



UNIVERSIDADE DA CORUÑA
Escuela Politécnica Superior

Apuntes de 730G03026, 730G05018 -Mecánica

14 de julio de 2017

Ana Jesús López Díaz
Alberto Ramil Rego

Escuela Politécnica Superior

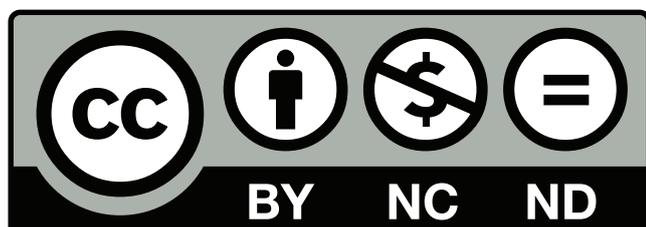
Título: Apuntes de 730G03026, 730G05018 -Mecánica

Autora: Ana Jesús López Díaz; Alberto Ramil Rego

Año: 2011

Centro: Escola Politécnica Superior, Universidade da Coruña (SPAIN)

Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 España.





Índice

0. Método para resolver problemas	1
0.1. Método general	1
0.1.1. Diseño de una estrategia	1
0.1.2. Ejecución de la estrategia	2
0.1.3. Comprobación del resultado	2
0.2. Resumen y conclusiones	3
0.3. Bibliografía	3
1. Introducción a la cinemática	5
1.1. Cambio de referencia ortonormal. Transformación de las componentes de un vector.	5
1.2. Forma matricial de una rotación.	7
1.3. Tensores cartesianos de segundo orden.	8
1.4. Derivada de un vector en una base móvil.	9
1.5. Triedro intrínseco. Fórmulas de Frenet.	10
1.5.1. Triedro intrínseco	12
1.5.2. Curvatura y torsión	12
1.5.3. Fórmulas de Frenet	13
1.6. Velocidad y aceleración. Componentes intrínsecas.	14
1.6.1. Velocidad y aceleración. Definiciones y unidades.	14
1.6.2. Componentes intrínsecas de la aceleración.	15
2. Cinemática del sólido rígido	21
2.1. Sólido rígido. Grados de libertad. Condición cinemática de rigidez	21
2.2. Movimiento de traslación y rotación.	22
2.3. Distribución helicoidal de velocidades. Teorema de Chasles	24
2.4. Grupo cinemático. Invariantes	24
2.5. Eje instantáneo de rotación. Velocidad de deslizamiento mínimo	25
2.6. Axoides	26
2.7. Distribución de aceleraciones	26
2.8. Ángulos y rotaciones de Euler.	27
3. Composición de movimientos	31
3.1. Composición de velocidades	31
3.2. Composición de rotaciones	32
3.3. Composición de aceleraciones	32
3.4. Composición de aceleraciones angulares	33
3.5. Movimientos inversos	33
3.6. Movimientos relativos de sólidos en contacto.	33
4. Movimiento plano del sólido rígido	35
4.1. Centro instantáneo de rotación. Base y ruleta.	35
4.2. Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación.	37
4.3. Distribución de aceleraciones.	38
4.4. Circunferencia de las inflexiones y de las inversiones. Polo de aceleraciones.	38
5. Fuerzas distribuidas	43
5.1. Centro de masas	43
5.2. Tensor de Inercia	44
5.3. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos	45
5.4. Diagonalización del tensor de inercia	46
5.5. Simetrías en las distribuciones de masas	47

5.6. Elipsoide de inercia	48
6. Equilibrio del sólido rígido	63
6.1. Equilibrio del sólido rígido libre	63
6.1.1. Equilibrio de Sólidos Ligados: Principio de liberación	63
6.2. Principio del trabajo virtual. Aplicación a la estática.	64
6.3. Energía potencial y criterios de estabilidad del equilibrio.	65
6.3.1. Estabilidad del equilibrio.	66
7. Equilibrio de hilos	71
7.1. Ecuación de equilibrio del hilo ideal.	71
7.2. Equilibrio bajo un sistema de fuerzas paralelas.	73
7.3. Hilo bajo la acción de su propio peso. Catenaria.	73
8. Principios de la dinámica	77
8.1. Principios y Leyes de la mecánica de Newton	78
8.2. Principio de D'Alembert	79
8.3. Principio variacional de Hamilton	80
9. Elementos básicos de Mecánica Analítica	83
9.1. Ligaduras en sistemas físicos. Definición, propiedades y clasificación.	83
9.2. Coordenadas y fuerzas generalizadas.	83
9.3. Principio de D'Alembert.	84
9.4. Ecuación general de la dinámica para un sistema con ligaduras sin rozamiento.	85
9.5. Fuerzas, trabajo y energía en coordenadas generalizadas	86
10. Formulación de Lagrange	87
10.1. Ecuaciones de Lagrange.	87
10.2. Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación.	89
10.3. Aplicaciones sencillas de la formulación de Lagrange.	90
10.4. Constantes del movimiento. Teoremas de conservación	90
10.4.1. Constantes del movimiento	90
10.4.2. Teoremas de conservación. Coordenadas cíclicas	90
10.5. Principio variacional de Hamilton. Aplicación a la derivación de las ecuaciones de Lagrange.	92
10.6. Función hamiltoniana.	93
10.7. Ecuaciones de Hamilton.	94
10.8. Eliminación de coordenadas cíclicas. Función de Routh.	94
11. Dinámica del sólido rígido con un eje fijo	97
11.1. Ecuaciones del movimiento de un sólido con un eje fijo.	97
11.2. Reacciones en el eje de giro. Equilibrado estático y dinámico.	98
12. Dinámica del sólido rígido con un punto fijo	101
12.1. Ecuaciones del movimiento de un sólido indeformable con un punto fijo. Cantidad de movimiento, momento cinético y energía cinética.	101
12.2. Aplicación del teorema del momento cinético. Ecuaciones de Euler.	102
12.3. Integración de las ecuaciones de Euler en ausencia de pares. Casos de elipsoide de revolución y elipsoide asimétrico.	103
12.4. Movimiento de un sólido pesado alrededor de un punto fijo. Trompo de Lagrange.	108



13. Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio	115
13.1. Pequeñas oscilaciones alrededor de posiciones de equilibrio.	115
13.1.1. Oscilaciones libres en un sistema con N grado de libertad.	117
13.2. Determinación de frecuencias naturales de oscilación.	118
13.3. Caracterización del movimiento según los distintos modos de oscilación. Estabilidad del movimiento.	119
13.4. Respuesta temporal del sistema ante fuerzas aplicadas. Vibraciones en máquinas como oscilaciones forzadas.	121

Escuela Politécnica Superior



0. Método para resolver problemas

0.1 Método general.

0.2 Resumen y conclusiones.

Apéndice A: dimensiones de magnitudes mecánicas.

Apéndice B: carácter tensorial de magnitudes.

La resolución de problemas de física y en particular de mecánica es de gran importancia porque es la única forma de entender el verdadero significado de los principios y aprender a aplicarlos. En muchos textos se incluye un apartado inicial dedicado a la metodología general para resolver problemas que trataremos de resumir aquí.

0.1. Método general

El método más general se puede condensar en tres grandes pasos,

- Diseño de una estrategia
- Ejecución de la estrategia
- Comprobación del resultado

A continuación desarrollaremos estos tres pasos y terminaremos con unas conclusiones.

0.1.1. Diseño de una estrategia

Para este paso se requiere,

Lectura y comprensión del enunciado. Leer el enunciado con detenimiento y en su totalidad para una comprensión global de la situación de partida y de los objetivos del problema. Repetir la lectura hasta que se comprenda cada uno de sus apartados y se haya clasificado el problema.

Realización de un dibujo o diagrama. Se trata de resumir gráficamente el enunciado del problema incluyendo los datos relevantes y las incógnitas a determinar. Utiliza símbolos para las variables y no los valores numéricos. Ha de ponerse mucho cuidado en la realización del dibujo para no dar lugar a equívocos ni a situaciones que no se corresponden con el enunciado. En problemas que intervengan fuerzas el dibujo puede permitir realizar los cálculos de resultantes y momentos de forma sencilla por lo que es sumamente importante que concuerde con el problema propuesto.

Datos e incógnitas. Se hará una lista con los datos y las incógnitas del problema identificando claramente estas últimas (puede hacerse utilizando el símbolo de interrogación "?"). Deben nombrarse todas las variables incluidas las intermedias con símbolos (letras) que no den pie a confusión y sean fácilmente identificables y reconocibles, por ejemplo,

$$\vec{v}_A(t)?$$

sería un símbolo adecuado para el vector velocidad del punto A como función del tiempo.

Si el problema incluye datos numéricos se anotarán estos con sus unidades,

$$\vec{F}_B = 20\hat{j} \text{ N}$$

Principios y leyes. Habitualmente los problemas no consisten en sustituir unos valores en una ecuación sino que requieren del desarrollo de los principios para obtener la expresión correspondiente al problema concreto. Por ello como resultado de este primer paso debe obtenerse una idea clara y precisa del objetivo y de los principios y leyes que se han de aplicar para su resolución.

Divide y vencerás. Si el problema es largo la estrategia debe incluir el fraccionamiento del problema en varios subproblemas que puedan resolverse sucesivamente y que permitan marcar hitos intermedios que se irán enlazando hasta llegar al resultado final. Este fraccionamiento también puede aplicarse para obtener una a una las componentes de un vector o los diferentes términos de una suma. De esta manera se comenten menos fallos y se tiene la sensación de que el problema es menos complejo.

0.1.2. Ejecución de la estrategia

Decidida la estrategia debe ponerse cuidado en la ejecución para tratar de obtener el resultado correcto, y lo que casi es más importante, el desarrollo del problema debe permitir localizar los posibles fallos en su ejecución. Así,

Trabaja con símbolos. Aunque existan valores numéricos de los datos es más conveniente realizar los cálculos de forma simbólica ya que de otra forma será imposible detectar errores sin rehacer el problema totalmente desde el principio.

Mantén empaquetados los símbolos. Al utilizar un gran número de variables si hay paquetes de ellas que se repiten en las sucesivas expresiones es importante mantener el orden de estas para facilitar su manejo y evitar el error muy frecuente de olvidarse de alguna de ellas. Así, por ejemplo, si aparece el paquete formado por $\frac{1}{2}mv^2$ en varias expresiones debe mantenerse en el mismo orden en todas ellas.

Ordena y simplifica. Todavía más importante que el anterior es el escribir las expresiones de la forma más simple posible, sobre todo si es uno de los resultados finales o parciales del problema. El arrastrar un gran conjunto de términos que pueden simplificarse solo se traduce en pérdida de tiempo y en un aumento en la probabilidad de cometer fallos. Habitualmente los datos de los problemas está elegidos para que las expresiones puedan simplificarse por lo que las expresiones no simplificables pueden informarnos de que se ha cometido algún error. Ha de ponerse cuidado para escribir ordenadamente las expresiones y marcar claramente las simplificaciones realizadas, reduce el número de errores y permite localizarlos más fácilmente.

0.1.3. Comprobación del resultado

La comprobación de los resultados finales y parciales permite detectar errores de cálculo que son frecuentes en problemas largos. Cuanto antes se detecten los problemas antes se podrá actuar para arreglarlos y con un menor coste de tiempo y esfuerzo.

Las comprobaciones que se pueden hacer son de distinto tipo:

Análisis dimensional. La comprobación de las dimensiones de la expresión calculada permite de forma muy rápida comprobar la consistencia del resultado, si estamos calculando la expresión de una fuerza la ecuación tiene que tener las dimensiones MLT^{-2} . Esta comprobación se puede hacer rápidamente y nos permite localizar el olvido de alguna de las variables o una simplificación incorrecta.

Carácter tensorial. De forma similar al caso anterior la comprobación del carácter tensorial de la expresión puede informarnos sobre un resultado incorrecto.

Valores límite y casos especiales. En expresiones complejas es útil obtener resultados más sencillos que permitan comprobar que el resultado es coherente con el enunciado, para ello pueden tomarse valores límite ($t \rightarrow \infty$, $R \rightarrow 0$, ...) o casos particulares sencillos cuyo resultado es conocido (caso $g = 0$, caso $\ell = R$, ...).

Simetrías. En problemas con simetrías (geométricas o de tipo permutación $m_1 \rightleftharpoons m_2$) el obtener un resultado que no es acorde con ella puede delatar la existencia de errores. También puede utilizarse la simetría como un caso especial más simple y comprobar el resultado en esa situación.



Algebraicamente posible. La ecuación puede evaluarse y proporcionar un resultado correcto (real, positivo, ...) cuando se sustituyan valores en los datos.

Funcionalmente razonable. El resultado depende de las variables esperadas y se obtienen tendencias razonables. En este punto entra el sentido común para descartar expresiones que conducen a resultados absurdos.

Numéricamente razonable. Si se dispone de valores numéricos debe comprobarse que el resultado obtenido está dentro de los ordenes de magnitud razonables. Esto puede ser no sencillo en algunos temas de física pero no en el caso de la mecánica.

0.2. Resumen y conclusiones

El método puede resumirse como sigue,

- Diseño de una estrategia
 - Clasifica el problema por su método de solución
 - Resume la situación en un diagrama
 - Mantén el objetivo en mente
- Ejecución de la estrategia
 - Trabaja con símbolos
 - Mantén empaquetados los símbolos
 - Ordena y simplifica
- Comprobación del resultado
 - Dimensionalmente consistente
 - Tensorialmente consistente
 - Valores límite y casos especiales
 - Simetrías
 - Algebraicamente posible (por ejemplo, sin partes imaginarias ni infinitos)
 - Funcionalmente razonable (por ejemplo, la altura crece con la velocidad)
 - Numéricamente razonable (incluyendo el signo)

Como últimas recomendaciones,

1. El primer paso es crucial y de hacerse incorrectamente puede llevar a un fracaso total a la hora de resolver el problema.
2. El segundo paso no debe iniciarse antes de terminar el primero. Sin embargo, el tercero debe aplicarse lo antes posible para detectar los errores cuanto antes.
3. El segundo paso debe hacerse teniendo en cuenta que los errores en el desarrollo son frecuentes y es importante facilitar la revisión del problema en caso de ser necesario.
4. Las comprobaciones no garantizan que el resultado sea correcto pero en algunos casos permiten concluir que es incorrecto.

0.3. Bibliografía

Como referencia citaremos el libro clásico de Polya sobre la resolución de problemas matemáticos [2] y como ejemplo de libro de mecánica que incluye un apartado de este tipo el más reciente de Morin [1].

Referencias

- [1] David Morin. *Introduction to Classical Mechanics with problems and solutions*. Cambridge University Press, 2007.
- [2] George Polya. *How To Solve It*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.

Apéndice A: dimensiones de magnitudes mecánicas

magnitud		dimensiones
masa	m	M
posición, distancia	\vec{r}	L
tiempo	t	T
velocidad	$\vec{v} = d\vec{r}/dt$	LT ⁻¹
aceleración	$\vec{a} = d\vec{v}/dt$	LT ⁻²
cantidad de movimiento	$\vec{p} = m \vec{v}$	MLT ⁻¹
fuerza	$\vec{F} = d\vec{p}/dt$	MLT ⁻²
trabajo o energía	$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	ML ² T ⁻²
potencia	$P = dW/dt$	ML ² T ⁻³
momento cinético	$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$	ML ² T ⁻¹
par o momento de una fuerza	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = d\vec{L}/dt$	ML ² T ⁻²
ángulo	$\theta = dS/dR$	1
velocidad angular, rotación	$\omega = d\theta/dt$	T ⁻¹
aceleración angular	$\alpha = d\omega/dt$	T ⁻²
momento o producto de inercia	$I = m d^2$	ML ²
curvatura o torsion	$\kappa = \left\ \frac{d\hat{T}}{ds} \right\ $	L ⁻¹
radio de curvatura o de torsion	$\rho = 1/\kappa$	L

Apéndice B: carácter tensorial de magnitudes

Atendiendo a como cambian sus componentes en una transformación ortogonal de coordenadas las magnitudes se puede clasificar en escalares/pseudoescalares (1 componente), vectores/pseudovectores (3 componentes) y tensores/pseudotensores de orden n (3^n componentes). Los escalares son tensores de orden $n = 0$ y los vectores de orden $n = 1$.

magnitud u operación	carácter tensorial
masa, distancia, tiempo, ángulo, trabajo, energía	Escalar o invariante
posición, velocidad, aceleración, cantidad de movimiento, fuerza	Vector
velocidad angular, rotación, aceleración angular, momento cinético, momento de una fuerza	Vector Axial o Pseudovector
tensor de inercia	Tensor de segundo orden
producto escalar de dos vectores	Escalar o invariante
producto vectorial de dos vectores	Vector Axial o Pseudovector
producto vectorial de un vector y un pseudovector	Escalar o invariante
producto tensorial de dos vectores	Tensor de segundo orden
producto mixto de tres vectores	Escalar o invariante
producto de escalar por un tensor	Tensor del mismo orden
suma de dos tensores del mismo orden	Tensor del mismo orden
producto interno de un tensor por un vector	Vector

1. Introducción a la cinemática

- 1.1 Cambio de referencia ortonormal. Transformación de las componentes de un vector.
- 1.2 Forma matricial de una rotación.
- 1.3 Tensores cartesianos de segundo orden.
- 1.4 Derivada de un vector en una base móvil.
- 1.5 Triedro intrínseco. Fórmulas de Frenet.
- 1.6 Velocidad y aceleración. Componentes intrínsecas.

Introducción

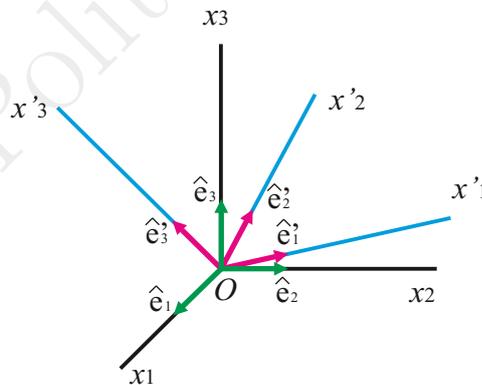
En este capítulo consideraremos las relaciones cinemáticas que describen el movimiento de los cuerpos rígidos y que asimismo son la base para el estudio de todas las máquinas y mecanismos. A modo de introducción a la cinemática en este tema analizaremos las transformaciones de los vectores en un cambio de orientación de los ejes de referencia lo que nos llevará a su forma matricial y a generalizar el concepto de vectores a otras entidades de orden superior, los tensores. Se obtendrá también la fórmula para obtener la derivada de un vector en una base móvil y terminaremos definiendo los elementos que caracterizan a las curvas y su relación con las expresiones de la cinemática del punto.

1.1. Cambio de referencia ortonormal. Transformación de las componentes de un vector.

Cambio de referencia ortonormal.

Consideraremos un sistema de referencia $Ox_1x_2x_3$ con una base ortonormal orientada a derechas $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$.

Si mediante una rotación cambiamos la orientación de los ejes y llamamos $Ox'_1x'_2x'_3$ y $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ al nuevo sistema y a la nueva base.



Nos interesa la relación entre las componentes de un vector cualquiera \vec{v} en los dos sistemas:

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{e}_i = \sum_i v'_i \hat{e}'_i$$

Para ello proyectaremos los vectores \hat{e}'_i en la base \hat{e}_i :

$$\hat{e}'_i = \underbrace{(\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_1)}_{a_{i1}} \hat{e}_1 + \underbrace{(\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_2)}_{a_{i2}} \hat{e}_2 + \underbrace{(\hat{e}'_i \cdot \hat{e}_3)}_{a_{i3}} \hat{e}_3 = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \hat{e}_j$$

que expresadas en forma matricial toman la forma:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix}$$

donde A es la *matriz de transformación*.

Para un vector \vec{v} cualquiera, $v'_i = \vec{v} \cdot \hat{e}'_i = v_1 a_{i1} + v_2 a_{i2} + v_3 a_{i3}$,

$$v'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j$$

O bien,

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

que es la relación buscada.

La matriz de transformación tiene una propiedad muy importante: $A^{-1} = A^t$, veámoslo. Para obtener la matriz de la transformación inversa A^{-1} proyectamos \hat{e}_i en la base $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$

$$\hat{e}_i = \underbrace{(\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_1)}_{a_{1i}} \hat{e}'_1 + \underbrace{(\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_2)}_{a_{2i}} \hat{e}'_2 + \underbrace{(\hat{e}_i \cdot \hat{e}'_3)}_{a_{3i}} \hat{e}'_3 = \sum_{j=1}^3 a_{ji} \hat{e}'_j$$

Osea,

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}}_{A^t} \begin{pmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{pmatrix}$$

y vemos que $A^{-1} = A^t$, la inversa es la traspuesta. Esta propiedad suele escribirse de otra forma sin más que multiplicar por A a derecha y a izquierda:

$$AA^t = A^tA = \mathbb{I}$$

por tanto, la matriz de transformación A es *ortogonal*. La propiedad de ortogonalidad expresada con las componentes sería, $\sum_k a_{ik} a_{jk} = \sum_k a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$, donde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$, es la *delta de Kronecker*.

