista en termos relativos: realiza unha comparativa entre diferentes activos. Por exemplo: O bono X superará ao bono Y en 26 puntos básicos.
- Vista en termos relativos que involucra a múltiples activos: fórmanse dúas mini–carteiras, unha larga e outra corta, e compáranse. Por exemplo: os bonos en largo superarán nun 6% aos bonos en corto.

Unha vez que coñecemos os puntos de vista dos inversores, temos que especificar a confianza que teñen os inversores nos seus puntos de vista porque isto vai marcar o peso que se lle dará a esta opinión na asignación dos activos nas diferentes carteiras.

As opinións dos inversores combinaranse coa distribución de probabilidade a priori que permitiu obter a carteira inicial, obtendo así unha distribución de probabilidade, coa súa correspondente matriz de varianzas e covarianzas a posteriori. Esta última permitirá obter os pesos buscados para os activos na carteira.

Despois desta breve explicación do modelo, imos expoñer as ecuacións necesarias para os sucesivos pasos a dar no cálculo deste modelo. É importante destacar que todas as ecuacións expostas a continuación están expresadas en termos matriciais.

Para calcular os rendementos por exceso (ou primas de risco) iniciais ou implícitos no mercado, úsase a seguinte fórmula de optimización inversa.

$$\Pi = \delta\Sigma\omega \tag{13}$$

Onde:

- Π son as rendibilidades dos activos implícitas no mercado. É dicir, as xa nomeadas primas de risco ou rendibilidade por exceso. É un vector columna Nx1.[4]

[4]Sendo N o número de activos financeiros analizados para a formación da carteira.

- δ é o coeficiente de aversión ao risco que se soe identificar coa prima de risco do mercado unitaria. Podemos definila como a taxa de rendemento esperada á que un inversor estará disposto a renunciar po unha menor varianza ou risco. Actúa como un factor escalar para a estimación inversa dos rendementos en exceso. Pode ser unha suposición arbitraria (algo que tomamos como dado) ou pode vir dada pola seguinte expresión:

$$\delta = (E\,(rm) - rf) / \sigma^2 \qquad (14)$$

Onde:

  - E(rm) é a rendibilidade da carteira de mercado, é dicir, unha carteira que inclúe todos os activos no mercado ou calquera índice de que se aproxime a ela.
  - Rf é a taxa de rendemento libre de risco.
  - σ^2 é a varianza da carteira de mercado.
- ω son os pesos dos activos de acordo coa súa capitalización bursátil no mercado. É unha matriz columna Nx1.
- Σ é a matriz de covarianza dos rendementos en exceso. É unha matriz NxN.

Unha vez que temos calculados os rendementos implícitos dos activos, calcularemos os rendementos esperados dos activos financeiros baixo os supostos de Black – Litterman da seguinte maneira.

$$E\,(R) = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\,\Omega^{-1}\,P\,]^{-1}\,[\,(\tau\Sigma)^{-1}\,\Pi + P'\,\Omega^{-1}\,Q] \qquad (15)$$

Onde:

- E(R) é o novo vector de retorno combinando os rendementos iniciais e as vistas ou preferencias dos inversores. É dicir, é o rendemento medio posterior. É un vector columna Nx1. Canto maior sexa o nivel de confianza que teñan os inversores nas súas vistas do mercado, máis preto estará este novo vector de retorno das vistas e no caso de que o inversor teña pouca confianza nas súas perspectivas, este novo vector estará máis preto do equilibrio (Π).
- τ é un número escalar que indica a incerteza da distribución de CAPM. Este escalar será máis ou menos inversamente proporcional ao peso relativo que se lle dea ao vector de rendementos implícitos. Non existe maneira de establecer este escalar de maneira precisa e a literatura non orienta moito sobre como facer

o seu establecemento pero, en xeral, considérase que o escalar ten que estar moi próximo a cero. Black e Litterman (1992) establecen que normalmente estará entre 0,025 e 0,05.

- Σ é a matriz de covarianza dos rendementos en excesos e terá unhas dimensións de NxN.

  É importante destacar que, aínda que as expectativas non se refiran a todos os activos, afectan a todos. Porque están vinculados a través desta matriz de covarianza.

- P é unha matriz que identifica os activos involucrados nas vistas. É unha matriz KxN onde k é o número de visións ou perspectivas dos xestores. Por exemplo, se temos tres vistas diferentes para seis activos financeiros teremos unha matriz 3x6.

  A primeira fila da matriz P representa a primeira vista e como esta afecta a cada un dos N activos e así sucesivamente.

- Π é o vector de rendemento de equilibrio implícito. É un vector columna de dimensión Nx1.

- Q é o vector columna Kx1 das perspectivas ou vistas. Os inversores especifican as vistas de todos os activos e cada vista (k) dará lugar a este vector Q de vistas. O problema está en que as vistas teñen incerteza e esta da lugar a un vector de erro aleatorio, descoñecido e independente (ε) cunha media igual a cero e matriz de covarianzas igual a Ω .Polo tanto unha vista terá a seguinte forma:

$$Q + \varepsilon = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix} \tag{16}$$

  Excepto no hipotético caso de que o inversor estea totalmente seguro que a súa expectativa é certa ao 100%, sempre vai existir un termo de erro (ε) que será positivo ou negativo. O vector de erro (ε) non vai directamente na fórmula do Black – Litterman. A pesar disto, hai que telo en conta para o cálculo da varianza de cada activo.

- Ω é unha matriz de covarianza diagonal que mostra a incerteza de cada vista. É unha matriz KxK. É unha matriz diagonal porque ten ceros en todas as posicións que non son a diagonal. A diagonal recolle as varianzas dos termos de erro das perspectivas. Os elementos de fóra desta diagonal terán valor cero porque o modelo supón que as vistas son independentes entre elas.

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_k \end{pmatrix} \tag{17}$$

Unha vez que analizamos todos os termos da ecuación (2) podemos seguir avanzando no modelo de optimización para obter a carteira óptima. A partir da ecuación (2) operamos e obtemos a seguinte matriz de covarianzas a posteriori:

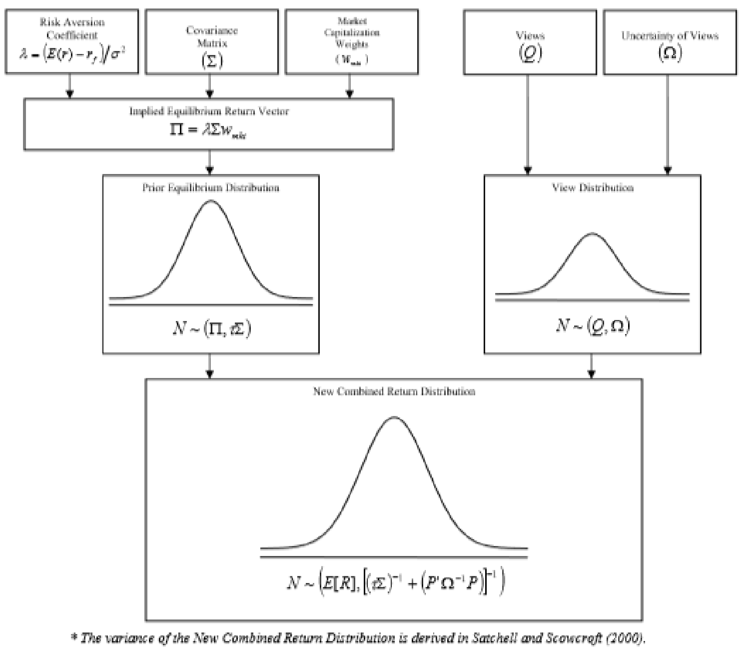
$$\mathrm{M} = [(\tau\Sigma\,)^{-1} + \mathrm{P}'\,\Omega^{-1}\,\mathrm{P}]^{-1} \tag{18}$$

$$\Sigma\mathrm{p} = \Sigma + \mathrm{M} \tag{19}$$

Coa ecuación (18) estamos calculando o efecto das opinións dos inversores na matriz de covarianzas inicial que usaremos para calcular a matriz posterior de covarianzas na ecuación (19). Esta nova matriz de covarianza usámola para volver calcular os pesos na ecuación (13) na que resolvemos a incógnita ω tomando el lugar de Π os rendementos esperados (E(R)) calculados na ecuación (14). É dicir, obtemos os novos pesos dos activos ou proporción que terán na carteira óptima desexada polo inversor, xa que, terá en conta as súas preferencias e vistas sobre o mercado.

A modo aclaratorio deste modelo, poderíase usar o seguinte esquema de Idzorek (2002):

Gráfico 5: Desenvolvemento do modelo Black - Litterman.



Fonte: Idzorek (2002).

4.3 Vantaxes do modelo

O modelo de Black e Litterman parte de retornos de mercado implícitos para calcular os retornos esperados. Desta maneira, dámoslle ao modelo unha maior confianza nos resultados. Mentres que no modelo de Markowitz, pequenos cambios nos rendementos esperados podían ocasionar grandes cambios na asignación da carteira, este modelo vainos proporcionar resultados moito máis intuitivos, razoables e, sobre todo, máis estables.

Se usamos os enfoques tradicionais, os cambios estarán baseados nos rendementos esperados, é dicir, nuns datos estimados moitas veces a partir de retornos históricos, que non son bos indicadores de como funcionarán os activos no futuro se estes son moi volátiles. Black – Litterman especificará uns retornos implícitos como punto de partida, que se aproximan ao equilibrio. Polo que serán máis realistas, porque non son estimados, é dicir, partirá dos datos que posúa do mercado actual.

O modelo de Black – Litterman permite aos inversores incorporar os seus puntos de vista no mercado e tamén ten en conta o nivel de confianza que ten o inversor nas súas suposicións. As carteiras óptimas só van variar da carteira de equilibrio se o inversor ten algunha opinión ou punto de vista distinto. Permite ao inversor expresar o seu punto de vista sobre rendementos relativos ou absolutos e especificar un grado de confianza distinto sobre cada clase de activo. É dicir, non condiciona ao inversor a nada e a súa carteira óptima dependerá da súa opinión sobre rendemento e risco no mercado.

A última das vantaxes que hai que destacar deste modelo de optimización, é que como ten en conta as opinións dos inversores as carteiras óptimas vanse adaptar ao seu perfil, é dicir, a ponderación da carteira estará totalmente adaptada ao risco que este está disposto a aceptar e a rendibilidade que desexa obter, mantendo a visión de mercado que presentaba a carteira de maneira orixinal.

Para rematar, é importante resaltar que non todo son vantaxes, senón que existen algunhas desvantaxes deste modelo. A máis importante, é que este modelo non agrega moita información aos modelos tradicionais de asignación de activos a non ser que os inversores teñan opinións ou puntos de vista anteriormente.

4.4 Importancia no ámbito real

Como xa se dixo, o modelo de Black e Litterman supuxo unha incorporación dos modelos de optimización de carteiras na práctica. Pero, hai que destacar que coa incorporación da normativa MIFID é previsible que este uso se incremente aínda máis debido a que, esta normativa vai supoñer un maior control de riscos e a obrigación de adaptar as carteiras dos inversores a un nivel de risco concreto que vai depender dos súas preferencias. Por iso será preciso "*usar unha metodoloxía que permita optimizar os resultados na adaptación das carteiras aos niveis de risco*" (Jaureguizar, 2008)

O obxectivo da normativa MIFID é esixir a cantos intermediarios financeiros presten servizos de inversor –xa sexan Entidade de Crédito ou Sociedades e Axencias de Valores- que sigan normas moi estritas en defensa dos intereses dos seus clientes e observen certas regras de boa organización. Desta maneira, o alcance destas normas serán todas as persoas e entidades que traballen no mercado de valores.

Coa aplicación desta normativa os xestores deben ter en conta o perfil de risco do cliente e adecuarse ao seu nivel de risco para optimizar as súas carteiras adaptándoas ao risco que reflexe o seu perfil. Coa finalidade de adecuarse ao risco desexado polo cliente e saber se hai que reducir ou aumentar o risco da carteira, os xestores realizarán test de idoneidade para analizar o VAR (valor en risco) da carteira.

Todo isto é moi importante na aplicación práctica dos modelos de optimización, xa que, os modelos clásicos (por media e varianza) crean as carteiras empregando como input as rendibilidades esperadas (moitas veces rendibilidades históricas). Isto, como xa vimos, presenta unha serie de problemas de cálculo e sensibilidade. Por iso autores como Jaureguizar (2002) opinan que será máis correcto usar a optimización inversa de Black – Litterman porque permite propoñer un modelo de rebalanceo de carteiras para facelas a medida do risco (VAR) que desexen os clientes, tal e como esixe a normativa MIFID. Por razóns de extensión deste traballo non se afondará nesta cuestión pero pode consultarse toda a información desexada sobre isto no citado traballo de Jaureguizar.

5. Uso dos modelos na actualidade

Falamos da importancia teórica que tivo o modelo de optimización de Markowitz, das facilidades de cálculo que ocasionou o modelo proposto por Sharpe e as limitacións que solucionaron Black e Litterman para a aplicación práctica da teoría de carteira a través do seu modelo. Pero, nun mundo tan tecnolóxico e cambiante como é o actual, marcado polos continuos novos avances e a globalización, que cabida ten a teoría de optimización de carteiras?

O sector financeiro é un dos máis sensibles e un dos que máis rápido e mellor se está adaptando ás novas tecnoloxías e aos avances que se están producindo a nivel mundial. Un exemplo disto son as FinTech (empresas financeiras intensivas en tecnoloxía e innovación e con ideas novidosas e disruptivas).

Neste ámbito, na liña na que o sector financeiro está avanzando con máis forza, é no sector dos servizos de automatización e todo o relacionado cos robots. Os Robo Services son servizos financeiros baseados en algoritmos que tamén se aplican á xestión de carteiras. Na xestión de carteiras, que é o ámbito que nos atinxe neste traballo, están collendo forza os Robo Advisor que son asesores de inversión que realizan grandes cálculos automatizados.

Jaureguízar (2016) define un Robo Advisor como "*unha forma de financial advisor que provee de un conxunto de algoritmos (regras matemáticas) automatizados, usualmente mediante un software para realizar a xestión de carteiras dos clientes*". É dicir, é un asesor de carteiras e non un asesor global porque non ten en conta unha planificación total do patrimonio, fiscalidade e intereses do cliente. Supoñen un gran avance para a xestión de carteiras porque fai máis sinxelos os cálculos dos modelos de optimización: permiten realizar os cálculos mediante algoritmos automatizados (sen tanta intervención humana) e un incremento da capacidade de procesar datos e traballar con eles.