Hasta ahora hemos visto que si la transformación es una rotación la matriz A es ortogonal, nos preguntamos si el recíproco es también cierto.

Primero veremos que el determinante de una matriz ortogonal A cumple: $|A| = \pm 1$. No hay más que tomar determinantes en $AA^t = \mathbb{I}$,

$$|AA^t| = |A| |A^t| = |A|^2 = |\mathbb{I}| = 1$$

Entonces, podemos clasificar las transformaciones ortogonales en función del determinante de su matriz de transformación A ,

- Si $|A| = +1$ la transformación es una *Rotación*.
- Si $|A| = -1$ la transformación se corresponde con una *Rotación + Inversión de un eje*.

Ejemplo:

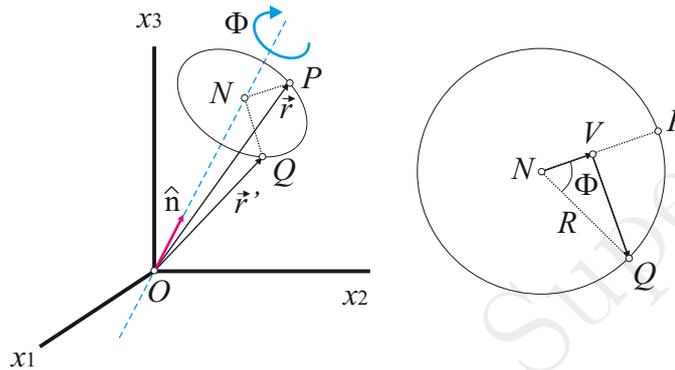
$$\left. \begin{matrix} \hat{e}'_1 = \hat{e}_1 \\ \hat{e}'_2 = \hat{e}_2 \\ \hat{e}'_3 = -\hat{e}_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y como $|A| = -1$ no es una rotación (es la inversión del tercer eje, solo cambia de signo la componente z).

1.2. Forma matricial de una rotación.

Obtendremos la forma matricial de una rotación de ángulo Φ alrededor de un eje que pasa por el origen y es paralelo al vector unitario \hat{n} ,

La matriz la obtendremos aplicando la rotación en sentido opuesto a un vector genérico \vec{r} de coordenadas (x, y, z) . Así, si la rotación de los ejes es en sentido antihorario, aplicamos la misma rotación al vector \vec{r} pero en sentido horario para pasar del vector $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ al vector $\vec{r}' = \overrightarrow{OQ}$.



Podemos descomponer el vector \overrightarrow{OQ} en la siguiente manera:

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NV} + \overrightarrow{VQ}$$

Dónde:

- \overrightarrow{ON} es la proyección de \overrightarrow{OP} sobre la normal, $\overrightarrow{ON} = (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n}$.
- \overrightarrow{NV} es paralelo a $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}$ y su módulo es $\|\overrightarrow{NV}\| = R \cos \Phi$, donde $R = \|\overrightarrow{NP}\|$ es el radio de la circunferencia, entonces, $\overrightarrow{NV} = \overrightarrow{NP} \cos \Phi = [\vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n}] \cos \Phi$
- y finalmente $\overrightarrow{VQ} \parallel (\vec{r} \times \hat{n})$ con módulo $\|\overrightarrow{VQ}\| = R \sin \Phi$ y como $\|\vec{r} \times \hat{n}\| = R$ se tiene que $\overrightarrow{VQ} = (\vec{r} \times \hat{n}) \sin \Phi$

Uniendo todos los términos:

$$\vec{r}' = (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n} + [\vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n}] \cos \Phi + (\vec{r} \times \hat{n}) \sin \Phi$$

y reagrupando:

$$\vec{r}' = \cos \Phi \vec{r} + (\vec{r} \cdot \hat{n}) \hat{n} (1 - \cos \Phi) + (\vec{r} \times \hat{n}) \sin \Phi$$

que se conoce por *fórmula de rotación*.

La relación entre las componentes de \vec{r}' y \vec{r} es la matriz de rotación buscada,

$$\begin{pmatrix} r'_1 \\ r'_2 \\ r'_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

de donde

$$A(\Phi, \hat{n}) = \cos \Phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \Phi) \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix} + \sin \Phi \begin{pmatrix} 0 & n_3 & -n_2 \\ -n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & -n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3. Tensores cartesianos de segundo orden.

Definición analítica de tensor de orden n : 3^n cantidades de $T_{i_1 \dots i_n}$ son las componentes de un *tensor* de orden n , si en un cambio ortogonal de coordenadas se transforman como:

$$T'_{i_1 \dots i_n} = \sum_{j_1=1}^3 a_{i_1 j_1} \dots \sum_{j_n=1}^3 a_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n}$$

Si $n = 0$, tenemos 1 cantidad que no cambia \Rightarrow escalar, invariante

Si $n = 1$, tenemos 3 cantidades v_i , $i = 1, 2, 3$ que cambian como $v'_i = \sum_j a_{ij} v_j \Rightarrow$ vector

Si $n = 2$, tenemos 9 cantidades T_{ij} con $i = 1, 2, 3$ y $j = 1, 2, 3$

$$T'_{ij} = \sum_k a_{ik} \sum_l a_{jl} T_{kl} = \sum_k \sum_l a_{ik} T_{kl} a'_{lj}$$

Osea,

$$\begin{pmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{21} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{31} & T'_{32} & T'_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

que son las componentes de un *tensor de segundo orden*.

No todas las magnitudes mecánicas cumplen la definición de tensor dada arriba por lo que es necesario definir otro tipo de elementos.

Pseudotensores de orden n : que transforman según la ley:

$$T'_{i_1 \dots i_n} = |A| \sum_{j_1} \dots \sum_{j_n} a_{j_1 i_1} \dots a_{j_n i_n} T_{j_1 \dots j_n}$$

Nótese que:

- Si la transformación es una *rotación*, las dos definiciones coinciden.
- Si la transformación lleva una *inversión de ejes*, $|A| = -1$, y aparece un signo menos.

Propiedades.

- 1) Si T y S son dos tensores de orden n , la *suma* de sus componentes es un nuevo tensor de orden n .
- 2) Si T es un tensor de orden n y λ un escalar, el *producto* de cada componente por el escalar da lugar a otro tensor de orden n .

3) Si $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ son vectores, entonces:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_j A_j B_j \text{ es un } \textit{escalar o invariante}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1) \text{ es un } \textit{pseudovector}$$

$$(\vec{A}, \vec{B})_{ij} = A_i B_j \text{ es un } \textit{tensor de orden 2}$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \text{ es un } \textit{pseudoescalar}$$

4) Si T_{ij} es un tensor de orden 2 y A_i un vector, entonces $\sum_j T_{ij} A_j$ es un vector.

5) Si T_{ij} es un tensor de orden 2, tanto el determinante $|T_{ij}|$, como la traza $\sum_j T_{ij}$ son *invariantes*



Ejemplo: Si $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ es el vector posición de una partícula y \vec{F} es la fuerza que actúa sobre ella, el momento de la fuerza $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ es un pseudovector, y el momento para un eje e que pasa por el origen $M_e = \vec{M} \cdot \hat{u}_e$ es un pseudoescalar.

Nota: Para no tener problemas con los pseudotensores es conveniente utilizar siempre sistemas de referencia de la misma orientación (a derechas) de manera que la matriz de transformación tenga siempre determinante +1.

1.4. Derivada de un vector en una base móvil.

Sea $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ una base ortonormal orientada a derechas que cambia con el tiempo t , y \vec{v} un vector cualquiera,

$$\vec{v} = v_1 \hat{e}_1 + v_2 \hat{e}_2 + v_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{e}_i$$

siendo $v_i = \vec{v} \cdot \hat{e}_i$ las componentes del vector \vec{v} en la base.

La derivada de la expresión anterior resulta

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \frac{dv_i}{dt} \hat{e}_i + \sum_i v_i \frac{d\hat{e}_i}{dt}$$

Proyectando las derivadas $\frac{d\hat{e}_i}{dt}$ en la base, se tiene:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_j B_{ij} \hat{e}_j$$

donde $B_{ij} = \left(\frac{d\hat{e}_i}{dt} \cdot \hat{e}_j\right)$.

Como la base es ortonormal estas cantidades B_{ij} cumplen las siguientes propiedades:

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} (\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i) = 2 \hat{e}_i \cdot \frac{d\hat{e}_i}{dt} = 2 B_{ii} \Rightarrow B_{ii} = 0$$

$$\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0 \Rightarrow 0 = \hat{e}_i \cdot \frac{d\hat{e}_j}{dt} + \frac{d\hat{e}_i}{dt} \cdot \hat{e}_j = B_{ji} + B_{ij} \Rightarrow B_{ji} = -B_{ij}, j \neq i$$

y por lo tanto definen una matriz antisimétrica. En tres dimensiones una matriz antisimétrica tiene $\frac{3(3-1)}{2} = 3$ elementos independientes, renombrando los elementos de acuerdo con:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_1}{dt} &= \Omega_3 \hat{e}_2 - \Omega_2 \hat{e}_3 \\ \frac{d\hat{e}_2}{dt} &= -\Omega_3 \hat{e}_1 + \Omega_1 \hat{e}_3 \\ \frac{d\hat{e}_3}{dt} &= \Omega_2 \hat{e}_1 - \Omega_1 \hat{e}_2 \end{aligned}$$

relaciones que pueden expresarse en forma de producto vectorial

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{e}_i$$

con $i = 1, 2, 3$ y $\vec{\Omega} (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$. Por tanto, este vector¹ $\vec{\Omega}$ representa el cambio de orientación de los vectores de la base respecto del tiempo.

¹Realmente $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ son las componentes de un pseudovector ya que el producto $\vec{\Omega} \times \hat{e}_i$ es un vector.

Entonces,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dv_i}{dt} \hat{e}_i + \vec{\Omega} \times \vec{v}$$

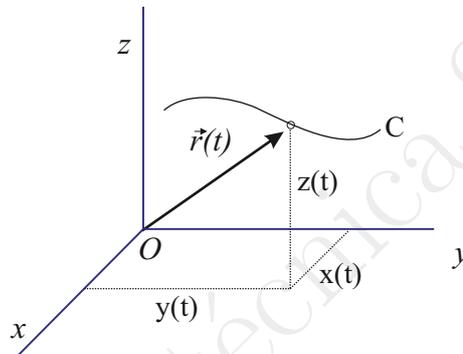
es decir, la derivada de un vector en una base móvil se obtiene sumando la derivada de las componentes en esa base más el cambio debido a la variación de la base. Este resultado que se conoce por *Fórmula de Bouré* o también por *teorema de Coriolis*.

En el Apéndice A se determinan los valores de $\vec{\Omega}$ para el caso de las coordenadas cilíndricas y esféricas referidas a una base fija. En este caso el cambio de los vectores unitarios es debido al cambio de orientación de la base de un punto a otro del espacio.

1.5. Triedro intrínseco. Fórmulas de Frenet.

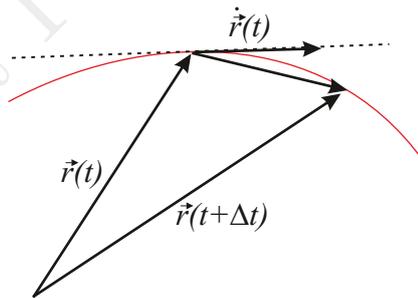
Consideremos una curva de parámetro t ,

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$



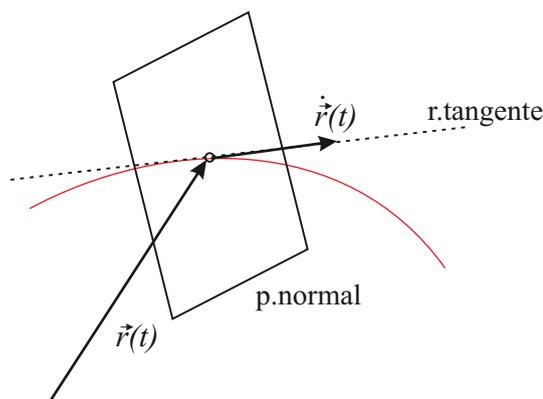
La derivada de la curva $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ es un vector tangente a la curva. Así, la **recta tangente** en el punto $\vec{r}(t_0)$ es:

$$\vec{P} = \vec{r}(t_0) + \lambda \dot{\vec{r}}(t_0), \forall \lambda$$



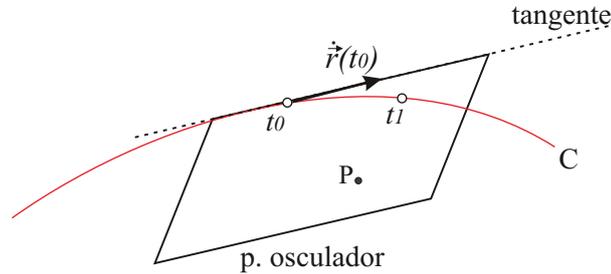
El **plano normal** en el punto $\vec{r}(t_0)$, son los puntos \vec{P} verificando:

$$(\vec{P} - \vec{r}(t_0)) \cdot \dot{\vec{r}}(t_0) = 0$$





El **plano osculador** en el punto $\vec{r}(t_0)$ es el límite de los planos que contienen la tangente en $\vec{r}(t_0)$ y otro punto de la curva $\vec{r}(t_1)$ a medida que $t_1 \rightarrow t_0$, \vec{P} está en el plano osculador si $\vec{P} - \vec{r}_0$, $\dot{\vec{r}}_0$ y $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ son coplanarios cuando $t_1 \rightarrow t_0$



Si tres vectores son coplanarios su producto mixto es nulo: $(\vec{P} - \vec{r}_0) \cdot [\dot{\vec{r}} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0)] = 0$ cuando $t_1 \rightarrow t_0$

Desarrollando en serie de potencias alrededor de t_0

$$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_0) + \dot{\vec{r}}_0 \cdot (t_1 - t_0) + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}}_0 \cdot (t_1 - t_0)^2 + \dots$$

$$\dot{\vec{r}}_0 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}_0 \times \ddot{\vec{r}}_0 (t_1 - t_0)^2 + \dots$$

y por tanto,

$$(\vec{P} - \vec{r}(t_0)) \cdot (\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)) = 0$$

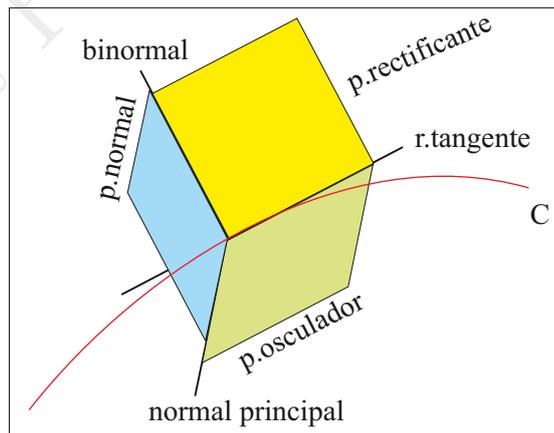
el plano osculador contiene al punto y a las derivadas primera y segunda.

A partir de los anteriores se puede construir un sistema formado por tres rectas y tres plano ortogonales:

La **Recta normal principal** es la intersección del plano normal y el osculador (es siempre perpendicular a la tangente)

La **Recta binormal** es la recta perpendicular a la tangente y a la normal principal.

El **Plano rectificante** es el que contiene la tangente y la binormal.



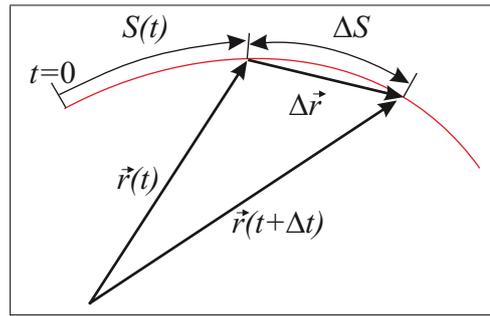
Longitud de arco. Recordando la definición de derivada $\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ en dicho límite al arco y la cuerda se confunden $\|\Delta \vec{r}\| \rightarrow \Delta S$ y entonces $\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \frac{dS}{dt}$

La longitud de arco medida desde $\vec{r}(t_0)$ y en el sentido creciente de t será:

$$S(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

con, $\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$

Si $\dot{\vec{r}}_0 \neq 0$ se puede asignar a cada t un valor de S y escribir $\vec{r} = \vec{r}(t(S)) = \vec{r}(S)$ función vectorial parametrizada por la longitud de arco.



1.5.1. Triedro intrínseco

Las derivadas de la curva respecto de la longitud de arco permite obtener una base ortonormal que tiene la misma orientación que las rectas y planos que acabamos de ver. Las demostraciones se encuentran en el Apéndice B.

Vector unitario tangente

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{r}'$$

Vector unitario normal

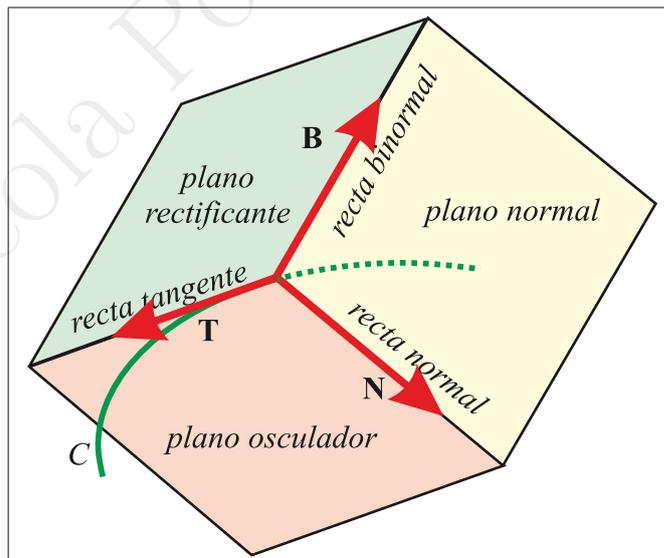
$$\hat{N} = \frac{\hat{T}'}{\|\hat{T}'\|}$$

Vector unitario binormal

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

Triedro intrínseco en cada punto regular de la curva ($\vec{r}' \neq 0, \vec{r}'' \neq 0$) puede definirse un triedro $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ ortonormal y orientado a derechas que se llama triedro intrínseco o de Frenet.

Los vectores del triedro intrínseco en un punto de la curva determinan las tres rectas y los tres planos.



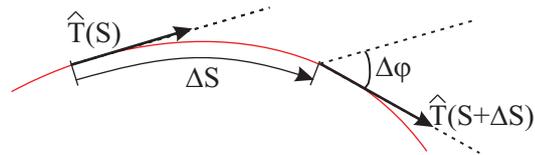
1.5.2. Curvatura y torsión

Veremos ahora los parámetros que caracterizan a una curva: la curvatura y la torsión. Estos parámetros nos permitirán expresar la derivada de los vectores intrínsecos respecto del tiempo.

Se define **curvatura** como:

$$\kappa = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta S} \right|$$

donde $\Delta \varphi$ es el ángulo formado por las tangentes en dos puntos de la curva separados ΔS .



Como \hat{T} es unitario su derivada es el radio por el ángulo

$$\|\hat{T}(S + \Delta S) - \hat{T}(S)\| \rightarrow 1 \Delta\varphi$$

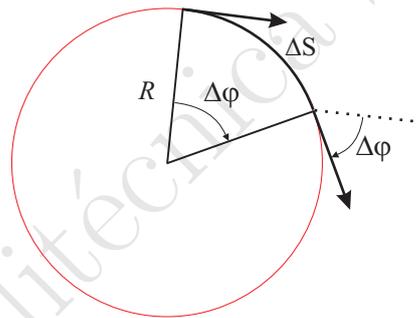
y se cumple,

$$\kappa = \left\| \frac{d\hat{T}}{dS} \right\| \geq 0$$

La curvatura es una medida de lo que la curva se desvía de su tangente.

- Para una recta \hat{T} es constante y $\kappa = 0$
- Para una circunferencia de radio R :

$$\Delta S = R \cdot \Delta\varphi \Rightarrow \kappa = \frac{1}{R}$$



Por ello a la inversa de la curvatura se le llama *radio de curvatura* $\rho = \frac{1}{\kappa}$ y tiene dimensiones de longitud, $[\rho] = L$.

Se define **Torsión (sin signo)** como:

$$\tau^* = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta S}$$

donde $\Delta\psi$ es el ángulo formado por los planos osculadores en dos puntos de la curva separados ΔS .

Se cumple,

$$\tau^* = \left\| \frac{d\hat{B}}{dS} \right\| \geq 0$$

1.5.3. Fórmulas de Frenet

1ª Fórmula de Frenet

$$\frac{d\hat{T}}{dS} = \kappa \hat{N}$$

2ª Fórmula de Frenet

$$\frac{d\hat{B}}{dS} = \pm \tau^* \hat{N}$$

Torsión (con signo)

$$\tau = -\frac{d\hat{B}}{dS} \cdot \hat{N}$$

y entonces,

$$\frac{d\hat{B}}{dS} = -\tau \hat{N}$$

3ª Fórmula de Frenet

$$\frac{d\hat{N}}{dS} = -\kappa \hat{T} + \tau \hat{B}$$

Vector de Darboux

$$\vec{D} = \kappa \hat{B} + \tau \hat{T}$$

El vector de Darboux determina la variación de los vectores del triedro intrínseco respecto del arco,

$$\frac{d\hat{u}}{dS} = \vec{D} \times \hat{u}$$

siendo \hat{u} igual a \hat{T} , \hat{N} ó \hat{B} .

1.6. Velocidad y aceleración. Componentes intrínsecas.

Vector de posición. El vector de posición de una partícula en el sistema de referencia $Oxyz$ viene dado por

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (1.1)$$

donde $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son las coordenadas cartesianas del punto.

Las dimensiones son de longitud $[\vec{r}] = [x] = [y] = [z] = L$.

Traectoria. Es la curva descrita por el extremo del vector \vec{r} en el transcurso del tiempo.

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} t \in (\infty, +\infty) \quad (1.2)$$

sería la ecuación paramétrica de la curva.

Una misma trayectoria puede recorrerse de muy diversas formas, para especificar el movimiento habrá que conocer también como se recorre la trayectoria.

1.6.1. Velocidad y aceleración. Definiciones y unidades.

Velocidad: es el cambio del vector de posición respecto del tiempo,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (1.3)$$

En coordenadas cartesianas (no así en polares) las componentes de la velocidad coinciden con las derivadas de las componentes del vector de posición:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad v_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt} \quad (1.4)$$

Las dimensiones son $[\vec{v}] = [v_x] = [v_y] = [v_z] = LT^{-1}$ y la unidad (SI) es el “metro por segundo” cuyo símbolo es m/s.

El vector velocidad \vec{v} es tangente a la trayectoria ya que en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ la cuerda se confunde con la tangente.

El módulo de la velocidad $v = \|\vec{v}\|$ es la derivada del arco respecto del tiempo ya que en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ la cuerda se confunde con el arco, $\|\Delta \vec{r}\| = \Delta S$:

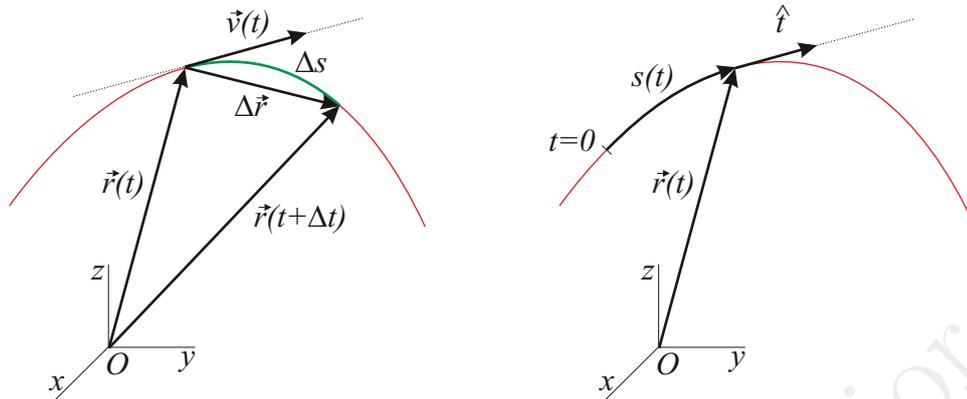
$$v = \left\| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right\| = \frac{dS(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad (1.5)$$

Integrando respecto del tiempo se obtiene la longitud de arco,

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \|\vec{v}\| dt \quad (1.6)$$

y se conoce como *ley horaria*.

El movimiento de una partícula queda totalmente especificado conocida la **trayectoria** y la **ley horaria**.



Aceleración: es el cambio del vector de velocidad respecto del tiempo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \quad (1.7)$$

De nuevo, las componentes cartesianas de la aceleración coinciden con las derivadas de las componentes del vector de velocidad.

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y(t)}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z(t)}{dt} \quad (1.8)$$

Las dimensiones son $[\vec{a}] = [a_x] = [a_y] = [a_z] = \text{LT}^{-2}$ y la unidad (SI) es el “metro por segundo al cuadrado” cuyo símbolo es m/s^2 .

1.6.2. Componentes intrínsecas de la aceleración.

Dividiendo la velocidad por su módulo se obtiene el *vector unitario tangente* a la trayectoria:

$$\frac{\vec{v}}{v} = \hat{T} \quad (1.9)$$

que tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad.

Si derivamos la expresión $\vec{v} = v \hat{T}$ se tiene,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{T} + v \frac{d\hat{T}}{dt} \quad (1.10)$$

Componente tangencial de la aceleración: es la componente de la aceleración paralela al vector de velocidad,

$$a_t = \vec{a} \cdot \hat{T} = \frac{dv}{dt} \quad (1.11)$$

coincide con la derivada del módulo de la velocidad.

Componente normal de la aceleración: teniendo en cuenta que

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = \frac{d\hat{T}}{dS} \frac{dS}{dt} = v \frac{d\hat{T}}{dS}$$

y de la 1ª fórmula de Frenet se tiene

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = v \frac{1}{\rho} \hat{N}$$

siendo ρ el radio de curvatura de la trayectoria. La componente normal de la aceleración es

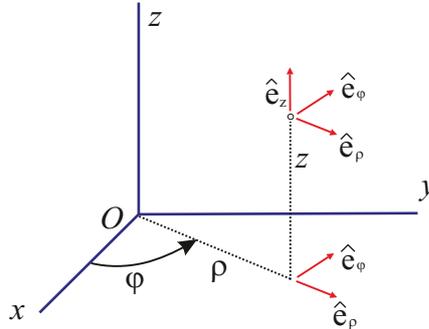
$$a_n = \vec{a} \cdot \hat{N} = \frac{v^2}{\rho} \quad (1.12)$$

Finalmente,

$$\vec{a} = a_t \hat{T} + a_n \hat{N} = \frac{dv}{dt} \hat{T} + \frac{v^2}{\rho} \hat{N} \quad (1.13)$$

A modo de conclusión indicaremos que $v = dS/dt$ y $a_t = dv/dt$ dependen de la ley horaria $S(t)$ mientras que \hat{T} , \hat{N} y ρ dependen de la forma de la trayectoria. En la aceleración normal se mezclan las dos dependencias, $a_n = v^2/\rho$.

Escuela Politécnica Superior

**Apéndice A. Derivadas de los vectores unitarios de las coordenadas cilíndricas y esféricas**
Coordenadas cilíndricas.

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

$\{\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z\}$ son una base ortonormal orientada a derechas.

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_\rho &= \cos \varphi \hat{i} + \sin \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} \\ \hat{e}_z &= \hat{k} \end{aligned} \right\} \hat{e}_\rho \times \hat{e}_\varphi = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \hat{k} = \hat{e}_z$$

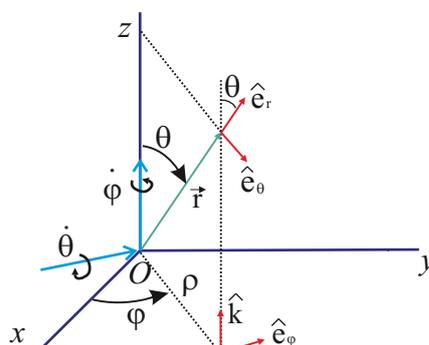
Los dos primeros dependen de la coordenada φ , el tercero es constante, $\hat{e}_\rho = \hat{e}_\rho(\varphi)$ y $\hat{e}_\varphi = \hat{e}_\varphi(\varphi)$
Además,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_\rho}{d\varphi} &= \hat{e}_\varphi \\ \frac{d\hat{e}_\varphi}{d\varphi} &= -\hat{e}_\rho \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} &= \frac{d\hat{e}_\rho}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \\ \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} &= -\dot{\varphi} \hat{e}_\rho \\ \frac{d\hat{e}_z}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} \\ \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} \\ \frac{d\hat{e}_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_\rho \\ \hat{e}_\varphi \\ \hat{e}_z \end{pmatrix}$$

Entonces, $\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \hat{k}$ es el vector que nos da el cambio de orientación de la base con el tiempo.

Coordenadas esféricas.

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \end{aligned} \right| \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

$\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi\}$ son una base ortonormal orientada a derechas.

$$\begin{aligned} \hat{e}_r &= \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \sin \theta \cos \varphi \hat{i} + \sin \theta \sin \varphi \hat{j} + \cos \theta \hat{k} = \hat{e}_r(\theta, \varphi) \\ \hat{e}_\theta(\theta, \varphi) &= \hat{e}_r\left(\theta + \frac{\pi}{2}, \varphi\right) = \cos \theta \cos \varphi \hat{i} + \cos \theta \sin \varphi \hat{j} - \sin \theta \hat{k} \\ \hat{e}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{i} + \cos \varphi \hat{j} = \hat{e}_\varphi(\varphi) \end{aligned}$$

Las derivadas resultan

$$\begin{pmatrix} \frac{d\hat{e}_r}{dt} \\ \frac{d\hat{e}_\theta}{dt} \\ \frac{d\hat{e}_\varphi}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta} & \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} & 0 & \dot{\varphi} \cos \theta \\ -\dot{\varphi} \sin \theta & -\dot{\varphi} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \\ \hat{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

y la rotación (cambio de orientación de la base)

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \cos \theta \hat{e}_r - \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\theta + \dot{\theta} \hat{e}_\varphi$$

Como la rotación $\dot{\varphi}$ se realiza en el plano xy y la rotación $\dot{\theta}$ en el plano definido por Oz y \vec{r} , utilizando los vectores normales a esos planos se obtiene una expresión más compacta

$$\vec{\Omega} = \dot{\varphi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{e}_\varphi$$

Apéndice B. Fórmulas de Frenet.

Obtendremos las derivadas respecto del arco de los vectores del triedro intrínseco $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$.

Vimos que la derivada $\vec{r}' = \frac{d\vec{r}}{dt}$ es tangente a la curva y también lo será la derivada respecto al arco $\frac{d\vec{r}}{dS}$ que además es unitario porque $\|d\vec{r}\| = dS$, entonces,

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{dS} = \vec{r}'$$

es el vector unitario tangente.

El vector unitario normal

$$\hat{N} = \frac{\hat{T}'}{\|\hat{T}'\|}$$

es unitario por construcción y veremos que es perpendicular al anterior. Derivando el cuadrado de \hat{T} ,

$$\hat{T} \cdot \hat{T} = 1 \Rightarrow 0 = 2\hat{T} \cdot \hat{T}' \Rightarrow \hat{T}' \perp \hat{T} \Rightarrow \hat{N} \perp \hat{T}$$

Multiplicando los dos vectores unitarios anteriores obtenemos el vector unitario binormal

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$



que forma con los dos anteriores un triedro $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ ortonormal y orientado a derechas que se llama *triedro intrínseco o de Frenet*.

Además, la dirección de \hat{N} coincide con la recta normal principal y la de \hat{B} con la recta binormal. Para ello expresaremos las dos primeras derivadas como,

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dS} \frac{dS}{dt} = \dot{S} \hat{T}$$

y

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{S} \hat{T} + \dot{S} \frac{d\hat{T}}{dS} \frac{dS}{dt} = \ddot{S} \hat{T} + \dot{S}^2 \left\| \frac{d\hat{T}}{dS} \right\| \hat{N}$$

lo que demuestra que \hat{N} pertenece al plano osculador y además es perpendicular a la tangente por lo que tiene que ser paralelo a la recta normal principal. De la misma forma, \hat{B} tiene que ser perpendicular al plano osculador por lo que es paralelo a la recta binormal.

Como $\hat{N} = \frac{d\hat{T}/dS}{\left\| d\hat{T}/dS \right\|}$ y $\left\| d\hat{T}/dS \right\| = \kappa$, entonces se tiene la primera fórmula de Frenet,

$$\frac{d\hat{T}}{dS} = \kappa \hat{N}$$

Calculamos ahora $\frac{d\hat{B}}{dS}$ sabiendo que $|\tau| = \left\| \frac{d\hat{B}}{dS} \right\|$. Derivando los productos escalares siguientes,

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B} \cdot \hat{B} = 1 \Rightarrow 0 = 2\hat{B} \cdot \hat{B}' \Rightarrow \hat{B}' \perp \hat{B} \\ \hat{B} \cdot \hat{T} = 0 \Rightarrow 0 = \hat{B}' \cdot \hat{T} + \hat{B} \cdot \kappa \hat{N} \Rightarrow \hat{B}' \perp \hat{T} \end{array} \right\} \frac{d\hat{B}}{dS} \parallel \hat{N}$$

y como por definición $\tau = -\frac{d\hat{B}}{dS} \cdot \hat{N}$ se tiene la tercera fórmula de Frenet,

$$\frac{d\hat{B}}{dS} = -\tau \hat{N}$$

Finalmente, repitiendo el proceso para \hat{N} se tiene la segunda fórmula de Frenet,

$$\left. \begin{array}{l} \hat{N} \cdot \hat{N} = 1 \Rightarrow 0 = 2\hat{N} \cdot \hat{N}' \Rightarrow \hat{N}' \cdot \hat{N} = 0 \\ \hat{N} \cdot \hat{T} = 0 \Rightarrow 0 = \hat{N}' \cdot \hat{T} + \hat{N} \cdot \kappa \hat{N} \Rightarrow \hat{N}' \cdot \hat{T} = -\kappa \\ \hat{N} \cdot \hat{B} = 0 \Rightarrow 0 = \hat{N}' \cdot \hat{B} + \hat{N} \cdot -\tau \hat{N} \Rightarrow \hat{N}' \cdot \hat{B} = +\tau \end{array} \right\} \frac{d\hat{N}}{dS} = -\kappa \hat{T} + \tau \hat{B}$$

Escritas en forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \hat{T}' \\ \hat{N}' \\ \hat{B}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{T} \\ \hat{N} \\ \hat{B} \end{pmatrix}$$

por lo que el vector de Darboux \vec{D} que nos da el cambio de orientación del triedro intrínseco por unidad de arco resulta ser

$$\vec{D} = \tau \hat{T} + \kappa \hat{B}$$

osea,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{T}}{dS} &= \vec{D} \times \hat{T} = \kappa \hat{N} \\ \frac{d\hat{N}}{dS} &= \vec{D} \times \hat{N} = -\kappa \hat{T} + \tau \hat{B} \\ \frac{d\hat{B}}{dS} &= \vec{D} \times \hat{B} = -\tau \hat{N} \end{aligned}$$

son las Fórmulas de Frenet.



2. Cinemática del sólido rígido

- 2.1 Sólido rígido. Grados de libertad. Condición cinemática de rigidez
- 2.2 Movimientos de traslación y rotación
- 2.3 Distribución helicoidal de velocidades. Teorema de Chasles
- 2.4 Grupo cinemático. Invariantes
- 2.5 Eje instantáneo de rotación. Velocidad de deslizamiento mínimo
- 2.6 Axoides
- 2.7 Distribución de aceleraciones
- 2.8 Ángulos y rotaciones de Euler.

2.1. Sólido rígido. Grados de libertad. Condición cinemática de rigidez

Se define sólido rígido como un cuerpo en que la distancia entre cualquier par de puntos permanece constante:

$$\|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|^2 = cte, \forall A, B \quad (2.14)$$

esta ecuación se denomina *condición de rigidez* del sólido.

Grados de libertad: Denominamos grados de libertad de un sistema al número de movimientos independientes que puede realizar, que coincide con el número de coordenadas independientes que es preciso conocer para determinar su posición. Por ejemplo para determinar la posición de un punto material necesitamos 3 coordenadas (x, y, z) , decimos por tanto que tiene 3 grados de libertad. Cuando existen ligaduras entre los puntos del sistema, estas limitan los movimientos que puede realizar y por lo tanto reducen el número de grados de libertad.

En el caso del sólido rígido, si consideramos tres puntos A, B y C no alineados, de acuerdo con la condición de rigidez:

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \|\vec{r}_B - \vec{r}_A\|^2 = cte \\ \overline{AC}^2 &= \|\vec{r}_C - \vec{r}_A\|^2 = cte \\ \overline{BC}^2 &= \|\vec{r}_C - \vec{r}_B\|^2 = cte \end{aligned}$$

Para dar la posición de cada punto se necesitarían 3 coordenadas $(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), (x_C, y_C, z_C)$, lo que hace un total de nueve, pero como existen 3 ecuaciones de rigidez sólo hay seis coordenadas independientes. Si quisiéramos determinar la posición de un cuarto punto D , tendríamos 3 nuevas incógnitas (x_D, y_D, z_D) pero también 3 nuevas condiciones de rigidez $\overline{AD}^2 = cte, \overline{BD}^2 = cte$ y $\overline{CD}^2 = cte$ con lo que el número total de coordenadas independientes sigue siendo 6.

Así, conocida la posición de 3 puntos no alineados de un sólido rígido, se conoce la posición de los restantes puntos del sólido. Decimos por tanto que **el sólido rígido tiene 6 grados de libertad** o bien que el número de coordenadas independientes necesarias para definir la posición de un sólido en el espacio es de 6.

Hay muchas formas de elegir estas 6 coordenadas (una de ellas sería $x_A, y_A, z_A, x_B, y_B, x_C$), pero la más útil consiste en especificar el origen y la orientación de un sistema de S fijo al cuerpo respecto de otro sistema de coordenadas S_1 fijo en el espacio. Así, 3 coordenadas se utilizan para situar el origen de coordenadas de S y las otras 3 han de definir la orientación de S respecto de S_1 (por ejemplo, los 3 ángulos de Euler que definiremos más adelante).

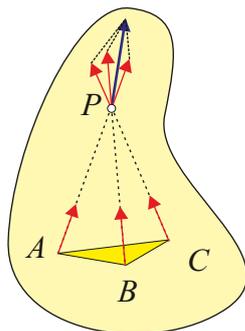
Teorema de las velocidades proyectadas. Derivando respecto del tiempo la ecuación 2.14:

$$\frac{d}{dt} (\overrightarrow{AB})^2 = 0 = 2 \overrightarrow{AB} \cdot \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 2 \overrightarrow{AB} \cdot (\vec{v}_B - \vec{v}_A)$$

y dividiendo por el módulo de \overrightarrow{AB} queda:

$$\vec{v}_A \cdot \hat{AB} = \vec{v}_B \cdot \hat{AB}$$

En cada instante, las velocidades de dos puntos cualesquiera del sólido tienen proyecciones iguales sobre la recta que los une. Esta es la llamada condición cinemática de rigidez o *teorema de las velocidades proyectadas*. Una consecuencia de este teorema es que la velocidad de cualquier punto del sólido está determinada si se conocen las velocidades de 3 puntos no alineados (basta tener en cuenta que un vector está determinado si se conocen sus proyecciones sobre 3 rectas no paralelas).



2.2. Movimiento de traslación y rotación.

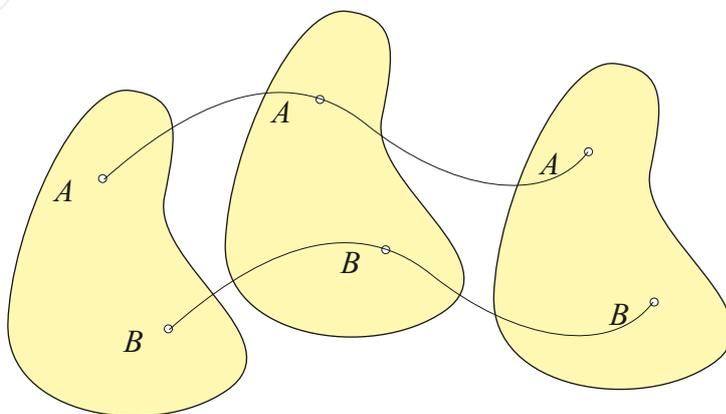
Movimiento de traslación: Un sólido rígido tiene un movimiento de traslación respecto de un sistema de referencia S_1 si en cada instante todas sus puntos tienen igual velocidad no nula respecto de S_1 . Se denomina velocidad de traslación a la velocidad común de todos los puntos. Además, en el movimiento de traslación todos los puntos del sólido tienen la misma aceleración instantánea respecto del mismo sistema de referencia S_1 . Sean A y B dos puntos cualesquiera

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A \quad \forall A, B$$

y por tanto:

$$\frac{d}{dt} (\overrightarrow{AB}) = 0 \quad \forall A, B$$

La posición relativa de dos partículas cualesquiera del sólido permanece invariable en el transcurso del movimiento; por tanto todas las trayectorias son paralelas (sin embargo la traslación no tiene porque corresponder necesariamente a un movimiento rectilíneo).



Movimiento de Rotación: Un sólido rígido realiza un movimiento de rotación si en cada instante existe una recta de puntos con velocidad nula, esta recta es el eje de rotación.