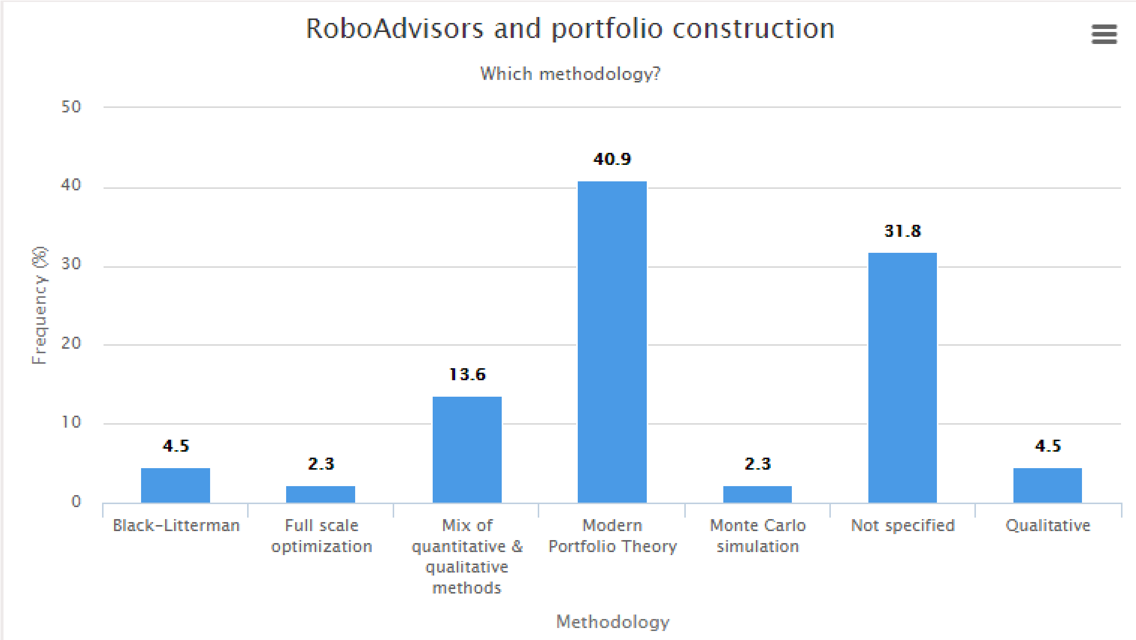
O que fan é analizar diariamente os mercados para detectar cambios nos riscos de todos os activos e nas súas tendencias (favorables ou desfavorables). Esta información úsase para analizar as carteiras e propoñer ou adecuarse ao risco que desexen os inversores. Usar un Robo Advisor ten moitas vantaxes:

- Os costes da xestión son máis baixos, polo tanto, as comisións serán máis baixas e os servizos máis eficientes.
- Aumenta a eficiencia debido á monitorización dos mercados de forma permanente e o uso de modelos máis complexos.
- A relación co usuario é máis útil e eficaz porque se pode empregar o Big Data.
- Está marcado pola innovación e a competencia.

Para medir os riscos, estas ferramentas usan as variacións das medias e varianzas, seguindo o modelo de Markowitz. O problema é que así o Robo Advisors só ten en conta o risco do usuario para asignarlle unha carteira; se ten en conta as expectativas sobre a rendibilidade dos activos financeiros dos xestores ou dos inversores, melloraría a adaptación da carteira ao seus intereses (variarían as ponderacións dos activos tendo en conta os seus puntos de vista). Un dos modelos que permite isto será o modelo de Black e Litterman.

Se nos imos a datos reais, como podemos ver no seguinte gráfico que mostra os métodos que se usan na construcción de carteiras mediante os Robo Advisors construída por Raffaele Zenti no ano 2016 despois de realizar unha enquisa a máis de 50 Robo Advisor, o modelo de Black Litterman úsase tan só un 4,5% mentres que os métodos máis usados son os da Teoría Moderna de Carteiras, é dicir, o modelo de optimización de Markowitz.

Gráfico 6 : Metodoloxías usadas nos Robo Advisors



Fonte: Raffaele Zenti (2016).

A teoría de optimización de carteiras de Markowitz, a pesar de ser unha teoría moi antiga (máis de 60 anos) úsase nos procesos máis modernos de construción de carteiras. Isto é así porque como xa se dixo ao longo deste estudo, é un bo modelo no ámbito teórico e con todos os avances tecnolóxicos, mellorouse a limitación que supoñía o cálculo e por iso é sinxelo de utilizar.

Hai que resaltar que, previsiblemente, coa incorporación da normativa MIFID II, o uso destes modelos minguará en aumento de modelos como o Black – Litterman. Porque esta normativa esixe ter en conta as expectativas do cliente e, como xa se resaltou, os modelos de optimización como o de Markowitz ou o de Sharpe non teñen en conta os puntos de vista que teñen os xestores das carteiras.

6. Aplicación práctica dos modelos

Despois de explicar os modelos dende un punto de vista teórico e coa finalidade de ilustrar mellor os seus procedementos e resultados, esta parte do traballo céntrase no desenvolvemento dos tres modelos para obter unha carteira eficiente e poder comparar os resultados que se obteñen.

O obxectivo desta parte práctica, é conseguir catro carteiras co fin de poder comparalas: nun primeiro momento calcúlase a carteira de equilibrio que resulta do modelo Black – Litterman se os inversores non teñen perspectivas para o mercado. A partir desta combinación, calcularase a súa rendibilidade e risco. Esta rendibilidade será a que se use no modelo de Markowitz e no de optimización de Sharpe para calcular a carteira resultante: concretamente, proponse unha minimización do risco suxeito á rendibilidade que se deriva da carteira obtida anteriormente. As tres carteiras obtidas terán unha composición e riscos diferentes pero unha mesma rendibilidade.

Por último, realizarase o modelo de Black – Litterman engadindo varias perspectivas do inversor. Obtense unha combinación de activos diferente das tres anteriores cun risco e rendemento tamén distinto, e realizarase unha comparación entre estas catro carteiras.

6.1 Presentación dos datos

Para a realización deste caso práctico usaranse datos de dez empresas españolas presentes no IBEX. Estas empresas pertencen a sectores de actividade diferentes para evitar que exista unha correlación alta entre elas. Así, traballaremos coas seguintes empresas:

1. Abertis: sociedade que se dedica á explotación de infraestruturas, sobre todo á xestión de autopistas e todo tipo de telecomunicacións.
2. Acerinox: sociedade que opera na industria do aceiro, sobre todo, aceiro inoxidable. Dedícase á fabricación de produtos deste material como poden ser bobinas, arames, chapas, discos, barras...
3. Amadeus: empresa que opera na área da tecnoloxía de información, sobre todo para o sector turístico. Realiza servizos de sistema de xestión de reservas, inventarios, facturación e sistema de vendas en liña.
4. BBVA (Banco Bilbao Vizcaya Argentaria): entidade bancaria e, polo tanto, opera no sector dos servizos financeiros.
5. Endesa: empresa que traballa no sector eléctrico e de gas. Afíncase dentro da industria da enerxía, xa que, os seus produtos son a electricidade e o gas natural.
6. Ferrovial: empresa que se dedica á xestión das infraestruturas de transporte e servizos ás cidades (autopistas, aeroportos, construción e servizos).
7. Mediaset: empresa que opera dentro da industria dos medios de comunicacións. É un grupo de comunicación con produtos de televisión, publicidade e multimedia.
8. Merlín Properties: sociedade de inversión de activos inmobiliarios, por iso, podemos englobala dentro da industria das empresas inmobiliarias de España.
9. Repsol: empresa que se atopa dentro da industria petroleira e dedícase a actividades de explotación, produción, transporte e refino de petróleo e gas.
10. Grifols: empresa da industria farmacéutica e do sector hospitalario. Os seus produtos están relacionados coa biociencia.

Como medida ou índice de mercado, que se usará no modelo de optimización de Sharpe, terase en conta o IBEX.

O ámbito temporal co que se vai traballar nestes exemplos será o comprendido entre Xuño do 2014 e o Xuño de 2018, é dicir, 4 anos. Úsanse, por simplicidade, datos mensuais referentes aos prezos axustados dos títulos das empresas citadas. É importante destacar que todos foron recuperados da plataforma online "*yahoo finance*".

Unha vez que temos os datos listos para traballar con eles, o primeiro paso é calcular as rendibilidades logarítimicas a través da seguinte fórmula:

$$\ln\left(\frac{\text{prezo}_t}{\text{prezo}_{t-1}}\right)$$

Unha vez que obtemos as rendibilidades logarítimicas de cada activo, é importante realizar un paso previo antes de comezar a aplicar os modelos: comprobar que os datos non presentan unha correlación elevada, xa que, isto favorecerá a diversificación nas carteiras formadas. Para iso, calcúlase a matriz de correlación e verifícase que a correlación entre as empresas non é extrema:

Táboa 1: Matriz de correlación das rendibilidades mensuais dos activos. Datos 2014 a 2018

	Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols	IBEX
Abertis	1,0000	0,3995	0,4122	0,2991	-0,0418	0,4330	0,3467	0,3311	0,3030	0,2932	0,5338
Acerinox	0,3995	1,0000	0,2888	0,2763	0,1544	0,2392	0,4083	0,2362	0,4194	0,3037	0,4444
Amadeus	0,4122	0,2888	1,0000	0,1313	0,3660	0,3143	0,2459	0,3443	0,1584	0,3631	0,3801
BBVA	0,2991	0,2763	0,1313	1,0000	0,2565	0,2440	0,4662	0,2260	0,5756	0,1778	0,8294
Endesa	-0,0418	0,1544	0,3660	0,2565	1,0000	0,0963	0,1067	0,3493	0,2305	0,1077	0,3364
Ferrovial	0,4330	0,2392	0,3143	0,2440	0,0963	1,0000	0,2044	0,4482	0,1933	0,3961	0,5653
Mediaset	0,3467	0,4083	0,2459	0,4662	0,1067	0,2044	1,0000	0,1003	0,3394	0,1846	0,4991
Merlín	0,3311	0,2362	0,3443	0,2260	0,3493	0,4482	0,1003	1,0000	0,1745	0,2693	0,4536
Repsol	0,3030	0,4194	0,1584	0,5756	0,2305	0,1933	0,3394	0,1745	1,0000	0,3517	0,6908
Grifols	0,2932	0,3037	0,3631	0,1778	0,1077	0,3961	0,1846	0,2693	0,3517	1,0000	0,4382
IBEX	0,5338	0,4444	0,3801	0,8294	0,3364	0,5653	0,4991	0,4536	0,6908	0,4382	1,0000

Fonte: Elaboración propia.

Unha vez comprobado este feito, podemos comezar a realizar as rendibilidades medias e anualizalas. En segundo lugar, calcúlase a volatilidade de cada título, definido como a desviación típica das rendibilidades logarítmicas; é importante tamén, anualizar este dato para poder comparalo. Por último, tamén se calcula a varianza das rendibilidades dos activos para futuros cálculos nos modelos. Os resultados obtidos a partir destas operacións serán os seguintes:

Táboa 2: Rendibilidades medias e medidas de risco dos activos. Datos de 2014 a 2018

	Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols	IBEX
Rent. media mensual	0,0062	0,0006	0,0195	-0,0039	-0,0030	0,0057	-0,0008	0,0091	0,0022	0,0106	-0,0023
Rent. anualizada	0,0774	0,0067	0,2609	-0,0461	-0,0356	0,0708	-0,0097	0,1149	0,0272	0,1351	-0,0269
Desvest. mensual	0,0397	0,0862	0,0512	0,0743	0,1134	0,0490	0,0702	0,0515	0,0748	0,0622	0,0452
Desvest. anualizada	0,1374	0,2986	0,1773	0,2575	0,3928	0,1699	0,2432	0,1785	0,2592	0,2154	0,1566
Varianza mensual	0,0016	0,0074	0,0026	0,0055	0,0129	0,0024	0,0049	0,0027	0,0056	0,0039	0,0020

Fonte: Elaboración propia.

Na táboa anterior, vemos que as entidades que mostran unha maior rendibilidade son Amadeus e Grifols e, tamén hai que destacar, que entre as dez empresas seleccionadas existen tres con rendibilidades negativas (BBVA, Endesa e Mediaset). No referente ao risco, a empresa que presenta unha volatilidade maior é Endesa e a que presenta un risco menor será Abertis. O risco que presentan os títulos é maior que o do índice, a excepción de Abertis. Por último, é importante comentar os valores do mercado (representado polo IBEX), xa que, este terá unha rendibilidade negativa no período de tempo analizado e volatilidade anualizada de 0,1566. Veremos se todos estes datos que se acaban de comentar teñen influencia na formación final das diferentes carteiras.

Unha vez que temos estes resultados, procédese a aplicar os tres modelos que se aplican neste traballo e conseguir catro carteiras comparables: a carteira de equilibrio de Black – Litterman, a carteira de Markowitz, a carteira de Sharpe e a carteira de Black – Litterman con perspectivas de inversores.

6.2 Carteira de equilibrio de Black – Litterman

O obxectivo deste punto é lograr unha carteira óptima seguindo o modelo de Black e Litterman sen incluír as perspectivas individuais dos inversores. Este modelo parte dun punto de equilibrio que será a carteira que estamos buscando aquí, a que responde ao mercado no caso hipotético de que todos os inversores teñan as mesmas perspectivas.

O primeiro paso para aplicar este modelo é calcular os rendementos por exceso (ou primas de risco) iniciais ou implícitas no mercado. Para iso usarase a optimización inversa aplicando a fórmula (13). Para aplicar esta fórmula, temos que calcular as matrices necesarias para realizar os cálculos. Desta maneira, nun primeiro momento temos que obter o coeficiente de aversión ao risco e, para iso, usamos:

$$\delta = \frac{E(r_m) - r_f}{\sigma^2} = \frac{0{,}0727}{0{,}002042} = 2{,}96635$$

Hai que realizar aquí unha aclaración aos datos utilizados na fórmula anterior. Para calcular delta precisamos a prima de risco de mercado esperada e a varianza de mercado. Se calculamos a prima de risco do mercado dos 4 anos estudados será negativa, porque a conxuntura económica foi mala. Isto non ten sentido, xa que, un inversor vai agardar que a prima de risco do mercado sexa positiva senón non quererá investir en Bolsa. A aproximación que se usa neste traballo, será a que estima o profesor Damodoran(http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/datafile/ctryprem .html) para España, é dicir, un 7,27%. Ao dividir entre a varianza do mercado, obtemos un resultado próximo a 3, que será a medida que usemos como coeficiente de aversión ao risco no modelo de Black – Litterman.

A matriz de varianzas – covarianzas dos rendementos en exceso (Σ) que se vai usar para o cálculo deste modelo será a recollida na seguinte táboa:

Táboa 3: Matriz varianzas - covarianzas dos rendementos. Datos de 2014 a 2018

	Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols	IBEX
Abertis	0,00157367	0,00136615	0,00083694	0,00088212	-0,0001881	0,00084233	0,00096542	0,00067686	0,00089937	0,00072315	0,00095696
Acerinox	0,00136615	0,00743036	0,00127444	0,00177044	0,00150863	0,00101122	0,00247068	0,00104952	0,00270532	0,00162781	0,00173118
Amadeus	0,00083694	0,00127444	0,00262036	0,0004995	0,00212441	0,00078903	0,00088357	0,00090834	0,00060669	0,00115577	0,00087931
BBVA	0,00088212	0,00177044	0,0004995	0,00552639	0,00216236	0,00088967	0,00243294	0,00086595	0,00320191	0,00082178	0,00278642
Endesa	-0,0001881	0,00150863	0,00212441	0,00216236	0,01285663	0,00053562	0,00084901	0,00204143	0,00195606	0,00075935	0,00172381
Ferrovial	0,00084233	0,00101122	0,00078903	0,00088967	0,00053562	0,00240485	0,00070359	0,00113279	0,00070933	0,00120774	0,00125271
Mediaset	0,00096542	0,00247068	0,00088357	0,00243294	0,00084901	0,00070359	0,00492858	0,00036297	0,00178299	0,00080582	0,00158334
Merlín	0,00067686	0,00104952	0,00090834	0,00086595	0,00204143	0,00113279	0,00036297	0,00265642	0,00067309	0,000863	0,00105662
Repsol	0,00089937	0,00270532	0,00060669	0,00320191	0,00195606	0,00070933	0,00178299	0,00067309	0,00559929	0,00163656	0,0023359
Grifols	0,00072315	0,00162781	0,00115577	0,00082178	0,00075935	0,00120774	0,00080582	0,000863	0,00163656	0,00386614	0,0012314
IBEX	0,00095696	0,00173118	0,00087931	0,00278642	0,00172381	0,00125271	0,00158334	0,00105662	0,0023359	0,0012314	0,00204235

Fonte: Elaboración propia.