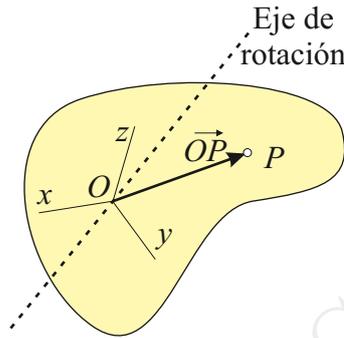
Como las distancias entre los puntos del sólido permanecen constantes; tomando un sistema de referencia S solidario con el cuerpo y con origen en un punto O del eje de rotación, tendríamos que para cualquier



punto P , el vector \vec{OP} tiene componentes constantes y su variación con el tiempo se debe al movimiento de la base,

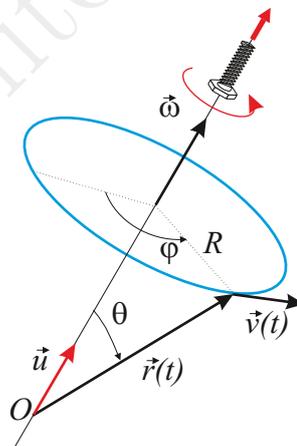
$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{OP} \quad (2.15)$$

siendo $\vec{\Omega}$ el vector asociado al cambio de orientación de un sistema de referencia $Oxyz$ que se mueve con el sólido.



Por otra parte P describe una trayectoria circular con centro en el eje de rotación y contenida en un plano perpendicular al eje, de manera que su velocidad también viene dada por $v_P = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega$ con $R = |\vec{OP}| \sin \theta$. Entonces el módulo de la velocidad de P se puede escribir:

$$v_P = \omega |\vec{OP}| \sin \theta$$



Definimos entonces el vector *velocidad de rotación* $\vec{\omega}$ con las siguientes características:

- Módulo: la velocidad angular $\frac{d\varphi}{dt}$
- Dirección: la del eje de rotación
- Sentido: según la ley del tornillo o de la mano derecha

y así podemos escribir el vector velocidad del punto P del sólido en el movimiento de rotación como:

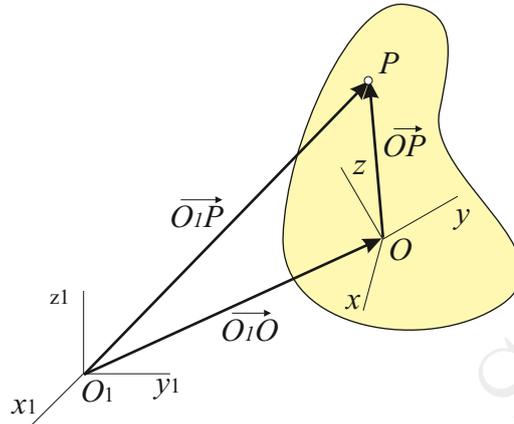
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{OP} \quad (2.16)$$

Como $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{OP} = \vec{\Omega} \times \vec{OP}$ para todo P , concluimos también que el vector $\vec{\Omega}$ que nos da la variación con el tiempo de la orientación del sistema de referencia que se mueve con el sólido coincide con el vector rotación $\vec{\omega}$.

2.3. Distribución helicoidal de velocidades. Teorema de Chasles

Consideremos un sistema de referencia S ligado al sólido y otro sistema de referencia en el espacio S_1 . Sea P un punto del sólido, su posición en el espacio S_1 vendrá dada por:

$$\overrightarrow{O_1P} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OP}$$



Derivando respecto del tiempo y teniendo en cuenta el cambio de orientación de S respecto de S_1 (Fórmula de Boure) tendremos:

$$\vec{v}_P = \frac{d\overrightarrow{O_1P}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$$

de donde se obtiene la ley de distribución de velocidades en el sólido rígido:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$$

Propiedades:

- Si consideramos el campo de velocidades de un sólido rígido que asigna a cada punto P del espacio un vector, \vec{v}_P . Las líneas de campo, que son las curvas cuya tangente en cada punto es paralela al campo, son en este caso hélices y por ello se habla de la *distribución helicoidal de velocidades*.
- La velocidad no cambia en puntos situados sobre rectas paralelas a $\vec{\omega}$.
- **Movimiento general del sólido. Teorema de Chasles:** El movimiento general del sólido es una traslación (\vec{v}_O) más una rotación alrededor de O ($\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$).

Nota: La ley de distribución de velocidades tiene la misma forma que la ley de cambio de origen del momento de un sistema de fuerzas deslizantes (véase Apéndice del tema 6) por lo que puede establecerse una analogía completa entre los dos casos.

2.4. Grupo cinemático. Invariantes

Las variables que caracterizan el movimiento general del sólido son $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$, a este par se le denomina grupo cinemático en O . El grupo cinemático no es invariante dado que depende del punto considerado. Se buscan magnitudes que caractericen el movimiento con independencia del punto de referencia elegido, es decir, magnitudes invariantes a cualquier grupo cinemático. Estas son:

1. Primer invariante o invariante vectorial: Es el vector $\vec{\omega}$, común a todos los grupos cinemáticos.

Sean $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$ y $(\vec{v}_{O'}, \vec{\omega}')$ los grupos cinemáticos en O y O' respectivamente. Para cualquier punto P , $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$ y también $\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}' \times \overrightarrow{O'P}$. Dado que $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO'}$, se tiene que



$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = \vec{\omega}' \times \overrightarrow{OP} \quad \forall O, P$$

Por tanto la velocidad de rotación es la misma para todos los puntos del sólido; puede hablarse entonces de la velocidad de rotación del sólido.

2. Segundo invariante o invariante escalar.

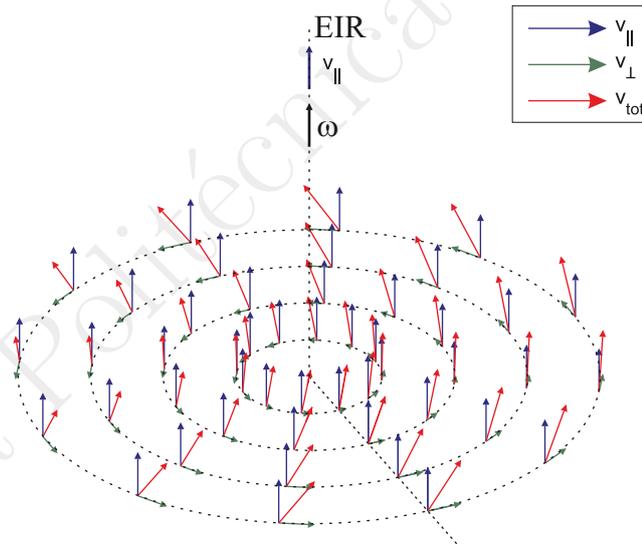
Proyectando la velocidad de un punto P cualquiera del sólido, \vec{v}_P sobre $\vec{\omega}$:

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \quad \forall O, P$$

En un instante dado, la proyección de la velocidad de cualquier punto sobre la recta soporte de $\vec{\omega}$ es la misma para todos los puntos del sólido. Es el segundo invariante.

Propiedades

- Podemos descomponer la velocidad de cualquier punto en una componente paralela y otra perpendicular a $\vec{\omega}$: $\vec{v}_P = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, $\forall P$, donde la componente \vec{v}_{\parallel} no cambia pero sí lo hace \vec{v}_{\perp} .



- Si existe un punto con $\vec{v}_{\perp} = 0$, todos los que se encuentran en una recta paralela a $\vec{\omega}$ pasando por ese punto tendrán $\vec{v}_{\perp} = 0$, es decir, tendrán una velocidad paralela a $\vec{\omega}$.

2.5. Eje instantáneo de rotación. Velocidad de deslizamiento mínimo

Llamamos eje instantáneo de rotación, EIR, al lugar geométrico de los puntos del sólido con velocidad paralela a $\vec{\omega}$. Sea $P(x, y, z)$ un punto del EIR, su velocidad será $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} \parallel \vec{\omega}$, con $\vec{v}_O(v_x, v_y, v_z)$ y $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. La ecuación del eje instantáneo de rotación queda:

$$\frac{v_x + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_y + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}$$

- Se define la velocidad de deslizamiento mínimo v_d como la proyección de la velocidad de cualquier punto en la dirección del eje instantáneo de rotación:

$$v_d = \frac{\vec{v}_O \cdot \vec{\omega}}{\omega}$$

- La velocidad de los puntos del EIR es la velocidad de deslizamiento mínimo v_d

- La velocidad de deslizamiento mínimo corresponde al valor mínimo de la velocidad de los puntos de un sólido rígido:

$$v_P = |\vec{v}_P| = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \sqrt{v_d^2 + v_{\perp}^2} \geq v_d$$

- Si existe algún punto del sólido con velocidad nula, este punto pertenece al eje instantáneo de rotación.
- Determinación de EIR a partir del grupo cinemático $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$:

Si $P(x, y, z)$ pertenece al EIR, entonces $\vec{v}_P \parallel \vec{\omega}$ con $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$. De manera que:

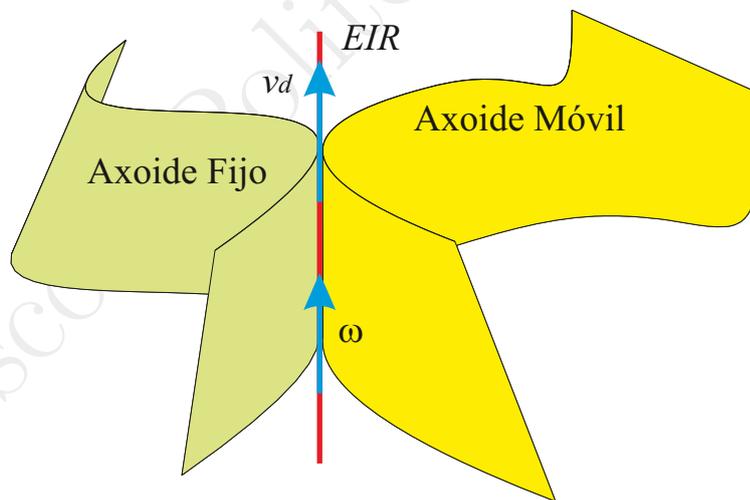
$$\vec{\omega} \times \vec{v}_P = 0 = \vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{OP}) = \vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \vec{OP}) - \omega^2 \vec{OP}$$

Por tanto:

$$P \in \text{EIR} \Leftrightarrow \vec{OP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}, \quad \forall \lambda$$

2.6. Axoides

La expresión que hemos dado en el apartado anterior localiza al EIR en cada instante pues tanto \vec{v}_O como $\vec{\omega}$ pueden cambiar en el transcurso del tiempo. En consecuencia el eje instantáneo de rotación cambiará en general de posición a lo largo del tiempo debido al movimiento del sólido, engendrando una superficie reglada que denominamos **axoide**. Habrá infinitos axoides, tantos como sistemas de referencia, pero nos fijaremos únicamente en los obtenidos en el sistema de referencia fijo y en el sistema de referencia solidario con el cuerpo, que denominaremos **axoide fijo** y **axoide móvil**, respectivamente. Estas dos superficies son tangentes en cada instante, la línea de tangencia es el eje instantáneo de rotación.



Se puede describir el movimiento del sólido como la rodadura del axoide móvil sobre el axoide fijo. Si $v_d = 0$ la rodadura será sin deslizamiento, si $v_d \neq 0$ el axoide móvil además de rodar, deslizará sobre el EIR con velocidad v_d (esta representación del movimiento del sólido es debida a Poncelet).

2.7. Distribución de aceleraciones

La aceleración de un punto P del sólido se obtiene derivando la expresión de la velocidad:

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt} \vec{v}_P = \frac{d}{dt} (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}) = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{OP} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{OP}}{dt}$$

como

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

la distribución de aceleraciones en un sólido rígido queda:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP})$$

El término $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP})$ es la aceleración centrípeta y está dirigida hacia el eje de rotación.

2.8. Ángulos y rotaciones de Euler.

Los ángulos de Euler permiten expresar la orientación de un sólido rígido respecto de un sistema de referencia. Las derivadas de estos ángulos nos dan la velocidad con la que cambia la orientación respecto del tiempo y por tanto permiten determinar la rotación del sólido.

En general estos ángulos sirven para definir la orientación de un sistema de ejes cartesianos ligado al sólido en movimiento, *sistema cuerpo*, respecto del que tomamos como referencia, *sistema espacio*. Por razones de simplicidad llamaremos **fijo** al primero y **móvil** al segundo. Como el movimiento de traslación no nos preocupa en este momento consideraremos que los dos sistemas tienen el mismo origen O .

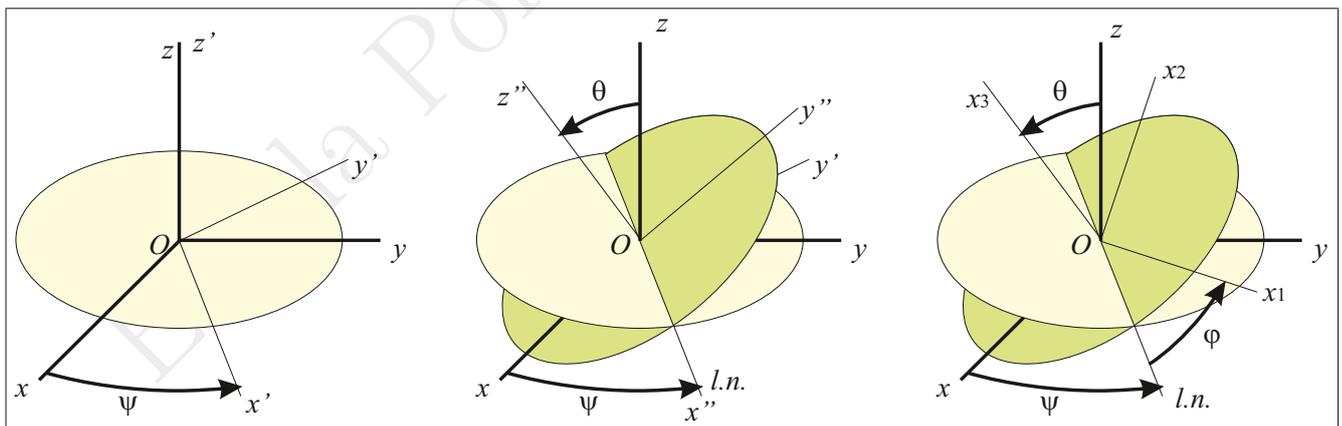
Consideremos dos sistemas coordenados, uno fijo (x, y, z) y otro ligado al sólido en movimiento (x_1, x_2, x_3) . Los dos sistemas tienen origen común en el punto fijo O .

Podemos expresar la orientación del sistema móvil respecto del fijo mediante tres rotaciones sucesivas con los tres ángulos de Euler ²:

1º) rotación de ángulo ψ alrededor de Oz , **precesión**. $\psi \in [0, 2\pi]$

2ª) rotación de ángulo θ alrededor de la posición que ocupa Ox_1 en ese instante (línea nodal), **nutación**.
 $\theta \in [0, \pi]$

3ª) rotación de ángulo φ alrededor de Ox_3 , **rotación propia**. $\varphi \in [0, 2\pi]$



Los dos primeros giros sirven para colocar en su posición el tercer eje, después un giro alrededor de esa dirección permite situar los ejes primero y segundo. Si conocemos la orientación de los dos sistemas los ángulos de Euler se determinan en la forma siguiente:

- El ángulo de nutación θ es el formado por los ejes Oz y Ox_3 . Toma valores entre 0 y π .
- La línea nodal es perpendicular a los dos ejes anteriores y tiene el sentido de la regla de la mano derecha para ir del eje Oz al Ox_3 . La línea nodal pertenece a los planos Oxy y Ox_1x_2 .
- El ángulo de precesión ψ es el que va desde el eje Ox a la línea nodal.
- El ángulo de rotación propia φ es el que va desde la línea nodal al eje Ox_1 .

²Los símbolos empleados para los ángulos de Euler difieren de unos autores a otros.

Las coordenadas de cualquier vector \mathbf{v} en el sistema girado se obtienen en función de las coordenadas en el sistema fijo por:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

siendo \mathbf{A} la matriz de rotación

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Esta matriz \mathbf{A} es ortogonal $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1}$ y su determinante es igual a +1. Su inversa será por tanto la traspuesta $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^t$ donde $(\mathbf{A}^t)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$. Por tanto

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{A}^t \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Eje de rotación y ángulo girado Los tres giros de Euler equivalen a una única rotación de ángulo ϕ alrededor de un eje definido por el vector unitario \mathbf{u} , siendo

$$\cos \frac{\phi}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi + \varphi}{2}$$

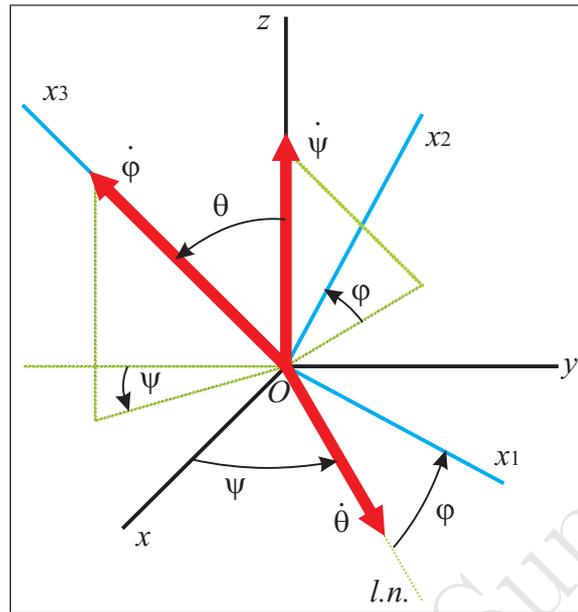
y

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi - \varphi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \\ u_2 = \frac{\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi - \varphi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \\ u_3 = \frac{\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi + \varphi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}} \end{cases}$$

Rotaciones de Euler.

Utilizando los ángulos de Euler para definir la orientación del sólido, su vector rotación puede descomponerse en tres rotaciones concurrentes que son las rotaciones de Euler,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{u}_z + \dot{\theta} \mathbf{u}_n + \dot{\varphi} \mathbf{u}_3$$



Así, las componentes de ω se pueden poner en el sistema fijo en función de las rotaciones de Euler como:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \psi & \sin \psi \sin \theta \\ 0 & \sin \psi & -\cos \psi \sin \theta \\ 1 & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

o en el sistema móvil

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Invirtiendo las matrices se tiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \psi / \tan \theta & \cos \psi / \tan \theta & 1 \\ \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ \sin \psi / \sin \theta & -\cos \psi / \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \varphi / \sin \theta & \cos \varphi / \sin \theta & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi / \tan \theta & -\cos \varphi / \tan \theta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

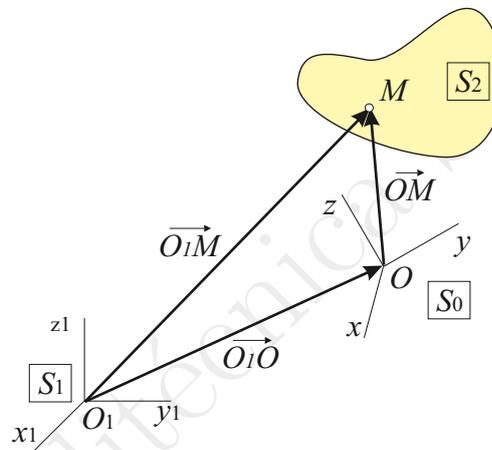


3. Composición de movimientos

- 3.1 Composición de velocidades.
- 3.2 Composición de rotaciones.
- 3.3 Composición de aceleraciones.
- 3.4 Composición de aceleraciones angulares.
- 3.5 Movimientos inversos.
- 3.6 Movimientos relativos de sólidos en contacto.

El problema de la composición de movimientos. Generalidades.

El objetivo de este tema es obtener el movimiento de un cuerpo S_2 respecto de un sistema de referencia $S_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ cuando se conoce el movimiento del cuerpo en otro sistema de referencia $S_0(O, x, y, z)$ y el movimiento de S_0 respecto de S_1 .



Conocida las leyes de composición del movimiento de dos sistemas, para un número mayor de sistemas no hay más que aplicar las mismas ecuaciones tantas veces como sean necesarias para pasar del sistema inicial al sistema final.

NOTACIÓN. En los términos de todas las ecuaciones indicaremos con un subíndice el sistema al que pertenece el punto y con otro el sistema respecto del cual se está considerando la magnitud (posición, velocidad, rotación, ...), así,

$$\vec{v}_{20}^M$$

será la velocidad del punto M del sistema 2 vista desde el sistema 0.

3.1. Composición de velocidades

Para cualquier punto M de S_2 tenemos:

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$

y la velocidad de M respecto de S_1 se obtendrá derivando las componentes de $\overrightarrow{O_1M}$ en este sistema de referencia:

$$\vec{v}_{21}^M = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} \right)_{S_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{S_1}$$

con

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{S_0} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}$$

donde $\vec{\omega}_{01}$ es la rotación del sistema S_0 respecto de S_1 . De manera que:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{20}^M + \vec{v}_{01}^O + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}$$

Se denomina *velocidad relativa* de la partícula M a $\vec{v}_{\text{rel}}^M = \vec{v}_{20}^M$ es decir, la velocidad que tiene el punto M respecto del sistema de referencia móvil S_0 .