Por últimos, temos que calcular os pesos (ω) dos activos de acordo coa súa capitalización bursátil no mercado. Con este fin usaremos a seguinte fórmula:

$$\frac{\text{prezo} * \text{nº de títulos}}{\text{capitalización total}}$$

Usando datos recollidos da web da Bolsa de Madrid (www.bolsamadrid.es) a día 3 de Xullo do 2018, chegouse aos resultados presentados na seguinte táboa:

Táboa 4: Capitalización bursátil dos activos

	Cotización	Nº de títulos	Capitalización Bursátil	W
Abertis	18,36	990.381.000,00	18.183.395.160,00	0,067428892
Acerinox	10,815	276.068.000,00	2.985.675.420,00	0,011071683
Amadeus	67,5	438.823.000,00	29.620.552.500,00	0,10984093
BBVA	6,02	6.667.887.000,00	40.140.679.740,00	0,148852375
Endesa	19,345	1.058.752.000,00	20.481.557.440,00	0,075951092
Ferrovial	17,44	739.315.000,00	12.893.653.600,00	0,047813116
Mediaset	7,146	327.435.000,00	2.339.850.510,00	0,008676791
Merlin	12,29	469.771.000,00	5.773.485.590,00	0,021409628
Repsol	16,86	1.556.465.000,00	26.241.999.900,00	0,097312353
Grifols	26,05	4.261.300.000,00	111.006.865.000,00	0,41164314
		TOTAL	269.667.714.860,00	1

Fonte: Elaboración propia.

Polo tanto, a carteira de equilibrio do modelo de Black – Litterman, estará composta da maneira que figura na táboa 5, segundo a capitalización bursátil dos títulos:

Táboa 5: Carteira de equilibrio de Black - Litterman

Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols
6,74%	1,11%	10,98%	14,89%	7,60%	4,78%	0,87%	2,14%	9,73%	41,16%

Fonte: Elaboración propia.

No hipotético caso de que os inversores non tiveran perspectivas para o mercado, esta sería a carteira óptima resultante do modelo de Black e Litterman. Poderíamos calcular os rendementos implícitos a partir da fórmula (13), a partir destas matrices obtidas. Os rendementos implícitos serán os seguintes:

Táboa 6: Rendementos mensuais implícitos no mercado

	Π
Abertis	0,002309
Acerinox	0,005096
Amadeus	0,003541
BBVA	0,005496
Endesa	0,006275
Ferrovial	0,003083
Mediaset	0,003576
Merlin	0,002895
Repsol	0,006125
Grifols	0,006549

Fonte: Elaboración propia.

A partir diso podemos calcular a rendibilidade e a volatilidade que terá esta carteira de equilibrio: a rendibilidade será de 8,295% e o risco dun 4,23%, ambos anualizados. Esta rendibilidade será a que se use na realización da optimización de Markowitz e de Sharpe para conseguir carteiras comparables.

6.3 Carteira de Markowitz

O obxectivo deste apartado é aplicar o modelo de optimización de Markowitz para lograr unha carteira óptima para o inversor que teña o mesmo rendemento que a carteira calculada no apartado anterior. É dicir, búscase minimizar o risco da carteira suxeito a unha rendibilidade dada (8,295%).

A carteira óptima calculouse a través da ferramenta *solver* do programa Excel. Loxicamente, é necesario establecer as restricións precisas para o cálculo do modelo de optimización de Markowitz co fin de conseguir a carteira óptima:

- As proporcións nas que cada activo debe formar parte da carteira teñen que ser positivas.
- A suma do conxunto de todas as proporcións dos activos debe proporcionarnos o 100% da carteira.
- Neste caso, como estamos facendo depender os resultados dunha rendibilidade dada, temos que establecer como restrición que esta debe ser igual a 8,295%.

Tendo en conta as rendibilidades anualizadas do mercado e estas restricións podemos calcular a carteira de Markowitz que minimiza o risco para a rendibilidade desexada. Así, obtemos os seguintes resultados:

Táboa 7: Carteira de Markowitz

Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlin	Repsol	Grifols
43,92%	0,00%	6,35%	1,97%	4,24%	14,27%	6,71%	13,82%	2,13%	6,58%

Fonte: Elaboración propia.

Unha vez que temos as proporcións de cada título dentro da carteira podemos calcular o seu risco que será de 3,278%. No referente a súa rendibilidade, como xa diximos, será de 8,295%.

6.4 Carteira de Sharpe

O obxectivo deste apartado, ao igual que no caso do modelo anterior, é minimizar o risco da carteira suxeito á rendibilidade da carteira de equilibrio do modelo de Black e Litterman (8,295%).

Para o cálculo da carteira que deriva do modelo de optimización de Sharpe precisaremos un índice de mercado que, neste caso, como xa se adiantaba, será o IBEX. É preciso calcular a rendibilidade media, anualizada e a varianza destes datos (véxase a táboa 2) para poder comezar coa análise. Tamén é necesario coñecer a covarianza anualizada entre cada un dos títulos e o índice.

Tal e como se expoñía na parte teórica, este modelo precisa do cálculo das alfas e betas correspondentes á carteira, para o cal, precisamos previamente coñecer ás de cada un dos títulos individualmente. Aplicamos as fórmulas (5) e (6) cos datos citados anteriormente e obtemos as seguintes alfas e betas:

Táboa 8: Estimadores (alfas e betas) do modelo de mercado para cada título.

	Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols
ALFA	0,0900	0,0295	0,2725	-0,0094	-0,0129	0,0873	0,0112	0,1289	0,0580	0,1514
BETA	0,4686	0,8476	0,4305	1,3643	0,8440	0,6134	0,7753	0,5174	1,1437	0,6029

Fonte: Elaboración propia.

Unha vez que temos calculados estes estimadores, temos a recta de regresión que nos permitirá calcular as estimacións de rendibilidade. É importante facer aquí unha puntualización: o estimador beta non ten unidade de medida pero, en contraposición alfa si. Polo tanto, usaremos o estimador alfa anual para calcular a rendibilidade da carteira e o estimador mensual cando se calculen as estimacións mensuais de rendibilidade para cada título e os residuos mensuais ou perturbacións de cada un (ε) no modelo de mercado de Sharpe.

Realmente, o que se precisa para completar o cálculo do modelo de optimización de Sharpe é a varianza desta última variable calculada (ε). Como estamos usando alfas mensuais, estas varianzas residuais serán mensuais, polo que teremos que anualizalas para poder medir o risco específico da carteira. Obtéñense así os seguintes resultados.

Táboa 9: Varianzas residuais anualizadas dos títulos

	Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols
Var (ε)	0,013503	0,075077	0,026937	0,040363	0,140275	0,020152	0,046718	0,025376	0,046304	0,037927

Fonte: Elaboración propia.

Para calcular a rendibilidade da carteira aplícase a ecuación (9), e para o risco as ecuacións (10) e (11) expostas no capítulo 3.

Como neste caso estamos partindo dunha rendibilidade predeterminada (8,295%) para a carteira, aplícase a ferramenta de excel *solver* para un planteamento de minimización de risco suxeito a unhas restricións:

- As porcentaxes investidas en cada clase de activo non poden ser negativas.
- A suma das porcentaxes investidas en cada activo ten que ser igual ao 100% da carteira.
- A rendibilidade da carteira resultante ten que ser igual á rendibilidade da carteira de equilibrio calculada no apartado 6.2.

Aplicamos a ferramenta de excel con estas restricións, e a carteira resultante para este modelo de optimización de Sharpe terá a seguinte composición:

Táboa 10: Carteira de Sharpe

Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols
25,64%	5,60%	6,23%	0,00%	0,00%	11,12%	14,35%	15,99%	6,35%	14,71%

Fonte: Elaboración propia.

Unha vez que temos calculados os porcentaxes de cada clase de activo, calculamos o risco da carteira coa finalidade de, posteriormente, comparala co resto de carteiras resultantes desta análise. O risco anualizado da carteira mostrada na táboa anterior será de 1,35%.

6.5 Carteira de Black – Litterman con perspectivas

A última carteira óptima que queda por calcular é a que resulta de aplicar o modelo de Black – Litterman con perspectivas dos inversores sobre o mercado no que cotizan as distintas clases de títulos.

Como punto de partida deste modelo, imos usar os pesos calculados no apartado 6.2. A partir desta carteira, imos calcular unha nova incluíndo as perspectivas que teñen os inversores sobre o mercado.

Precisamos coñecer todos os termos da ecuación (15) para poder levar a cabo o desenvolvemento do modelo de Black e Litterman e calcular a rendibilidade. Desta maneira teremos:

- τ : Idzorek (2002) mantén que o seu valor debe ser pequeno, tendente a cero. Canto máis pequeno, implica unha maior confianza na carteira de equilibrio e, polo tanto, que as modificacións deste deben ser mínimas. Con este finalidade, o valor de tau para este exercicio será de 0,01 (1%). Este valor, será o que suman as variacións dos pesos dos activos da carteira de equilibrio á de Black Litterman, tal e como se comprobará posteriormente.
- Σ : será a matriz de covarianzas entre os distintos títulos cos que se está traballando.
- P : é un vector que contén as vistas ou perspectivas que teñen os inversores sobre o mercado. Neste caso as vistas son relativas polo que, podemos diferenciar
    - *Underperforming assets*: activos para os que se espera que lles vaia peor que a outros. Son os que teñen valores negativos.

- *Outperforming assets*: activos para os que se espera que lles vaia mellor que aos outros. Son os que teñen valores positivos.

Seguindo as recomendacións actuais de compra e venda (porque se agarda que o valor do título suba ou que baixen), podemos considerar unha vista na que Ferrovial vaia mellor no mercado que Abertis e Merlín mellor que Grifols, supoñamos que nun 10% anual e outra vista na que se espere que BBVA vaia mellor que Amadeus e Acerinox mellor que Repsol, supoñamos que nun 20% anual. Desta maneira, obtemos a seguinte matriz P:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -0{,}14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}61 & 0 & 0{,}39 & 0 & -0{,}86 \\ 0 & -0{,}09 & -0{,}91 & 0{,}6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$$

Como vemos, os valores "*outperformers*" teñen valores positivos e os "*underperformers"* valores negativos. Os valores seguen un esquema de ponderacións relativas aos pesos de mercado, é dicir, na primeira vista os valores "*underperformers"* que son Abertis e Grifols teñen unha capitalización que suma 129.190.260.160, se calculamos o peso relativo de cada unha das empresas, Abertis tería un 14% e Grifols o 86% restante. Os *"outperformers"* son Ferrovial e Merlín e as súas capitalizacións suman 1.209.086.000, da cal o 61% corresponde a Ferrovial e o 39% a Merlín. No caso da segunda vista, os valores "*outperformers*" serán Repsol e BBVA, a suma da súa capitalización ascende a 66.382.679.640 da cal, un 60% correspóndese con BBVA e o 40% restante con Repsol; por último, os activos "*underperformers*" da segunda vista serán Acerinox e Amadeus, a suma da súa capitalización será 32.606.27.920 dividíndose nun 9% de Acerinox e un 91% de Amadeus. Desta maneira, a suma dos valores en cada vista será de cero.

- Ω : Idzorek (2002) recomenda calcular os valores desta matriz diagonal sen ter en conta tau. É dicir, calculala como P*Σ*P'. Facendo isto, obtense a seguinte matriz:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0{,}002838 & 0 \\ 0 & 0{,}005488 \end{pmatrix}$$

- Π : é a matriz que contén os rendementos implícitos. Foi calculada no apartado 6.2 a partir da fórmula (13) e obténdose os resultados da táboa 6.

- Q : é un vector que expresa a rendibilidade en exceso que se espera dun activo fronte a outro nas vistas relativas. Como xa se dixo, na primeira vista espérase que Merlín e Ferrovial superen a Grifols e Abertis nun 10% anual, entón, o primeiro elemento de Q correspondente coa primeira vista será de 0,833% mensual, porque se aplica sobre a matriz de covarianzas que é mensual. Na segunda vista, fálase de que BBVA e Repsol superarán a Amadeus e Acerinox nun 20% anual e, polo tanto, nun 0,0166% mensual. Desta maneira, esta matriz queda como:

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}00833 \\ 0{,}01667 \end{pmatrix}$$

Unha vez que están definidas todas estas matrices, procédese a realizar todas as operacións necesarias para resolver a ecuación (15) e obter o novo vector de rendemento posterior combinando os rendementos inicias coas vistas ou preferencias dos inversores. Tras realizar todos os cálculos precisos, obtemos os seguintes resultados:

Táboa 11: Vector de rendementos posteriores

E (R)
0,00508254
0,0034786
0,0056031
0,00629463
0,00311275
0,0035961
0,00292645
0,0061805
0,00645485

Fonte: Elaboración propia.

Unha vez calculados os rendementos posteriores, podemos calcular a nova matriz de covarianzas posterior a partir das fórmulas (18) e (19):

Táboa 12: Matriz de covarianzas posterior

Σp = Σ + M	Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols
Abertis	0,00159	0,00138	0,00085	0,00089	-0,00019	0,00085	0,00098	0,00068	0,00091	0,00073
Acerinox	0,00138	0,00750	0,00129	0,00179	0,00152	0,00102	0,00250	0,00106	0,00273	0,00164
Amadeus	0,00085	0,00129	0,00265	0,00050	0,00215	0,00080	0,00089	0,00092	0,00061	0,00117
BBVA	0,00089	0,00179	0,00050	0,00558	0,00218	0,00090	0,00246	0,00087	0,00323	0,00083
Endesa	-0,00019	0,00152	0,00215	0,00218	0,01299	0,00054	0,00086	0,00206	0,00198	0,00077
Ferrovial	0,00085	0,00102	0,00080	0,00090	0,00054	0,00243	0,00071	0,00114	0,00072	0,00122
Mediaset	0,00098	0,00250	0,00089	0,00246	0,00086	0,00071	0,00498	0,00037	0,00180	0,00081
Merlín	0,00068	0,00106	0,00092	0,00087	0,00206	0,00114	0,00037	0,00268	0,00068	0,00087
Repsol	0,00091	0,00273	0,00061	0,00323	0,00198	0,00072	0,00180	0,00068	0,00566	0,00165
Grifols	0,00073	0,00164	0,00117	0,00083	0,00077	0,00122	0,00081	0,00087	0,00165	0,00390

Fonte: Elaboración propia.

Esta nova matriz de covarianza é a que usamos para calcular na ecuación (13) os pesos, pero en vez de tomar os rendementos ímplícitos (Π) collemos os rendementos esperados (E(R)) calculados anteriormente. Desta maneira, obtemos a composición da nova carteira de Black – Litterman, tendo en conta as perspectivas dos inversores:

Táboa 13: Carteira de Black - Litterman con perspectivas dos inversores

Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols
6,49%	1,02%	10,07%	15,27%	7,52%	5,53%	0,86%	2,63%	9,99%	39,63%