La *velocidad de arrastre* es:

$$\vec{v}_{\text{arr}}^M = \vec{v}_{01}^O + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM} = \vec{v}_{01}^M$$

y sería la velocidad que tendría M si estuviese unida rígidamente al sistema móvil S_0 al ser arrastrado por este.

La ley de composición de velocidades puede escribirse:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{20}^M + \vec{v}_{01}^M$$

En el contexto que estamos estudiando se designa como movimiento absoluto el movimiento del cuerpo respecto del sistema de referencia que tomemos como fijo, S_1 y movimiento relativo el del sólido respecto del sistema móvil S_2 que no es solidario con el cuerpo. Así, la ecuación anterior se escribiría

$$\vec{v}_{\text{abs}}^M = \vec{v}_{\text{rel}}^M + \vec{v}_{\text{arr}}^M$$

3.2. Composición de rotaciones

Sea $\vec{\omega}_{20}$ la rotación del cuerpo S_2 respecto de S_0 y $\vec{\omega}_{01}$ la rotación de S_0 respecto de S_1 ; el objetivo es determinar $\vec{\omega}_{21}$. Sean M y N dos puntos del sólido S_2 ; sabemos que la velocidad absoluta es:

$$\vec{v}_{21}^N = \vec{v}_{21}^M + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{MN}$$

la velocidad relativa

$$\vec{v}_{20}^N = \vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{MN}$$

y la velocidad de arrastre:

$$\vec{v}_{01}^N = \vec{v}_{01}^M + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{MN}$$

Entonces, de la ley de composición de velocidades:

$$\vec{v}_{21}^N - \vec{v}_{21}^M = \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{MN} = \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{MN} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{MN}, \quad \forall M, N \in S_2$$

y por tanto

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}$$

3.3. Composición de aceleraciones

Derivando respecto del tiempo la expresión:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{01}^O + \vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}$$

y teniendo en cuenta que tanto \vec{v}_{20}^M como \overrightarrow{OM} son vectores cuyas componentes están expresadas en un sistema de referencia móvil, tenemos:

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{01}^O + \vec{a}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M + \dot{\vec{\omega}}_{01} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \times [\vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}]$$

agrupando los términos y llamando

$$\vec{a}_{01}^M = \vec{a}_{01}^O + \dot{\vec{\omega}}_{01} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \times (\vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM})$$

a la aceleración de arrastre del punto M , que corresponde a la aceleración que tendría M si estuviese rígidamente unido a S_0 . Finalmente tenemos:

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{20}^M + \vec{a}_{01}^M + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M$$

Donde \vec{a}_{21}^M será la aceleración absoluta de M ; \vec{a}_{20}^M es la aceleración relativa, es decir, la aceleración de M respecto del sistema de referencia móvil S_0 ; \vec{a}_{01}^M corresponde a la aceleración de arrastre cuya interpretación es similar a la de la velocidad de arrastre; y finalmente el término $2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M$ es la aceleración de Coriolis, debida al efecto combinado de la rotación del sistema móvil ($\vec{\omega}_{01}$) y la velocidad de M en ese sistema móvil S_0 , \vec{v}_{20}^M .

$$\vec{a}_{\text{abs}}^M = \vec{a}_{\text{rel}}^M + \vec{a}_{\text{arr}}^M + \vec{a}_{\text{Cor}}^M$$



3.4. Composición de aceleraciones angulares

Puede obtenerse la aceleración angular derivando la ley de composición de rotaciones:

$$\vec{\alpha}_{21} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt} \right)_{S_1} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt} \right)_{S_1}$$

con

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt} \right)_{S_1} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20}$$

Entonces:

$$\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20}$$

3.5. Movimientos inversos

Dados dos sólidos S_1 y S_0 y conocido el movimiento de S_0 respecto de S_1 se presenta a veces la necesidad de hallar el movimiento de S_1 respecto de S_0 que se denomina inverso del primero. Para ello observando que la composición de movimientos $S_1/S_0/S_1$ es el reposo (no movimiento) tenemos:

$$\vec{v}_{11}^M = \vec{v}_{10}^M + \vec{v}_{01}^M = 0$$

de donde

$$\vec{v}_{10}^M = -\vec{v}_{01}^M$$

Análogamente para las rotaciones tenemos

$$\vec{\omega}_{11} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{01} = 0$$

y entonces

$$\vec{\omega}_{10} = -\vec{\omega}_{01}$$

Las aceleraciones en los movimientos inversos solamente son iguales y de signo contrario para los puntos situados en el eje instantáneo de rotación.

$$\vec{a}_{11}^M = \vec{a}_{10}^M + \vec{a}_{01}^M + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{10}^M = 0$$

de donde

$$\vec{a}_{10}^M = -\vec{a}_{01}^M - 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{10}^M$$

Para que se anule el último producto vectorial, el punto M ha de estar sobre el EIR.

En cuánto a las aceleraciones angulares también se verifica que son iguales y opuestas en los movimientos inversos:

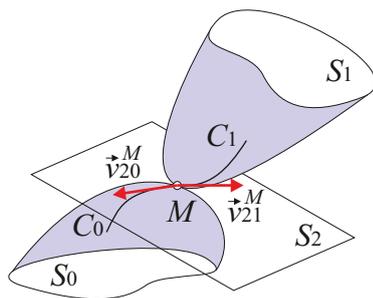
$$\vec{\alpha}_{11} = \vec{\alpha}_{10} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{10} = 0$$

y como $\vec{\omega}_{01} = -\vec{\omega}_{10}$, tenemos que:

$$\vec{\alpha}_{10} = -\vec{\alpha}_{01}$$

3.6. Movimientos relativos de sólidos en contacto.

Sean S_0 y S_1 dos sólidos que se mueven manteniendo un único punto de contacto M . Sea S_2 un sistema de referencia ligado al plano tangente común a los dos sólidos en M . Durante el movimiento de los dos sólidos M describe trayectorias C_0 y C_1 en S_0 y S_1 respectivamente, con velocidades \vec{v}_{20}^M y \vec{v}_{21}^M tangentes a C_0 y C_1 y por tanto contenidas en el plano tangente.



De la composición de movimientos tenemos

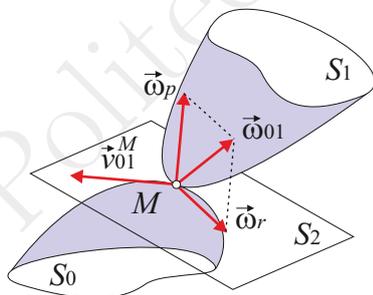
$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{20}^M + \vec{v}_{01}^M$$

lo que nos indica que \vec{v}_{01}^M , la velocidad relativa entre ambos sólidos en el punto de contacto M queda también contenida en el plano tangente común. A esta velocidad la denominamos velocidad de deslizamiento de S_0 sobre S_1 . Otra forma de expresar la condición anterior (condición de que los dos sólidos permanezcan en contacto en el punto M) es $\vec{v}_{01}^M \cdot \hat{n} = 0$ siendo \hat{n} el vector unitario normal al plano tangente común.

Si expresamos las velocidades de S_0 respecto de S_1 a través de la velocidad del punto de contacto y la velocidad de rotación $\vec{\omega}_{01}$, $((\vec{v}_{01}^M, \vec{\omega}_{01})$ grupo cinemático en M) se suele descomponer esta última en dos componentes ω_p y ω_r una en la dirección normal y otra contenida en el plano tangente:

Rotación de pivotamiento: $\omega_p = |\vec{\omega} \cdot \hat{n}|$

Rotación de rodadura: $\omega_r = |\vec{\omega} \times \hat{n}|$



Si los sólidos **ruedan sin deslizar**, la velocidad del punto de contacto será la misma vista desde el sólido S_1 que vista desde S_0 , es decir $\vec{v}_{20}^M = \vec{v}_{21}^M$ y por lo tanto la velocidad de deslizamiento será nula, $\vec{v}_{01}^M = 0$.

4. Movimiento plano del sólido rígido

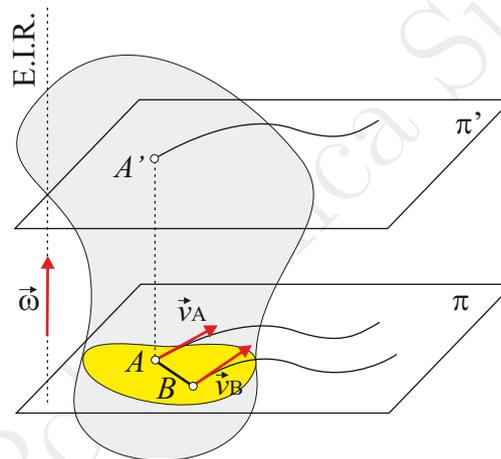
- 4.1 Centro instantáneo de rotación. Base y ruleta.
- 4.2 Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación.
- 4.3 Distribución de aceleraciones en el movimiento plano.
- 4.4 Circunferencia de las inflexiones y de las inversiones. Polo de aceleraciones.

Introducción

Estudiaremos aquí un caso particular de movimiento del sólido rígido de gran interés por su riqueza de aplicaciones, sobre todo en el diseño de máquinas y mecanismos.

Características del movimiento plano.

Un sólido rígido realiza un movimiento plano si todos sus puntos se mueven describiendo trayectorias contenidas en planos fijos paralelos entre si. Cualquiera de ellos recibe el nombre de plano del movimiento.



Propiedades:

- Todos los puntos del sólido pertenecientes a un determinado plano π del movimiento tiene velocidades contenidas en dicho plano.
- $\vec{\omega}$ es siempre normal al plano del movimiento. Basta tomar dos puntos A y B del plano π , $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overline{AB}$ y dado que \vec{v}_B y \vec{v}_A están contenidos en el plano, $\vec{\omega} \times \overline{AB}$ también lo estará y por tanto $\vec{\omega}$ ha de ser normal al plano π . En el movimiento plano $\vec{\omega}$ y el EIR mantienen su dirección, la única variación de $\vec{\omega}$ se produce en su módulo y en el sentido, por tanto, $\vec{\omega}$ queda especificada por una única componente y podemos tratarla como un escalar con signo.
- La velocidad de deslizamiento mínimo es nula, $v_d = 0$, dado que $\vec{v}_A \perp \vec{\omega}, \forall A$; por tanto, el movimiento plano es una rotación pura.
- Todos los planos del movimiento tienen la misma distribución de velocidades $\vec{v}_{A'} = \vec{v}_A$ porque $\overline{AA'} \parallel \vec{\omega}$. Es suficiente, por tanto, estudiar el movimiento en uno de los planos, por ejemplo el plano π , que denominaremos plano director.

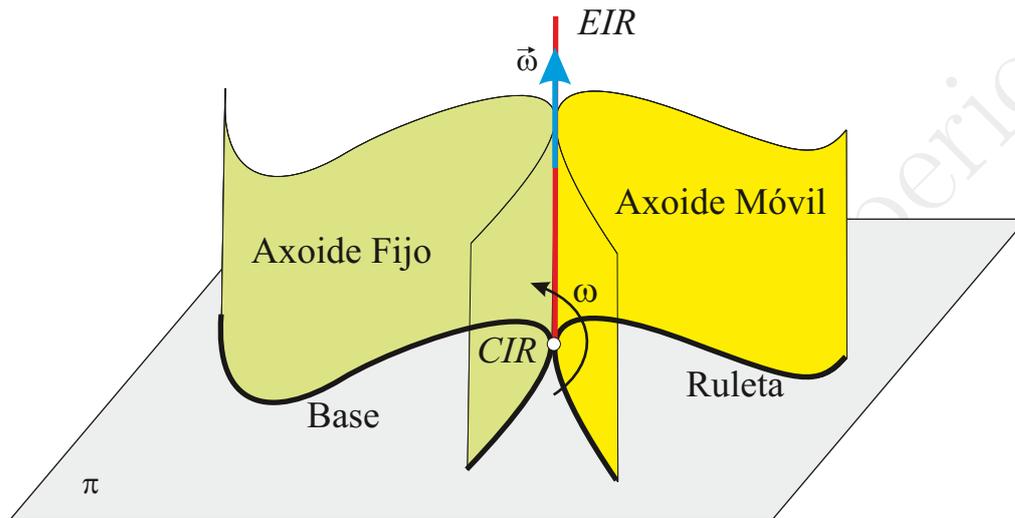
4.1. Centro instantáneo de rotación. Base y ruleta.

En el movimiento plano los axoides son superficies engendradas por rectas normales al plano π . Además la velocidad de deslizamiento mínimo es nula, $v_d = 0$, por tanto el axoide móvil rueda sin deslizar sobre el axoide fijo. Definimos:

- **Base o polar fija.** Curva intersección del axoide fijo con el plano π .

- **Ruleta o polar móvil.** Curva intersección del axoide móvil con el plano π
- **Centro instantáneo de rotación (CIR).** Punto donde el EIR interseca al plano π . Es el punto de contacto entre la base y la ruleta.

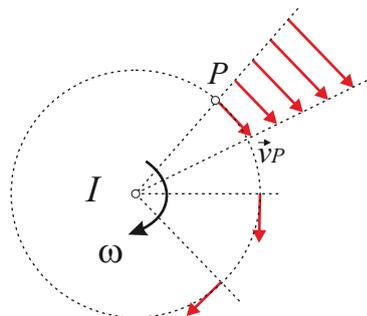
Dado que $v_d = 0$, el CIR es el único punto del plano con velocidad nula, puede describirse el movimiento plano como una rotación pura alrededor del CIR. Las distintas posiciones del CIR a lo largo del tiempo son, respecto del sistema fijo la base y respecto del móvil la ruleta. La ruleta rueda sin deslizar sobre la base.



Llamando I al centro instantáneo de rotación, $\vec{v}_I = 0$, y la distribución de velocidades desde el CIR queda:

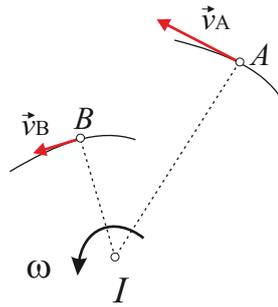
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{IP}$$

- La dirección de \vec{v}_P es normal a \vec{IP}
- El módulo de \vec{v}_P es $v_P = \omega \overline{IP}$, es decir, aumenta proporcionalmente con la distancia al CIR.
- Los puntos con la misma velocidad v_P están sobre circunferencias de radio v_P/ω .



Consecuencias:

- El movimiento está determinado si se conoce la posición del CIR y el valor de ω
- Si en un instante dado se conocen las tangentes a las trayectorias de dos puntos, se conocerá la posición del CIR, basta trazar las perpendiculares a dichas tangentes; el punto de corte será el CIR.
- Si además se conoce la velocidad de uno de los puntos, A , el movimiento está totalmente determinado, $\omega = v_A/\overline{IA}$



4.2. Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación.

Hemos visto que la velocidad del CIR es nula por definición, $\vec{v}_I = 0$; sin embargo durante el movimiento del sólido el CIR cambia de posición con el tiempo. Definimos entonces la **velocidad de sucesión del CIR** como la derivada respecto del tiempo de las sucesivas posiciones del CIR vistas desde el sistema fijo:

$$\vec{v}_s = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_I(t + \Delta t) - \vec{r}_I(t)}{\Delta t}$$

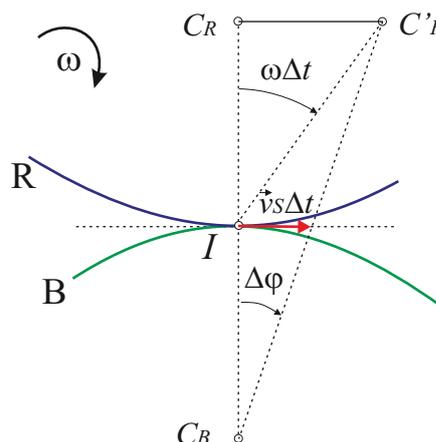
Téngase en cuenta que \vec{v}_I es la velocidad del punto del sólido que en un instante dado es el CIR, y es por tanto nula, mientras que \vec{v}_s no se corresponde con la velocidad de ningún punto del sólido, sino que es la velocidad con que se transmite “la propiedad de ser el centro instantáneo de rotación” de unos puntos a otros.

- Dirección de \vec{v}_s : La tangente común a base y ruleta.
- Sentido de \vec{v}_s : Viene determinado por el sentido de $\vec{\omega}$, es decir, por el sentido en que la ruleta avanza al rodar sobre la base.
- Módulo de \vec{v}_s : Está relacionado con ω y las posiciones de los centros de curvatura de base y ruleta, C_B y C_R , respectivamente³:

$$\frac{v_s}{\omega} = \frac{\overline{IC_B IC_R}}{\overline{C_B C_R}}$$

Para demostrar esta relación basta considerar el cambio de posición del centro de curvatura de la ruleta,

$$\overline{C_R C'_R} = \overline{IC_R} \omega \Delta t = \overline{C_B C_R} \Delta \varphi = \overline{C_B C_R} \frac{v_s \Delta t}{\overline{IC_B}}$$



³Fórmula de Euler-Savary

4.3. Distribución de aceleraciones.

La aceleración de un punto P cualquiera del sólido es $\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\alpha} \times \vec{OP} - \omega^2 \vec{OP}$. En el movimiento plano nos interesa obtener la distribución de velocidades desde el CIR, para ello es derivamos la expresión de la velocidad $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{IP}$:

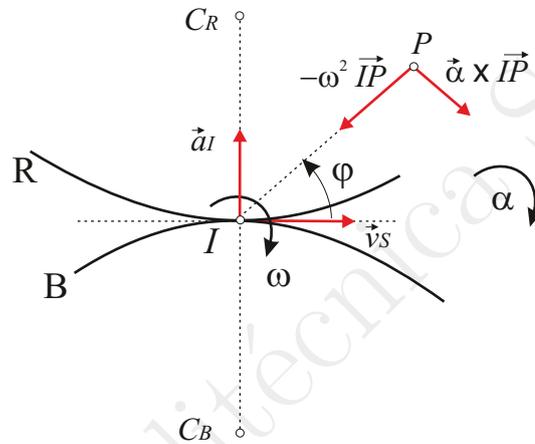
$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{IP} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{IP}}{dt}$$

siendo,

$$\frac{d\vec{IP}}{dt} = \frac{d\vec{OP}}{dt} - \frac{d\vec{OI}}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_s$$

de manera que $\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{IP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{IP}) - \vec{\omega} \times \vec{v}_s$ y podemos escribir la distribución de aceleraciones desde el CIR como:

$$\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{IP} - \omega^2 \vec{IP} - \vec{\omega} \times \vec{v}_s \quad (4.17)$$



Analizando cada uno de los términos de la ecuación 4.17 tenemos:

- $\vec{\alpha} \times \vec{IP}$ es normal a \vec{IP} y por tanto paralela a \vec{v}_P . Es la componente tangencial de la aceleración en el movimiento de P relativo al CIR. Su módulo es proporcional a la distancia del punto P al CIR.
- $-\omega^2 \vec{IP}$ es normal a la trayectoria de P y dirigida al CIR. Es la componente normal del movimiento de P respecto de I . Su módulo es proporcional a la distancia entre P y el CIR.
- $-\vec{\omega} \times \vec{v}_s$ es igual para todos los puntos del sólido. Es la aceleración del centro instantáneo de rotación, es decir, $\vec{a}_I = \frac{d\vec{v}_I}{dt} = -\vec{\omega} \times \vec{v}_s$. Este vector forma un ángulo de 90° con ω en el sentido contrario al de la rotación.

4.4. Circunferencia de las inflexiones y de las inversiones. Polo de aceleraciones.

Las componentes intrínsecas de la aceleración del punto P de la figura anterior se obtienen proyectando sobre la dirección de la velocidad (perpendicular a \vec{IP}) y sobre la normal (dirección que une P con el CIR),

$$a_t = \alpha \overline{IP} - \omega v_s \cos \varphi$$

$$a_n = \omega^2 \overline{IP} - \omega v_s \sin \varphi$$

Los puntos P del plano que tienen aceleración tangencial nula se obtienen de la primera ecuación:

$$\overline{IP} = \frac{\omega v_s}{\alpha} \cos \varphi$$

que es la ecuación de una circunferencia en coordenadas polares. Esta circunferencia pasa por I , tiene centro en la recta que contiene a \vec{v}_s , es decir, $\varphi = 0$, y diámetro $D_{inv} = \frac{\omega v_s}{\alpha}$. Se conoce por *circunferencia de las inversiones* o *estacionaria* porque $a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow$ se invierte la velocidad.