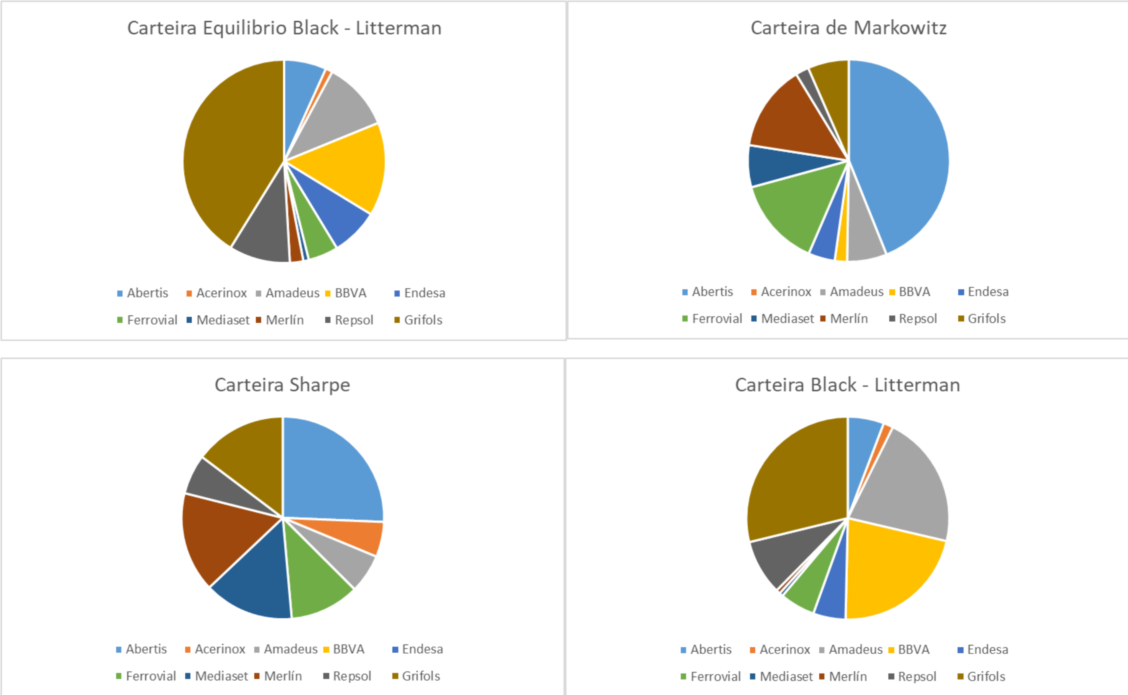
Fonte: Elaboración propia.

Unha vez que temos as proporcións nas que se atopa cada título dentro da carteira óptima de Black – Litterman, podemos calcular a súa rendibilidade e o seu risco para poder comparalas coas anteriores. Así teremos que esta carteira terá unha rendibilidade de 7,95% e un risco de 4,17%.

6.6 Comparación das carteiras

Como vemos na comparación visual que nos mostran os gráficos posteriores e como xa se veu adiantando durante toda a exposición: as carteiras resultantes dos distintos modelos son diferentes na proporción de cada activo que as compón. Tampouco é de estrañar que os valores referentes á rendibilidade e risco sexa distinto (salvo a rendibilidade nas tres primeiras porque se tomou como dada). En base a todo isto, vanse comparar estes valores e tratar de comentar as súas posibles razóns.

Gráfico 7: Composición das carteiras



Fonte: Elaboración propia.

Coa finalidade de realizar unha mellor comparación as seguintes táboas mostran un resume de todos os resultados obtidos (proporción de cada activo dentro das diferentes carteiras, rendibilidade e risco):

Táboa 14: Composición das carteiras

	Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols
Carteira Equilibrio Black - Litterman	6,74%	1,11%	10,98%	14,89%	7,60%	4,78%	0,87%	2,14%	9,73%	41,16%
Carteira de Markowitz	43,92%	0,00%	6,35%	1,97%	4,24%	14,27%	6,71%	13,82%	2,13%	6,58%
Carteira Sharpe	25,64%	5,60%	6,23%	0,00%	0,00%	11,12%	14,35%	15,99%	6,35%	14,71%
Carteira Black - Litterman	6,49%	1,02%	10,07%	15,27%	7,52%	5,53%	0,86%	2,63%	9,99%	39,63%

Fonte: Elaboración propia.

Táboa 15: Rendibilidade e risco das carteiras

	Rend. Carteira	Risco carteira
Carteira Equilibrio Black - Litterman	8,30%	4,23%
Carteira de Markowitz	8,30%	3,28%
Carteira Sharpe	8,30%	1,35%
Carteira Black - Litterman	7,95%	4,18%

Fonte: Elaboración propia.

O primeiro que chama a atención é que ningún modelo dá a mesma importancia a ningún activo. Queda claro, que os máis rentables son Abertis e Grifols e Black – Litterman aposta por este últino (na carteira de equilibrio pon case a metade dos recursos en Grifols (41,16%) e na última carteira apostará nun 39,63%). Mentres que, tanto Markowitz como Sharpe apostarán máis por Abertis: o primeiro nun 41,16% e o segundo diversifica un pouco máis (no que a este porcentaxe se refire), xa que, a porcentaxe máxima que inviste en Abertis será tan só do 25,64%.

Se comparamos as tres primeiras carteiras, que están calculadas en base á mesma rendibilidade (8,295%), vemos que o risco que presenta cada unha delas é diferente. A carteira de equilibrio de Black – Litterman é a que presenta un risco maior, seguido da de Markowitz e, por último, a de Sharpe.

A carteira de Sharpe presenta un risco claramente inferior ao resto, pero isto deriva da infravaloración que fai este modelo do risco. Sharpe impón no referente ao risco analizado (ε) unha serie de restricións entre a que temos que destacar que a covarianza entre dous activos nun mesmo período de tempo é cero. Esta cuestión é moi relevante, xa que, como consecuencia dela, o modelo de Sharpe está infravalorando o risco porque non ten en conta as covarianzas na suma do risco. Isto fará que se desaconselle o seu uso porque non ten en conta o risco real.

A carteira de Markowitz ten un menor risco que as dúas de Black – Litterman. Pero se temos en conta as perspectivas do mercado (o que se espera del), mentres Markowitz dá moito peso a Abertis que é un título do que se espera pouco no mercado, Black – Litterman dá moito peso a Grifols, que é un título do que o mercado si que espera un desenvolvemento positivo. Hai que destacar, que a pesar da crítica de que Markowitz dea lugar a carteiras extremas (concentradas en poucos activos), neste caso non se observa excesivamente. Si que é certo que das catro é a carteira que concentra un maior porcentaxe investido nun activo (un 41,92% en Abertis) pero non é moi distante dos porcentaxes de Black – Litterman (aínda que en diferentes activos). Só da moito peso a un activo e, ademais, só deixa un activo sen incluír na carteira. Si que se observa no caso da carteira de Sharpe que as súas ponderacións son menos extremas que nas outras dúas carteiras comparadas.

Se nos centramos na diversificación, vemos que na carteira de Markowitz só queda un activo fóra e na de Sharpe, dous. As carteiras analizadas de Black – Litterman teñen en conta todos os activos. Polo que, a pesar de estar analizando poucas carteiras para sacar conclusións no ámbito da diversificación, podemos aventurar a importancia que ten diversificar para reducir o risco non sistemático: cando aumenta o número de títulos redúcese o risco (sistemático e non sistemático) pero máis o risco non sistemático.

Centrándonos agora na comparación entre as dúas carteiras do modelo Black – Litterman, vemos que a carteira coas perspectivas dos inversores ten menos rendibilidade que a de equilibrio porque esta rendibilidade está calculada en función dos valores de rendibilidade históricos e nos catro anos analizados neste traballo foron máis rendibles aqueles títulos para os que se agarda que suban pouco ou incluso baixen. É dicir, os títulos que teñen expectativa de subir son os que caeron moito no pasado e están baratos mentres os que teñen expectativa de baixar son os que subiron moito de prezo e, polo tanto, están caros. A composición das dúas carteiras son moi parecidas como podemos ver na seguinte táboa que mostra as variacións entre as dúas carteiras:

Táboa 16: Variación carteira de equilibrio á Black - Litterman

Variaciones de los pesos de la cartera de equilibrio a la BL:										
Abertis	Acerinox	Amadeus	BBVA	Endesa	Ferrovial	Mediaset	Merlín	Repsol	Grifols	Suma de variaciones:
-0,25%	-0,09%	-0,91%	0,38%	-0,08%	0,75%	-0,01%	0,49%	0,26%	-1,53%	-0,99%

Fonte: Elaboración propia.

Como xa se adiantaba canso se falou de tau, a variación total da carteira será igual ao 1% ($\tau = 0{,}01$). A ponderación da nova carteira é máis ou menos o 99%, mentres que a da carteira de equilibrio será do 100%. Este 1% é o que suman as variacións dos pesos dos activos da carteira de equilibrio á de Black – Litterman.