El lugar geométrico de los puntos con aceleración normal nula se obtiene de la segunda ecuación:

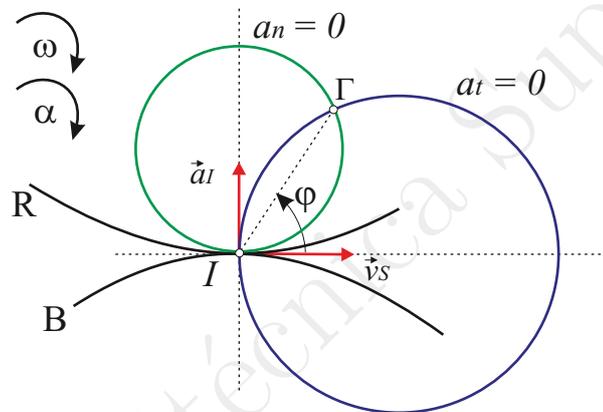
$$\overline{IP} = \frac{v_S}{\omega} \sin \varphi$$

que es una circunferencia que pasa por I , tiene centro en la normal a \vec{v}_S , es decir, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, y diámetro $D_{\text{inf}} = \frac{v_S}{\omega}$. Se le llama *circunferencia de las inflexiones* porque $a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \infty$ punto de inflexión.

Las dos circunferencias se cortan en un punto llamado *polo de aceleraciones*, Γ , que es el único punto con aceleración nula en ese instante. Las coordenadas polares de Γ desde el CIR son:

$$\overline{I\Gamma} = \frac{\omega v_S}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega^2}{\alpha}\right)$$



Comentarios:

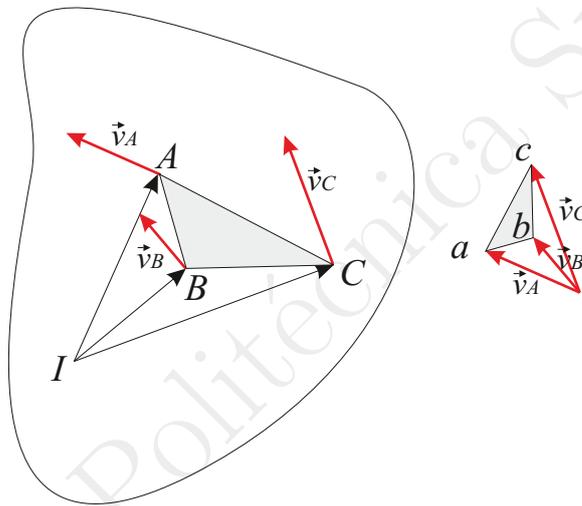
- El CIR también está en las dos circunferencias aunque $\vec{a}_I = -\vec{\omega} \times \vec{v}_S \neq 0$. Nótese que en coordenadas polares el origen (I) es un punto singular. Además, como $\vec{v}_I = 0$, no existen la tangente ni la normal.
- Dependiendo del sentido de ω y α cambia la posición de las circunferencias. Así, por ejemplo, el vector \vec{a}_I indica la dirección en la que se encuentra la Circunferencia de las Inversiones.
- Si $\omega = \text{cte}$, $\alpha = 0$ y la circunferencia de las inversiones ($a_t = 0$) se convierte en la recta normal a \vec{v}_S pasando por I . El polo de aceleraciones se encuentra sobre esta recta a una distancia D_{inf} del CIR.

Apéndice: Cinemática Gráfica.

Antes de que se popularizaran las calculadoras y los ordenadores se utilizaban diferentes métodos para obtener resultados aproximados de ciertos problemas evitando el cálculo numérico. En los métodos gráficos se utilizaban las herramientas de un tablero de dibujo para realizar diversas operaciones. Hoy en día, evidentemente, no tiene sentido recurrir a estos métodos para el análisis cinemático de mecanismos pero comentaremos aquí el fundamento de uno de ellos porque permite establecer una relación sencilla entre las velocidades y aceleraciones de 3 puntos.

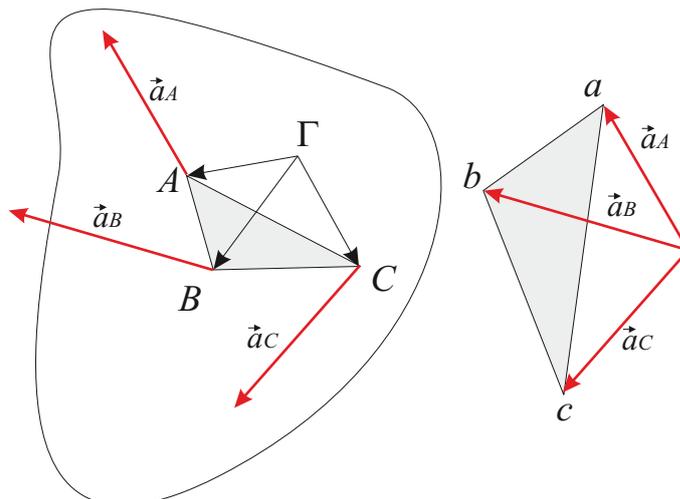
Cinema de velocidades

La relación $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{IP}$ demuestra que el vector velocidad de un punto se obtiene multiplicando el vector de posición \vec{IP} por ω y girándolo $\pi/2$ en el sentido de la rotación. Si consideramos tres puntos A , B y C del sólido, los extremos de sus velocidades trasladadas a un origen común, *cinema de velocidades*, definen un triángulo semejante al ABC , siendo el factor de escala ω y el ángulo girado $\beta = \pm\pi/2$.



Cinema de aceleraciones

De manera similar, la relación $\vec{a}_P = \vec{\alpha} \times \vec{\Gamma P} - \omega^2 \vec{\Gamma P}$ demuestra que el vector aceleración de un punto se obtiene multiplicando el vector de posición $\vec{\Gamma P}$ por $\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$ y girándolo un ángulo $\psi = -\arctan(\alpha/\omega^2)$ en el sentido positivo. Si consideramos tres puntos A , B y C del sólido, los extremos de sus aceleraciones trasladadas a un origen común, *cinema de aceleraciones*, definen un triángulo semejante al ABC , siendo el factor de escala $\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$ y el ángulo girado $\psi = -\arctan(\alpha/\omega^2)$.





Campo de velocidades y aceleraciones

Las relaciones que definen los cinemas, es decir, las leyes de distribución de velocidades y aceleraciones pueden expresarse de forma matricial como,

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP} = \begin{pmatrix} v_{O_x} \\ v_{O_y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

lo que demuestra que el campo de velocidades es una constante más el vector de posición multiplicado por una matriz M que puede escribirse como, $M = \omega R$ donde la matriz R es

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es una rotación de ángulo $-\pi/2$. La matriz M por tanto es un giro de ángulo $-\pi/2$ combinado con un factor de escala ω , tal como vimos en el cinema.

De forma similar, el campo de aceleraciones puede escribirse como,

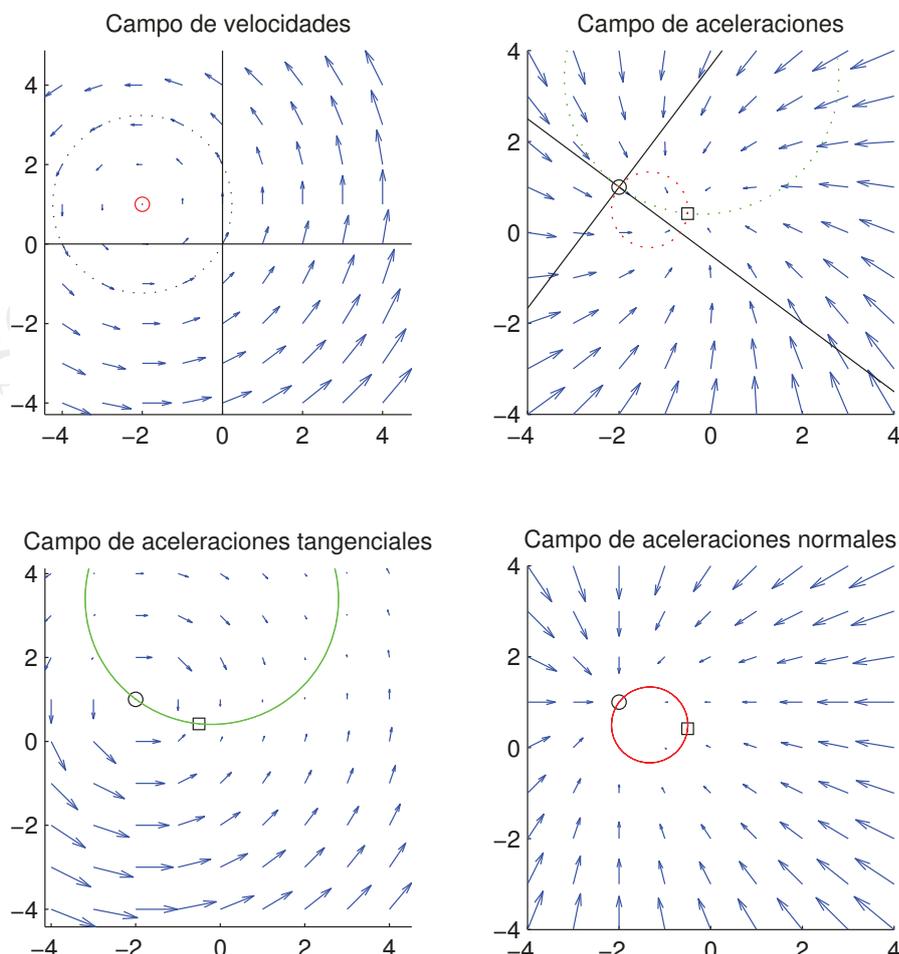
$$\vec{a}_P = \vec{v}_O + \vec{\alpha} \times \vec{OP} - \omega^2 \vec{OP} = \begin{pmatrix} a_{O_x} \\ a_{O_y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega^2 & -\alpha \\ \alpha & -\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix}$$

y la matriz de transformación Q puede escribirse como

$$Q = \begin{pmatrix} -\omega^2 & -\alpha \\ \alpha & -\omega^2 \end{pmatrix} = \sqrt{\alpha^2 + \omega^4} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

que es una rotación de ángulo $\psi = -\arctan(\alpha/\omega^2)$ combinada con un factor de escala $\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$.

En la figura se muestra un ejemplo de los campos de velocidades y de aceleraciones. El círculo indica la posición del CIR y el cuadrado la del polo de aceleraciones.





5. Fuerzas distribuidas

- 5.1 Centros de masa.
- 5.2 Tensor de inercia.
- 5.3 Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.
- 5.4 Diagonalización del tensor de inercia.
- 5.5 Simetrías en las distribuciones de masas.
- 5.6 Elipsoide de inercia

Introducción

El objetivo de este tema es la determinación de las magnitudes que caracterizan la dinámica de un sistema de masa distribuida: **centro de masas** y **tensor de inercia**. Se analizarán dos tipos de sistemas:

- Sistemas discretos: Formados por una colección de masas puntuales $\{(m_\alpha, \vec{r}_\alpha); \alpha = 1, 2, \dots\}$
- Sistemas continuos: Especificados por la función escalar densidad $\rho = \rho(\vec{r}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ con dimensiones $[\rho] = ML^{-3}$. Así, a cada volumen elemental dV le corresponde una masa $dm = \rho dV$. Para cuerpos en los que una de las dimensiones es despreciable (superficies) se define una densidad superficial de masa $\sigma = \sigma(\vec{r})$, con $[\sigma] = ML^{-2}$ de manera que $dm = \sigma dA$. Si el cuerpo solamente tiene una dimensión apreciable (curva), se define una densidad lineal de masa $\lambda = \lambda(\vec{r})$, $[\lambda] = ML^{-1}$ de manera que la masa del elemento de arco dS es $dm = \lambda dS$.

5.1. Centro de masas

El centro de masas G es el punto del espacio cuyo vector de posición viene dado por:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}}{\mu}$$

siendo μ la masa total del sistema. De acuerdo con esta definición el centro de masas se determina como el promedio, ponderado por las masas de cada partícula, de los vectores de posición de las partículas que constituyen el sistema.

Para un sistema continuo se sustituye la suma por una integral y la masa del elemento diferencial de volumen ($dm = \rho dV$), de superficie ($dm = \sigma dA$) o de línea ($dm = \lambda d\ell$) de manera que:

$$\vec{r}_G = \frac{\iiint \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{\iiint \rho(\vec{r}) dV} = \frac{\iint \vec{r} \sigma(\vec{r}) dA}{\iint \sigma(\vec{r}) dA} = \frac{\int \vec{r} \lambda(\vec{r}) d\ell}{\int \lambda(\vec{r}) d\ell}$$

Propiedades:

1. Para un cuerpo homogéneo, densidad constante, el centro de masas coincide con el centro geométrico.
2. Para un sistema compuesto por $k = 1, \dots, N$ subsistemas el centro de masas se determina como

$$\vec{r}_G = \frac{1}{\mu} \sum_k \mu_k \vec{r}_G(k)$$

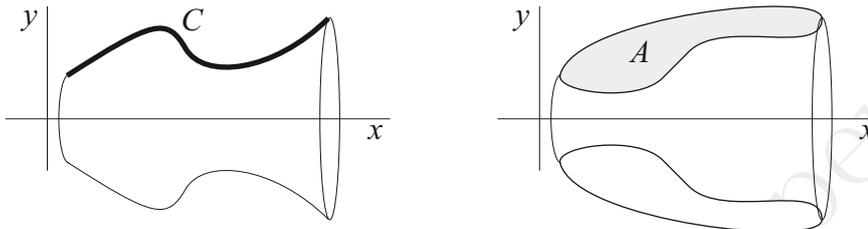
siendo $\mu = \sum_{k=1}^N \mu_k$

Esta expresión es válida para huecos considerándolos como subsistemas de masa negativa.

3. La distribución de momentos generada por la fuerza gravitatoria distribuida sobre los elementos de masa de un sistema es equivalente a su resultante, el peso, colocada en el centro de masas.

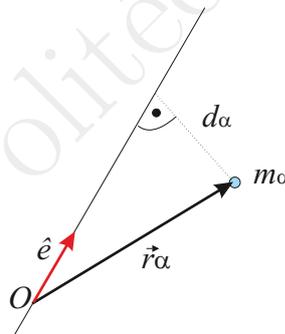
4. **Teoremas de Pappus-Guldin:** Sirven para determinar la posición del centro de una curva/superficie cuando se conoce el área/volumen engendrado al realizar una revolución completa alrededor de un eje

- Para una curva, $y_G = \frac{A}{2\pi L}$, siendo L la longitud de la curva y A la superficie generada en una revolución alrededor del eje x .
- Para una superficie, $y_G = \frac{Vol}{2\pi A}$ siendo A el área de la superficie y Vol el volumen engendrado en la revolución alrededor del eje x .



5.2. Tensor de Inercia

Se define el **momento de inercia respecto de un eje e** como la suma del producto de las masas por su distancia al eje al cuadrado, $I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$. Sus dimensiones son ML^2 . A partir del momento de inercia puede definirse también el radio de giro para el eje e como $R_e = \sqrt{\frac{I_e}{\mu}}$ con dimensiones de longitud.



Si se toma el origen O en algún punto del eje e , la distancia de cada partícula al eje sería $d_{\alpha} = |\vec{r}_{\alpha} \times \hat{e}|$ y podría escribirse

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \hat{e})^2 = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{r}_{\alpha}^2 - (\vec{r}_{\alpha} \cdot \hat{e})^2 \right]$$

Desarrollando los términos de la expresión anterior con la ayuda del tensor de segundo orden denominado **delta de Kronecker**, $\delta_{ij} = \{1 \text{ si } i = j; 0 \text{ si } i \neq j\}$, se tiene

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\alpha} \cdot \hat{e} &= \sum_i r_{\alpha i} e_i \\ (\vec{r}_{\alpha} \cdot \hat{e})^2 &= \left(\sum_i r_{\alpha i} \cdot e_i \right) \left(\sum_j r_{\alpha j} \cdot e_j \right) = \sum_i \sum_j r_{\alpha i} r_{\alpha j} e_i e_j \\ \hat{e}^2 &= \sum_i e_i e_i = \sum_i \sum_j \delta_{ij} e_i e_j \end{aligned}$$

y separando todo aquello que depende del eje e , tenemos:

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left\{ \vec{r}_{\alpha}^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{ij} e_i e_j \right) - \left(\sum_i \sum_j r_{\alpha i} r_{\alpha j} \right) e_i e_j \right\}$$

que escrito en forma más compacta queda:

$$I_e = \sum_i \sum_j I_{ij} e_i e_j$$

donde las I_{ij} son las 9 componentes de un tensor de 2º orden, denominado **tensor de inercia**.

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 \delta_{ij} - r_{\alpha i} r_{\alpha j})$$

En una base cartesiana, $\hat{e}(e_x, e_y, e_z)$ y $\vec{r}_{\alpha}(r_x, r_y, r_z)$ el momento de inercia queda

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [e_x^2 (r_y^2 + r_z^2) + e_y^2 (r_x^2 + r_z^2) + e_z^2 (r_x^2 + r_y^2)] - \sum_{\alpha} m_{\alpha} [2e_x e_y r_x r_y + 2e_x e_z r_x r_z + 2e_y e_z r_y r_z]$$

y escrito en forma matricial :

$$I_e = (e_x \ e_y \ e_z) \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal del tensor de inercia son los **momentos de inercia** para los ejes cartesianos $Oxyz$. Los elementos de fuera de la diagonal son, cambiados de signo, los **productos de inercia** que se definen como el producto de la masa por la distancia a dos de los planos cartesianos:

- Momento de inercia para el eje Ox

$$I_{xx} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 - x_{\alpha}^2) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) = I_x$$

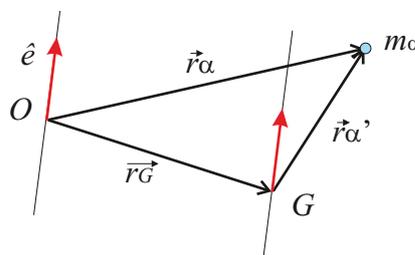
- Producto de inercia de los planos Oyz , Oxz

$$I_{xy} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 - x_{\alpha} y_{\alpha}) = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} = -P_{xy}$$

- El tensor de inercia es un tensor simétrico: Se cumple que $I_{ij} = I_{ji}$. Por lo tanto, $I_{xz} = -P_{xz} = I_{zx}$, $I_{yx} = I_{xy} = -P_{xy}$ y las 6 cantidades $I_x, I_y, I_z, P_{xy}, P_{xz}, P_{yz}$ determinan el valor de todos los momentos y productos de inercia del sistema.

5.3. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

Las componentes del tensor de inercia dependen del punto O elegido como origen. El teorema de Steiner nos da la relación entre estas componentes respecto de dos ejes paralelos, uno que pasa por el punto O y otro que pasa por el centro de masas G .



En un sistema de partículas, $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_G + \vec{r}'_\alpha$ y el tensor de inercia en O puede escribirse:

$$\begin{aligned} I_{ij}^O &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\vec{r}_G + \vec{r}'_{\alpha})^2 \delta_{ij} - (r_{Gi} + r'_{\alpha i}) (r_{Gj} + r'_{\alpha j}) \right] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[(\vec{r}_G^2 + \vec{r}'_{\alpha}{}^2 + 2\vec{r}_G \vec{r}'_{\alpha}) \delta_{ij} - (r_{Gi} r_{Gj} + r'_{\alpha i} r'_{\alpha j} + r_{Gi} r'_{\alpha j} + r_{Gj} r'_{\alpha i}) \right] \\ &= \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) (\vec{r}_G^2 \delta_{ij} - r_{Gi} r_{Gj}) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\vec{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j} \right] + 2\vec{r}_G \delta_{ij} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} - r_{Gi} \sum_{\alpha} m_{\alpha} r'_{\alpha j} - r_{Gj} \sum_{\alpha} m_{\alpha} r'_{\alpha i} \end{aligned}$$

Dado que $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} - \mu \vec{r}_G = 0$, por definición de G , las componentes del tensor de inercia cambian según:

$$I_{ij}^O = I_{ij}^G + \mu (\vec{r}_G^2 \delta_{ij} - r_{Gi} r_{Gj})$$

es decir, tensor de inercia en O es el tensor de inercia en G más el tensor de inercia que tendría en O la masa total del sistema situada en G .

- Para los momentos de inercia se tiene:

$$I_x^O = I_{xx}^O = I_{xx}^G + \mu (y_G^2 + z_G^2) = I_x^G + \mu d^2$$

siendo d la distancia entre los ejes. Nótese que d en general no coincide con la distancia entre los puntos O y G . Además, como $d^2 > 0$, salvo que los ejes coincidan, $I_O > I_G$ y como consecuencia, para una dirección fija \hat{u} , el valor mínimo del momento de inercia se obtiene cuando el eje pasa por el centro de masas.

- Análogamente para los productos de inercia:

$$P_{xy}^O = -I_{xy}^O = -[I_{xy}^G + \mu (-x_G y_G)] = P_{xy}^G + \mu x_G y_G$$

5.4. Diagonalización del tensor de inercia

Para un origen O dado, las componentes del tensor de inercia dependen de la orientación del sistema de referencia. Puede demostrarse que mediante una rotación siempre es posible encontrar una orientación de la base en la que el tensor sea diagonal. El cambio en las componentes del tensor de inercia vendrá dado por la matriz de la transformación A , de la forma $I' = A I A^t$, o bien $I'_{ij} = \sum_k \sum_l a_{ik} a_{jl} I_{kl}$. De manera que si A es la matriz de rotación que diagonaliza al tensor

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

tenemos:

$$I' = A I A^t = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Los tres vectores $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ definen 3 direcciones ortogonales que se llaman **direcciones principales** de inercia. Los momento de inercia según esas direcciones, (I_1, I_2, I_3) , se llaman **momentos principales** de inercia. Puede demostrarse que por ser el tensor de inercia simétrico, los tres momentos principales son reales.

Invariantes del tensor de inercia. Todo tensor de 2º orden tiene dos invariantes (no dependen de la orientación del sistema de referencia):

- Determinante: $|I_{ij}| = I_1 I_2 I_3$
- Traza: $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = I_1 + I_2 + I_3$

Nótese que $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) + (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) + (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2)] = 2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 = 2I_O$, es decir:

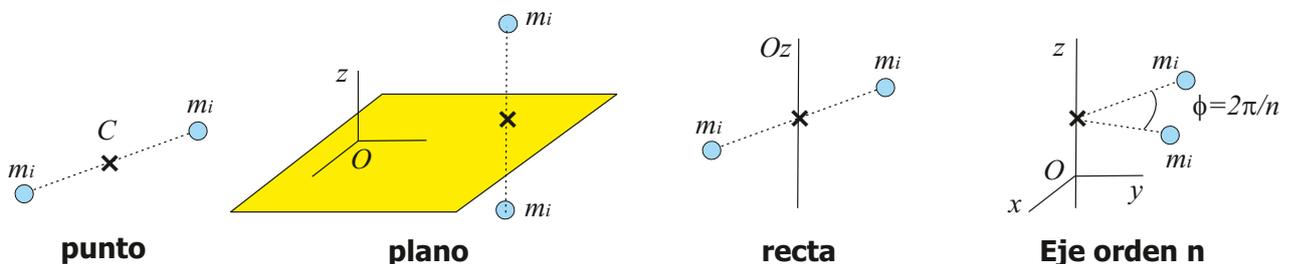
$$I_1 + I_2 + I_3 = 2I_O$$

siendo I_O el momento de inercia respecto del punto O .

5.5. Simetrías en las distribuciones de masas

En sistemas con simetrías las direcciones principales están relacionadas con los ejes y planos de simetría. Veremos solamente los casos más sencillos que facilitan la determinación de la posición del centro de masa y de las componentes del tensor de inercia.

1. **Simetría respecto de un punto C :** Por cada m situada en \vec{r} existe otra $m' = m$ situada en $\vec{r}' = \vec{r} - 2(\vec{r} - \vec{R})$, o lo que es lo mismo $\vec{r}' - \vec{R} = -(\vec{r} - \vec{R})$
 - El centro de masas coincide con el centro de simetría: $\vec{r}_G = \vec{R}$
2. **Simetría respecto de un plano:**
 - El centro de masas se encuentra en el plano y coincide con el centro de masas de la distribución proyectada.
 - El plano de simetría contiene a 2 de las direcciones principales, la tercera es la normal al plano.
3. **Simetría respecto de una recta:**
 - El centro de masas se encuentra en la recta y coincide con el centro de masas de la distribución proyectada.
 - La recta de simetría es eje principal.
4. **Eje de simetría de orden n :** La distribución se repite girando ángulos de $\frac{2\pi}{n}$, es decir $\varphi = \frac{2\pi}{n}, n = 2, 3, \dots$. Si se trata de un eje de revolución $\varphi \rightarrow 0, n = \infty$.
 - El c.d.m. se encuentra en el eje de simetría y coincide con el de la distribución proyectada, $\frac{2\pi}{n}$
 - El eje de simetría es eje principal.
 - Si $n \geq 3$, cualquier dirección perpendicular al eje es principal y además todas tienen el mismo momento principal, $I_1 = I_2 \neq I_3$
5. **Cuerpo homogéneo:** ($\rho = cte$). El centro de masas y los ejes principales guardan la misma simetría que la forma del cuerpo.



5.6. Elipsoide de inercia

Se define como el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ cuya distancia al origen O es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del momento de inercia para la dirección \overrightarrow{OP} , es decir,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{cte}{\sqrt{I_e}} \hat{e}$$

Haciendo $(\overrightarrow{OP})^2 I_e = cte^2$ vemos que estos puntos están sobre una superficie cuadrática dada por la ecuación:

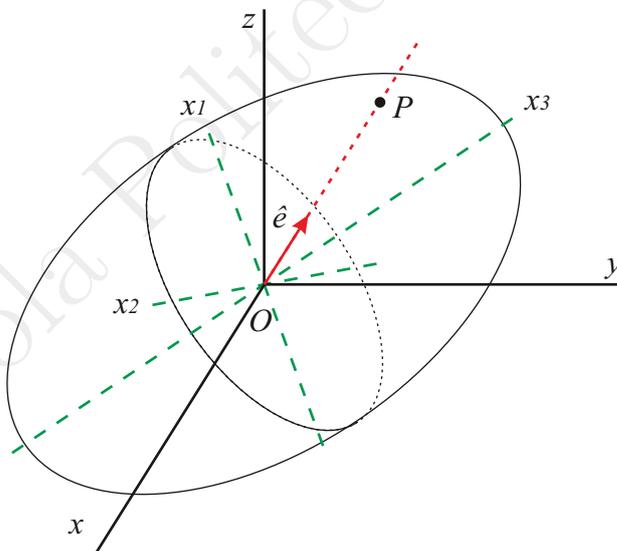
$$I_{xx} x^2 + I_{yy} y^2 + I_{zz} z^2 + 2[I_{xy} xy + I_{xz} xz + I_{yz} yz] = cte^2$$

Como I_e está acotado, $|\overrightarrow{OP}|$ también lo estará y por lo tanto la superficie corresponderá a un elipsoide, denominado **elipsoide de inercia**. Los ejes de este elipsoide serán las direcciones principales de inercia y por tanto los semiejes del elipsoide serán inversamente proporcionales a las raíces de los momentos principales de inercia. La ecuación del elipsoide referido a los ejes principales queda

$$I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 = cte^2$$

o bien

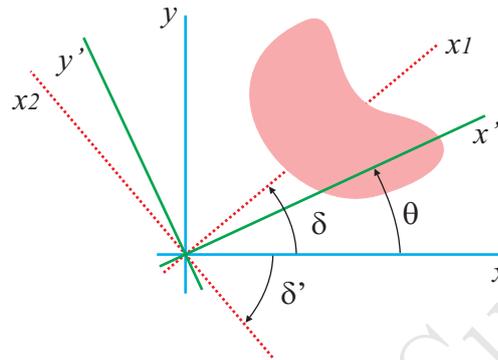
$$\left(\frac{x_1}{cte/\sqrt{I_1}}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{cte/\sqrt{I_2}}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{cte/\sqrt{I_3}}\right)^2 = 1$$





Círculo de Mohr

El círculo de Mohr es una construcción gráfica que representa el cambio de las componentes cartesianas de un tensor simétrico de segundo orden en dos dimensiones. Este tensor se puede reducir a un tensor diagonal invariante más un tensor simétrico de traza nula, cuyas componentes varían de forma similar a la de un vector, y es esa transformación la que se representa en el Círculo de Mohr.



Cambio de las componentes en una rotación

En dos dimensiones, para una rotación de ángulo θ , la matriz de transformación es

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Esta matriz de transformación permite relacionar las componentes del tensor de inercia antes y después de la rotación mediante $\mathbf{I}' = \mathbf{AIA}^t$, es decir,

$$\begin{pmatrix} I_{x'} & -P_{x'y'} \\ -P_{x'y'} & I_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

de donde se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_x \cos^2 \theta + I_y \sin^2 \theta - 2P_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ I_{y'} &= I_x \sin^2 \theta + I_y \cos^2 \theta + 2P_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ P_{x'y'} &= (I_x - I_y) \sin \theta \cos \theta + P_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

Invariantes

Con las componentes del tensor de inercia se pueden formar los siguientes invariantes:

- La traza del tensor de inercia es un invariante y coincide con el momento de inercia respecto del origen (momento polar):

$$\text{traza} = I_x + I_y = I_{x'} + I_{y'} = \int (x^2 + y^2) dm = I_O$$

- El determinante es un invariante:

$$\det = I_x I_y - P_{xy}^2 = I_{x'} I_{y'} - P_{x'y'}^2$$

- Con los dos invariantes anteriores se puede formar el siguiente invariante:

$$\left(\frac{\text{traza}}{2} \right)^2 - \det = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + P_{xy}^2$$

Tensor de traza nula

Dado que la traza no se transforma con el tensor se puede separar la parte invariante del tensor de inercia restando la traza en la diagonal:

$$\begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} \\ -P_{xy} & I_y \end{pmatrix} = \frac{I_x + I_y}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{I_x - I_y}{2} & -P_{xy} \\ -P_{xy} & -\frac{I_x - I_y}{2} \end{pmatrix}$$

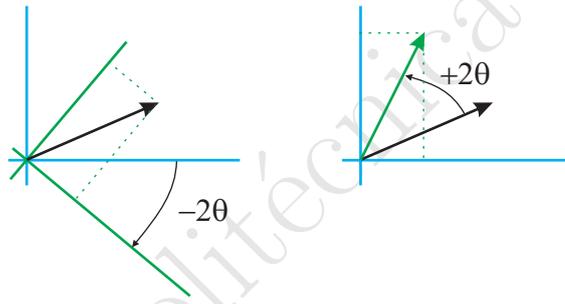
El segundo tensor es un tensor simétrico de traza nula. Las 2 componentes de este tensor transforman según la ley:

$$\begin{cases} \frac{I_{x'} - I_{y'}}{2} = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \cos 2\theta - P_{xy} \sin 2\theta \\ P_{x'y'} = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) \sin 2\theta + P_{xy} \cos 2\theta \end{cases}$$

que escritas en forma matricial toman la forma

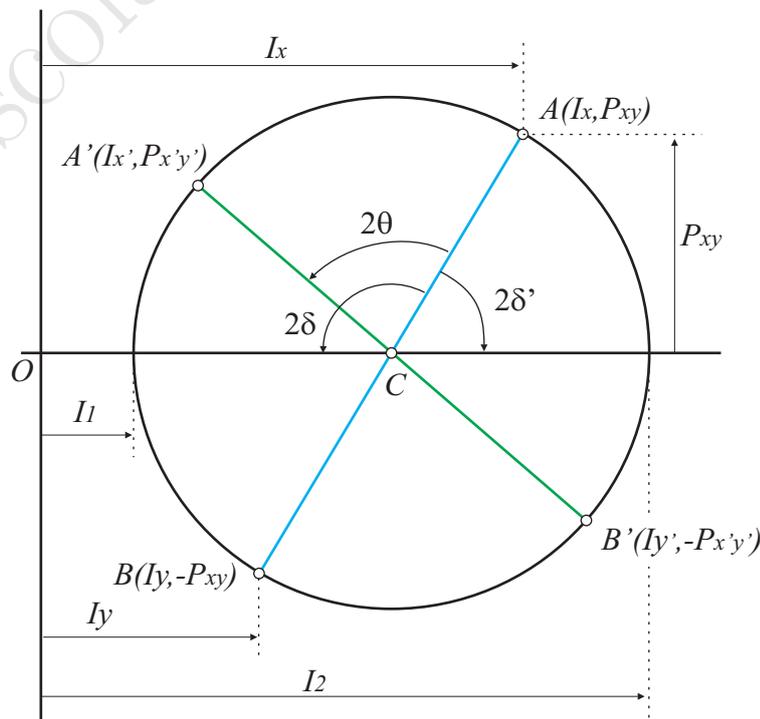
$$\begin{pmatrix} \frac{I_{x'} - I_{y'}}{2} \\ P_{x'y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{I_x - I_y}{2} \\ P_{xy} \end{pmatrix}$$

que coincide con la transformación de las componentes de un vector en una rotación de ángulo -2θ . Nótese que un giro de ángulo -2θ de los ejes coordenados es equivalente a un giro en sentido opuesto $+2\theta$ del vector.



Construcción del Círculo de Mohr

Sobre un plano coordenado se sitúan los puntos $A(I_x, P_{xy})$ y $B(I_y, -P_{xy})$ y su punto medio $C(\frac{1}{2}(I_x + I_y), 0)$. Con centro en C se traza la circunferencia que pasa por A y B .





Propiedades:

- La posición del centro de la circunferencia es un invariante y no depende de la orientación de los ejes:

$$\overline{OC} = \frac{I_x + I_y}{2} = \frac{\text{traza}}{2}$$

- El radio de la circunferencia es otro invariante:

$$R = \overline{CA} = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + P_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{\text{traza}}{2}\right)^2 - \det}$$

- El vector \overrightarrow{CA} tiene las componentes del tensor de traza nula y por tanto en una rotación de ejes de ángulo θ las nuevas componentes del tensor de inercia corresponden a los puntos A' y B' del círculo que se obtiene girando el diámetro AB el ángulo 2θ .
- Los momento de inercia principales se obtiene cuando el diámetro coincide con el eje de abscisas, así,

$$I_{1,2} = \overline{OC} \pm R = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + P_{xy}^2} = \left(\frac{\text{traza}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{\text{traza}}{2}\right)^2 - \det}$$

- Los ángulos δ y δ' que definen las direcciones principales se obtienen también de la figura puesto que son la mitad de los ángulos que forma el diámetro AB con el eje de abscisas. Estos dos ángulos cumplen,

$$\tan 2\delta = \tan 2\delta' = \frac{-2P_{xy}}{I_x - I_y}$$

y por tanto $2\delta = 2\delta' \pm \pi$.

Determinación de centros de masa y tensores de inercia

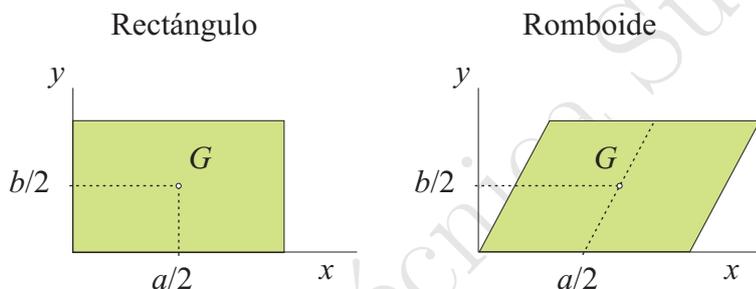
Para cuerpos homogéneos el centro de masas coincide con el centro geométrico. Si además los cuerpos presentan alguna simetría es posible reducir el cálculo de las propiedades de inercia teniendo en cuenta esas propiedades.

Aplicación de las Simetrías a la determinación del centro de masas. Teoremas de Pappus-Guldin.

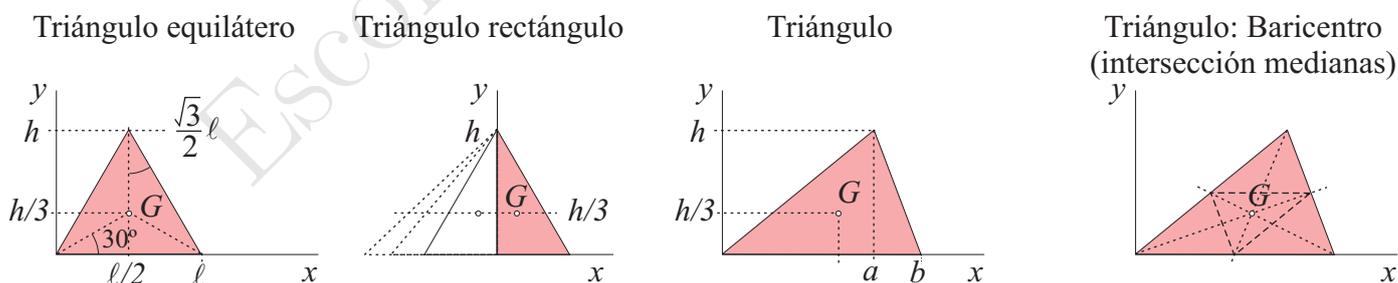
Las simetrías simplifican enormemente la determinación del centro de masas de una distribución. Aplicaremos aquí las reglas del apartado 5.5.

Aplicación al centro de masas

Rectángulo: el centro geométrico se encuentra en la intersección de los dos ejes de simetría. Eso sigue siendo válido para el romboide.



Triángulo: el centro geométrico de un triángulo equilátero se encuentra a un tercio de la altura, $h/3$. El triángulo equilátero se divide en dos triángulos rectángulos iguales por lo que su centro de masa sigue estando a $h/3$. Este triángulo se puede escalar a lo largo del eje x sin que esto afecte a la altura de G . Un triángulo cualquiera se puede dividir en dos triángulos rectángulos por lo que su centro de masas sigue estando a $h/3$. Se puede seguir un razonamiento similar para demostrar que G coincide con el *baricentro*, el punto de intersección de las líneas que unen cada vértice con el centro del lado opuesto.



Otra forma de determinar la altura del centro de masas de un triángulo rectángulo es con el Teorema de Pappus-Guldin, el volumen generado es un cono de radio igual a la altura del triángulo $R = h$, y altura igual a la base $H = a$, entonces,

$$y_G = \frac{Vol}{2\pi A} = \frac{\frac{1}{3} \pi R^2 H}{2\pi \frac{1}{2} ah} = \frac{h}{3}$$

Cuadrante de circunferencia: el centro geométrico se determina con el Teorema de Pappus-Guldin, la superficie generada es la de una semiesfera,

$$y_G = \frac{A}{2\pi L} = \frac{\frac{1}{2} 4\pi r^2}{2\pi \frac{1}{4} 2\pi r} = \frac{2r}{\pi}$$

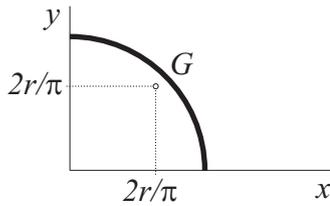


Cuadrante de círculo: el centro geométrico se determina con el Teorema de Pappus-Guldin, el volumen generado es una semiesfera,

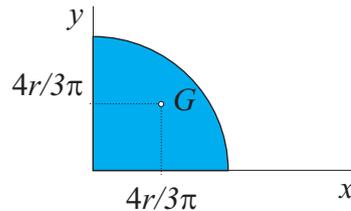
$$y_G = \frac{Vol}{2\pi A} = \frac{\frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi r^3}{2\pi \frac{1}{4} \pi r^2} = \frac{4r}{3\pi}$$

El resultado del círculo se extiende a una elipse aplicando el factor de escala adecuado a cada eje, así, la elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ se convierte en el círculo de radio 1, $X^2 + Y^2 = 1$.

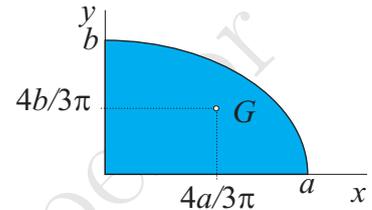
Cuadrante de circunferencia



Cuadrante de círculo



Cuadrante de Elipse



Superficie con simetría de revolución: si la curva generatriz es $\rho = \rho(z)$ la coordenada z del centro geométrico se determina por integración pero proyectando la masa sobre el eje z ,

$$z_G = \frac{\int z dA}{\int dA} = \frac{\int_{z_1}^{z_2} z \rho \sqrt{1 + (\rho')^2} dz}{\int_{z_1}^{z_2} \rho \sqrt{1 + (\rho')^2} dz}$$

Ejemplo. Superficie cónica de radio r y altura h con el vértice en el origen. La curva generatriz es $\rho = (r/h)z$ y por tanto,

$$z_G = \frac{\int_0^h z \frac{rz}{h} \sqrt{1 + (r/h)^2} dz}{\int_0^h \frac{rz}{h} \sqrt{1 + (r/h)^2} dz} = \frac{\frac{r}{h} \sqrt{1 + (r/h)^2} \frac{h^3}{3}}{\frac{r}{h} \sqrt{1 + (r/h)^2} \frac{h^2}{2}} = \frac{2h}{3}$$

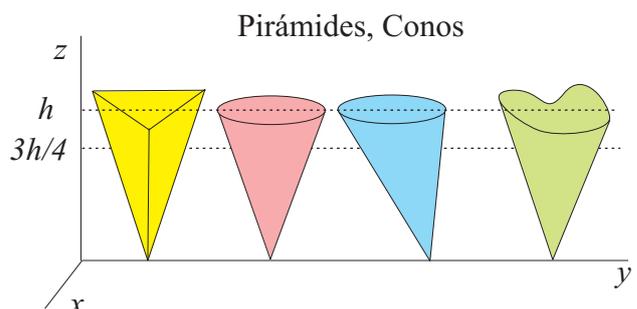
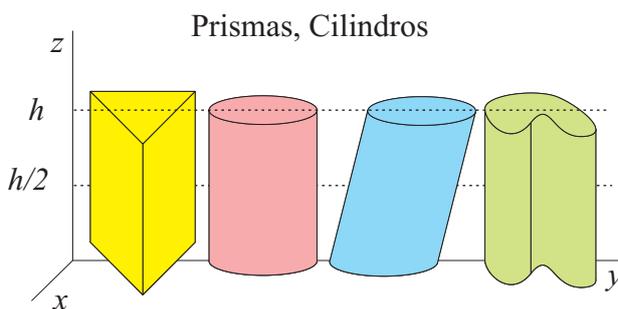
Cuerpo de simetría de revolución: si la curva generatriz es $\rho = \rho(z)$ la coordenada z del centro geométrico se determina por integración pero proyectando la masa sobre el eje z ,

$$z_G = \frac{\int z dV}{\int dV} = \frac{\int_{z_1}^{z_2} z \rho^2 dz}{\int_{z_1}^{z_2} \rho^2 dz}$$

Ejemplo. Volumen cónico de radio r y altura h con el vértice en el origen. La curva generatriz es $\rho = (r/h)z$ y por tanto,

$$z_G = \frac{\int_0^h z \left(\frac{rz}{h}\right)^2 dz}{\int_0^h \left(\frac{rz}{h}\right)^2 dz} = \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = \frac{3h}{4}$$

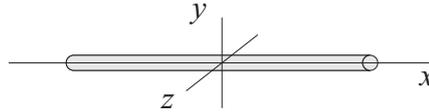
Este resultado es generalizable a todos los tipos de conos y de pirámides cuyas secciones varían cuadráticamente con la altura, $A(z) = A_0 \left(\frac{z}{h}\right)^2$ que conduce a $z_G = 3h/4$.