Se nos fixamos nos pesos de cada activo, vemos que na carteira tendo en conta as perspectivas, os activos que se consideraron "outperformers" teñen un peso maior do que tiñan na de equilibrio, mentres que os activos considerados "underperformers" teñen un peso menor na última carteira. É obvio, invístese máis nos activos cos que se considera que se vai gañar e menos naqueles que as perspectivas de mercado din que van baixar ou que perderíamos con eles. Por último, os activos para os que non se ten ningunha previsión (non son obxecto de ningunha vista), Endesa e Mediaset, sofren unha pequena diminución como consecuencia do reaxuste da carteira, aínda que, teoricamente non deberían verse afectados.

En resumo, vemos que a carteira que nos reporta un risco menor será a de Sharpe pero, unha vez comentadas as razóns deste menor risco relacionadas coa infravaloración que fai del este modelo, pódese dubidar da súa veracidade. Entre a Carteira de Equilibrio e a de Markowitz, esta última será a que nos reporta un menor risco, por iso, en igualdade de condicións, preferirase esta. Na comparación entre as dúas carteiras que derivan de aplicar o modelo de Black – Litterman, aínda que a primeira nos reporte unha rendibilidade maior, sería máis adecuado seguir a indicación da última carteira porque ten en conta as perspectivas de mercado e pode levarnos a mellores resultades na realidade (ten unha rendibilidade agardada menor pero tamén un risco menor).

Como vemos todos os modelos nos levan a resultados similares, polo que, a súa aplicación dependerá dos recursos dos que dispoñamos, da facilidade para obter a información precisa para cada un deles e de se existen ou non expectativas dos inversores (ou si se queren ou non ter en conta).

Conclusións

A Teoría de carteiras axuda a un inversor racional a tomar decisións financeiras óptimas para obter os mellores resultados para a súa inversión. Presentáronse de maneira teórica e práctica tres modelos de optimización e falouse da importancia teórica que tivo o modelo de optimización de Markowitz, das facilidades de cálculo que ocasionou o modelo de optimización proposto por Sharpe e as limitacións destes dous que tratou de solucionar o modelo matemático de Black – Litterman. Pero, a pesar de todos os problemas e de que é un modelo presentado nos anos cincuenta, o modelo de Markowitz segue a ser o máis usado na actualidade.

As melloras tecnolóxicas que se están producindo a nivel mundial e, concretamente, no mundo das finanzas, facilitaron o cálculo da optimización proposta por Markowitz e esta segue a ser a máis usada, incluso despois da aparición dos Robo Advisors. Tal e como se puxo de manifesto na parte práctica deste traballo, o modelo de Sharpe infravalora o risco debido a que non considera parte do mesmo porque considera que as covarianzas entre os residuos son nulas cando, en realidade, non o son. Neste sentido, aínda que este modelo simplifique os cálculos con respecto ao modelo proposto anteriormente, os resultados non recollen na súa totalidade o risco e isto fai que, unha vez que os avances tecnolóxicos simplificaran o cálculo da optimización de Markowitz, o modelo de Sharpe quedara nun segundo plano para a busca de carteiras óptimas.

É importante destacar a relevancia que tivo o modelo de Black – Litterman para a asignación de carteiras, xa que, permitiu ter en conta as opinións dos inversores e xestores. Grazas a isto pode adaptarse mellor a carteira óptima ao perfil de risco do inversor e as súas necesidades de rendemento. Permite ter en conta os movementos do mercado. Vimos na aplicación práctica que a carteira resultante deste modelo tiña un rendemento agardado menor que a carteira de equilibrio, neste caso os activos que teñen expectativas de subir son os que caeron moito durante os anos analizados e, polo tanto, están baratos e os que teñen expectativas de baixar son os que están caros porque subiron moito nos anos analizados. Por isto é relevante analizar as carteiras dende a perspectiva do mercado, para poder obter composicións máis realistas e que nos reporten un risco e rendemento máis próximo ao real.

A pesar de todo o anterior, vimos que a importancia do modelo Black – Litterman na aplicación práctica real da teoría de carteiras non é moi grande, xa que, o seu uso é limitado. É previsible que coa nova normativa MIFID II aumente o seu uso porque esta esixe que as decisións dos xestores se adapten ao perfil de risco do inversor. De todas maneiras, isto non se pode afirmar con total seguridade, xa que, a tecnoloxía avanza a pasos axigantados e co impulso da investigación poderán xurdir novos modelos, novas adaptacións dos modelos tradicionais ou simplificacións destes para adaptarse ás novas necesidades do mundo financeiro e, en particular, á asignación de carteiras.

Bibliografía

Black, F. & Litterman, R. (1992). "*Global Portfolio Optimization".* Financial Analysts Journal, September – October. (pp. 28-43).

Fama, E. (1965). "*The Behavior of Stock Prices".* Journal of Business, 38. (pp. 34-105).

Fama, E. (1976). "*Foundations of Finance*". Basic Books, New York.

He, G. & Litterman, R. (1999). "*The Intuition Behind Black – Litterman Model Portfolios".* Goldman, Sachs & Co., Investment Management Researchs, December.

Idzorek, T. (2002). "*A step-by-step guide to the Black – Litterman Model".*

Recuperado o 28 de Xuño de 2018 en:

<https://corporate.morningstar.com/ib/documents/MethodologyDocuments/IBBAssociates/BlackLitterman.pdf>.

Jaureguizar, C. (2008). "*Un modelo de rebalanceo de carteras en base al var por optimización inversa y Black – Litterman en un entorno MIFID".* Análisis Financiero, 107. (pp. 44-53).

Jaureguizar, C. (2016). *"Incorporación de un robo advisor: el uso por parte de una entidad financiera"*. Recuperado o 15 de Xuño de 2018 en:

<www.rankia.com/blog/sistemas-de-trading/3572692-incorporacion-robo-advisor-uso-por-parte-entidad-financiera>.

Kahneman D. & Tversky, A. (1979). "*Prospect Theory: an analysis of decision under risk*". Econometrica, 47. (pp. 263-291).

Luna, S. & Tamayo, M. (2015). "*Aplicación del Modelo Black – Litterman al mercado de renta variable colombiano".* Grupo de investigación en Finanzas y Banca. Universidad EAFIT.

Markowitz, H. (1952). "*Portfolio selection".* The Journal of Finance, 7. (pp. 77-91).

Markowitz, H. (1959). “*Porfolio selection: Efficient diversification of investiment”.* Wiley & sons, New York.

Mendizábal, A., Miera. L & Zubia, M. (2002). *“El modelo de Markowitz en la gestión de carteras”* Cuadernos de Gestión, 2 (1). (pp 33-46).

New York Institute of Finance (1989). “*Technical Analysis. A personal similar”.* New York Institute of Finance.

Satchell, S. & Scowcroft, A. (2000). “*A Demystification of the Black-Litterman Model: Managing Quantitative and Traditional Construction*.” Journal of Asset Management, September. (pp. 138-150).

Sharpe, W. (1963). “*A simplified model for portfolio analysis*”, Management of Science, 9(2), pp. 277-293.

Sharpe, W. (1976). “Teoría de cartera y del mercado de capitales”. Deusto, Bilbao.

Villalba, D. (2016). “*Teoría y práctica de la gestión de carteras”.* Colección Estudios & Investigación de Bolsas y Mercados Españoles.

Xu, P., Chen, A. & Wah, P. (2008). “*Black – Litterman Model”.* Statistics 157.

Recuperado o 9 de Xuño de 2018 en:

<https://www.stat.berkeley.edu/~nolan/vigre/reports/Black-Litterman.pdf>.

Zenti, R. (2016). *“Roboadvisors like a Commodore VIC20? Apparently, according to this quick survery….”.* Recuperado o 15 de Xuño de 2018 en:

<www.linkedin.com/pulse/roboadvisors-like-commodore-vic20-apparently-according-raffaele-zenti/>