Aplicación al tensor de inercia

Barra de longitud ℓ : el centro geométrico se encuentra en el punto medio. Tomando el origen en ese punto y el eje Ox en la dirección de la barra (simetría de revolución) tenemos que $I_x = 0$ y en las direcciones perpendiculares,

$$I_y = I_z = \int x^2 dm = \frac{m}{\ell} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} x^2 dx = \frac{1}{12} m \ell^2$$



Trasladando el origen al extremo de la barra se obtiene el valor $\frac{1}{3} m \ell^2$.

Cuadrante de circunferencia de radio r : tomando el origen en el centro de la circunferencia los momentos de inercia para los ejes coinciden $I_x = I_y$ y se obtiene del momento polar,

$$J = \int r^2 dm = m r^2 = I_x + I_y \Rightarrow I_x^O = I_y^O = \frac{1}{2} m r^2$$

El producto de inercia debe calcularse por integración que se realiza fácilmente en coordenadas polares,

$$P_{xy}^O = \int xy dm = \frac{m}{L} \int xy dl = \frac{m}{L} \int_0^{\pi/2} r \cos \theta r \sin \theta r d\theta = \frac{1}{\pi} m r^2$$

Arco de circunferencia de radio r y ángulo 2α : tomando el origen en el centro de la circunferencia y el eje x según la bisectriz del arco, se tiene que $y_G = 0$ mientras que la coordenada x se obtiene por integración en coordenadas polares,

$$x_G = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{L} \int_{-\alpha}^{+\alpha} r \cos \theta r d\theta = \frac{\sin \alpha}{\alpha} r$$

Los momentos de inercia se obtienen de forma similar

$$I_x^O = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{4\alpha} m r^2$$

$$I_y^O = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{4\alpha} m r^2$$

y como el eje Ox es ejes de simetría el producto de inercia es cero, $P_{xy}^O = 0$.

Sector circular de radio r y ángulo 2α : se procede de forma similar al caso anterior pero realizando la integral doble,

$$x_G = \frac{1}{m} \int x dm = \frac{1}{A} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \int_0^r \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta = \frac{2 \sin \alpha}{3\alpha} r$$

Las componentes del tensor de inercia resultan

$$I_x^O = \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{8\alpha} m r^2$$

$$I_y^O = \frac{2\alpha + \sin 2\alpha}{8\alpha} m r^2$$

$$P_{xy}^O = 0$$

Círculo de radio r : los momentos de inercia se obtienen del caso anterior para $\alpha = \pi$,

$$I_x^O = I_y^O = \frac{1}{4} m r^2$$



Cuadrante de círculo de radio r : Los momentos del cuadrante de círculo respecto de los ejes que lo delimitan tienen la misma expresión que los de la círculo completo ya que podemos considerar al círculo formado por 4 cuadrantes con los mismos momentos de inercia y entonces

$$I_x^{\text{cuadrante}} = \frac{1}{4} I_x^{\text{círculo}} = \frac{1}{4} \frac{1}{4} m_{\text{círculo}} r^2 = \frac{1}{16} 4m_{\text{cuadrante}} r^2 \Rightarrow I_x^O = I_y^O = \frac{1}{4} m r^2$$

El producto de inercia se puede obtener a partir de los resultados del sector circular con $\alpha = \pi/4$ que nos proporciona los momentos principales,

$$I_1 = \frac{\pi - 2}{4\pi} m r^2$$

$$I_2 = \frac{\pi + 2}{4\pi} m r^2$$

y utilizando el Círculo de Mohr, el producto de inercia para los ejes Oxy que tienen momentos de inercia iguales se obtiene de la mitad de la diferencia de los momentos principales

$$P_{xy}^O = \frac{I_2 - I_1}{2} = \frac{1}{2} \frac{(\pi + 2) - (\pi - 2)}{4\pi} m r^2 = \frac{1}{2\pi} m r^2$$

Cuadrante elíptico de semiejes a y b : los resultados se obtienen del caso circular aplicando un factor de escala diferente a cada eje,

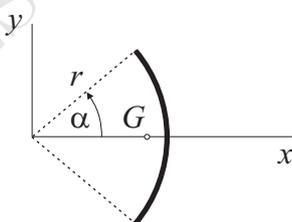
$$\int y^2 dm = b^2 \int \left(\frac{y}{b}\right)^2 dm = b^2 \frac{1}{4} m 1^2 \Rightarrow I_x^O = \frac{1}{4} m b^2$$

$$\int x^2 dm = a^2 \int \left(\frac{x}{a}\right)^2 dm = a^2 \frac{1}{4} m 1^2 \Rightarrow I_y^O = \frac{1}{4} m a^2$$

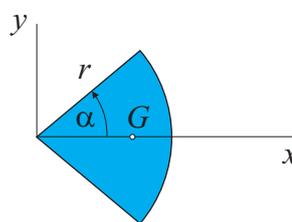
y el producto de inercia,

$$P_{xy}^O = \frac{1}{4} m \frac{a^2 + b^2}{\pi}$$

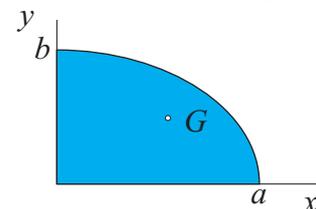
Arco de circunferencia



Sector circular



Cuadrante de Elipse



Rectángulo de lados a y b : Los momentos de inercia se obtienen de los de la barra ya que la proyección del rectángulo a lo largo de cada eje da lugar a una distribución lineal,

$$I_x = \frac{1}{12} m b^2 \quad I_y = \frac{1}{12} m a^2$$

al tratarse de una placa plana el momento de inercia para el eje normal es la suma del de los ejes del plano,

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Triángulo rectángulo de base a y altura b : Los momentos de inercia se obtienen de los del rectángulo utilizando el teorema de Steiner,

$$I_x^G + m \left(\frac{b}{3}\right)^2 + I_x^G + m \left(\frac{2b}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} 2mb^2 \Rightarrow I_x^G = \frac{1}{18} mb^2$$

La expresión para el eje Gy tiene la misma forma pero en ese caso la altura sería a

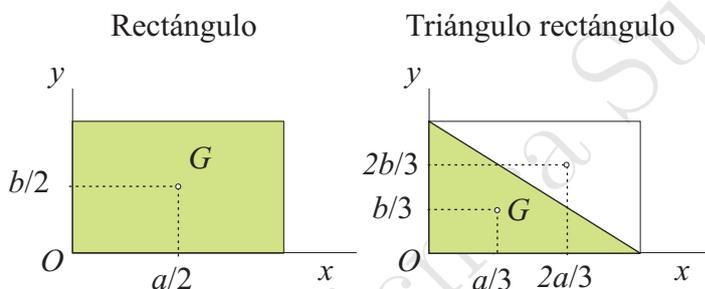
$$I_y^G = \frac{1}{18} ma^2$$

El producto de inercia se obtiene nuevamente con el teorema de Steiner,

$$P_{xy}^G + m \frac{b}{3} \frac{a}{3} + P_{xy}^G + m \frac{2b}{3} \frac{2a}{3} = 2m \frac{b}{2} \frac{a}{2} \Rightarrow P_{xy}^G = -\frac{1}{36} mab$$

El tensor de inercia en O se obtiene aplicando el teorema de Steiner,

$$\mathbf{I}^O = \mathbf{I}^G + m \begin{pmatrix} b^2/4 & -ab/4 \\ -ab/4 & a^2/4 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} b^2/6 & -ab/12 \\ -ab/12 & a^2/6 \end{pmatrix}$$



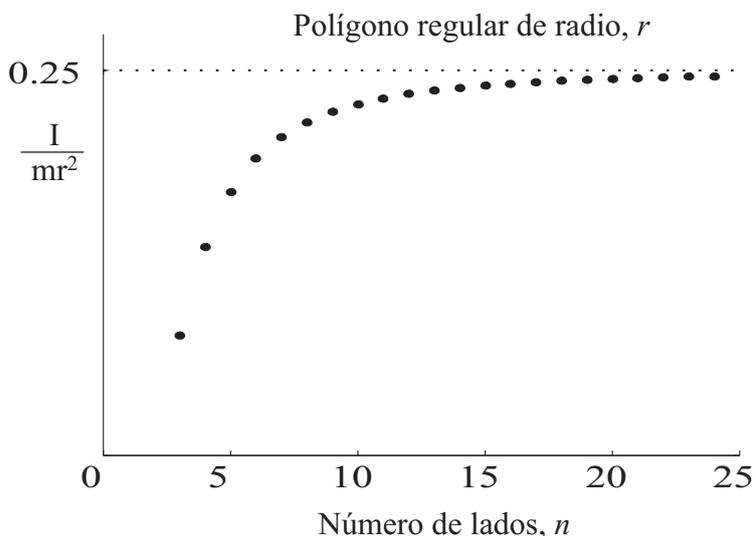
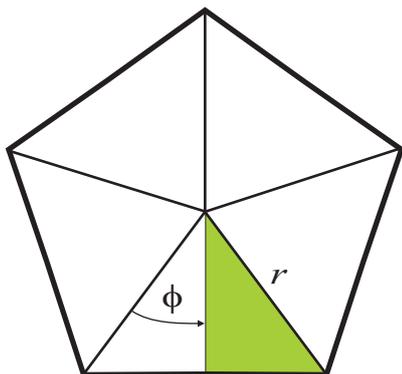
Polígono regular de n lados y radio r : Eligiendo el origen O en el centro del polígono, y teniendo en cuenta la simetría de orden n , todas los ejes del plano que pasan por O son principales y por ello $I_x^O = I_y^O = \frac{1}{2} I_z^O$. Para determinar I_z^O descomponemos el polígono en $2n$ triángulos rectángulos de lados $a = 2r \sin \phi$ y $b = r \cos \phi$ donde $\phi = \pi/n$. Todos estos triángulos tienen el mismo valor I_z^O y esa expresión valdrá también al polígono sustituyendo la masa del primero por la del segundo. Entonces, utilizando los resultados del caso anterior y el teorema de Steiner, se tiene,

$$I_z^O = I_x^O + I_y^O = \frac{1}{18} mb^2 + m \left(\frac{2b}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} m \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} mb^2 + \frac{1}{24} ma^2 = \frac{mr^2}{6} \left[1 + 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

y finalmente, para el polígono,

$$I_x^O = I_y^O = \frac{mr^2}{12} \left[1 + 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{n}\right)\right]$$

Nótese que cuando el número de lados n tiende a infinito se obtiene el resultado del círculo $I_x^O = I_y^O = \frac{1}{4} mr^2$.





Paralelepípedo de lados a , b y c : Eligiendo un sistema $Gxyz$ con origen el en centro del cuerpo y ejes perpendiculares a las caras, los tres planos cartesianos son de simetría y sus normales direcciones principales, por tanto,

$$P_{xy}^G = P_{xz}^G = P_{yz}^G = 0$$

Los momentos de inercia se calculan proyectando la distribución de masas en cada uno de las planos obteniéndose rectángulos y entonces,

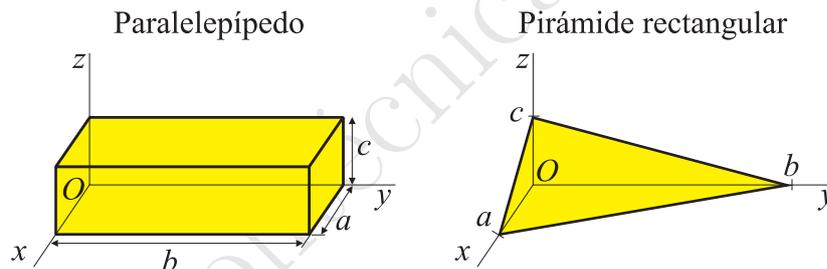
$$I_x^G = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$

$$I_y^G = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2)$$

$$I_z^G = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

Tomando el origen O en un vértice del cuerpo (véase figura) se tiene,

$$\mathbf{I}^O = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 4(b^2 + c^2) & -3ab & -3ac \\ -3ab & 4(a^2 + c^2) & -3bc \\ -3ac & -3bc & 4(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$



Pirámide rectangular de catetos a , b y c : La integral de volumen resulta,

$$V = \int dV = \int_0^a dx \int_0^{b(1-x/a)} dy \int_0^{c(1-x/a-y/b)} dz = \frac{1}{6} abc$$

El centro de masas se encuentra en $(a/4, b/4, c/4)$ y los elementos del tensor de inercia en el vértice O de los tres lados perpendiculares,

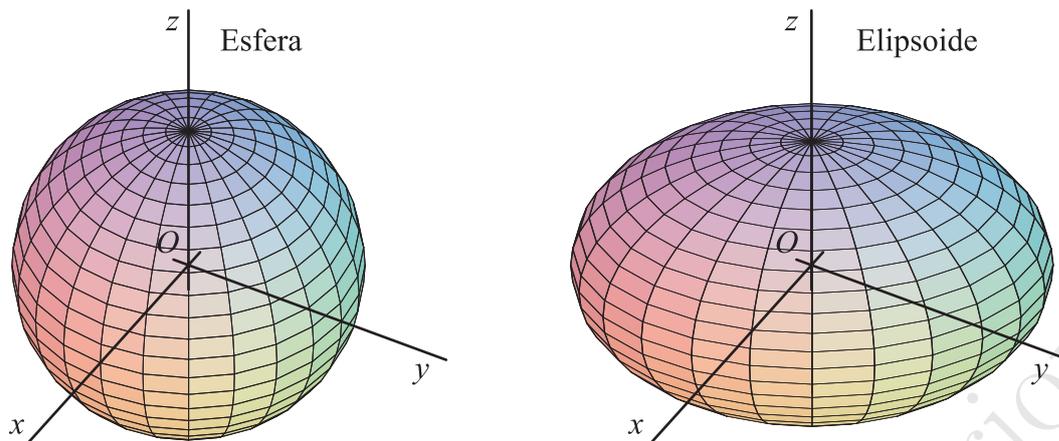
$$\mathbf{I}^O = \frac{m}{20} \begin{pmatrix} 2(b^2 + c^2) & -ab & -ac \\ -ab & 2(a^2 + c^2) & -bc \\ -ac & -bc & 2(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

y en el centro de masas

$$\mathbf{I}^G = \frac{m}{80} \begin{pmatrix} 3(b^2 + c^2) & -ab & -ac \\ -ab & 3(a^2 + c^2) & -bc \\ -ac & -bc & 3(a^2 + b^2) \end{pmatrix}$$

Esfera de radio R : Eligiendo el origen en el centro de la esfera, todas las direcciones son principales y por tanto los momentos de inercia son todos iguales y su valor se puede calcular a partir del momento polar,

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} \int r^2 dm = \frac{2}{3} \frac{m}{V} \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr = \frac{2}{3} \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi \frac{R^5}{5} dr = \frac{2}{5} mR^2$$



Elipsoide de semiejes a, b y c : Se obtiene a partir de la esfera reescalando los ejes,

$$I_x^G = \frac{1}{5} m (b^2 + c^2)$$

$$I_y^G = \frac{1}{5} m (a^2 + c^2)$$

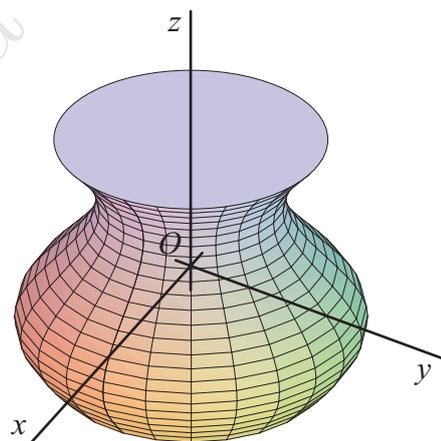
$$I_z^G = \frac{1}{5} m (a^2 + b^2)$$

Cuerpo de simetría de revolución: si la curva generatriz es $\rho = \rho(z)$ eligiendo un sistema con origen O en el eje de simetría solo se necesitan dos integrales:

$$\int z^2 dm = \frac{m}{V} \int z^2 dV = \frac{m}{V} \int_{z_1}^{z_2} z^2 \pi \rho^2 dz$$

y

$$\int x^2 dm = \int y^2 dm = \frac{1}{2} \int \rho^2 dm = \frac{1}{2} \int dI_z = \frac{m}{2V} \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{2} \pi \rho^4 dz$$



Cilindro de radio R y altura H : Eligiendo un sistema $Gxyz$ con origen en el centro y con z según el eje del cilindro. La primera integral se puede hacer proyectando la masa sobre el eje z obteniéndose una distribución lineal uniforme, entonces,

$$\int z^2 dm = \frac{1}{12} m H^2$$

En la segunda proyectando sobre el plano Oxy se obtiene un círculo uniforme y entonces

$$\int \rho^2 dm = \frac{1}{2} m R^2$$

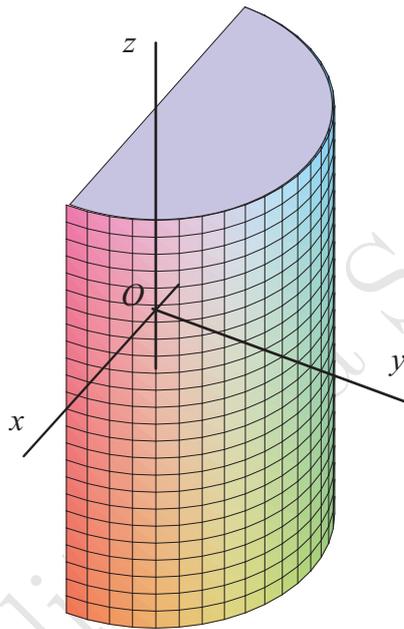


Entonces,

$$I_x^G = I_y^G = \frac{1}{2} \int \rho^2 dm + \int z^2 = \frac{1}{12} m (H^2 + 3R^2)$$

$$I_z^G = \int \rho^2 dm = \frac{1}{2} m R^2$$

Semicilindro de radio R y altura H : Elegimos un sistema $Oxyz$ con origen en el centro de la cara rectangular, con z según el eje del cilindro y estando situado el semicilindro en la región $y \geq 0$.



El centro de masas se encuentra sobre Oy a una distancia del origen que coincide con el centro de un semicírculo (proyección sobre el plano Oxy),

$$y_G = \frac{4r}{3\pi}$$

Como el cuerpo tiene dos planos de simetría Oxy y Oyz los tres ejes coordenados son principales en O . Además, si consideramos el cilindro completo formado por dos cuerpos: (1) con $y \geq 0$ y (2) con $y \leq 0$ y (2) se tiene,

$$I_z^{(1+2)} = \frac{1}{2} m_{(1+2)} R^2 = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = 2I_z^{(1)} \Rightarrow I_z^{(1)} = \frac{1}{2} m_{(1)} R^2$$

y de forma similar

$$\int^{(1+2)} z^2 dm = \frac{1}{12} m_{(1+2)} H^2 = 2 \int^{(1)} z^2 dm \Rightarrow \int^{(1)} z^2 dm = \frac{1}{12} m_{(1)} H^2$$

y entonces

$$\mathbf{I}^O = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} 3R^2 + H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3R^2 + H^2 & 0 \\ 0 & 0 & 6R^2 \end{pmatrix}$$

y en el centro de masas

$$\mathbf{I}^G = \frac{m}{36\pi^2} \begin{pmatrix} (9\pi^2 - 64)R^2 + 3\pi^2 H^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3\pi^2(3R^2 + H^2) & 0 \\ 0 & 0 & (18\pi^2 - 64)R^2 \end{pmatrix}$$

Cono de radio R y altura H : Eligiendo el origen en el vértice del cono, la curva generatriz es $\rho = Rz/H$ y por tanto,

$$\int z^2 dm = \frac{1}{12}mH^2 = \frac{m}{V} \int_0^H z^2 \pi \left(\frac{Rz}{H}\right)^2 dz = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{H^5}{5} = \frac{3}{5}mH^2$$

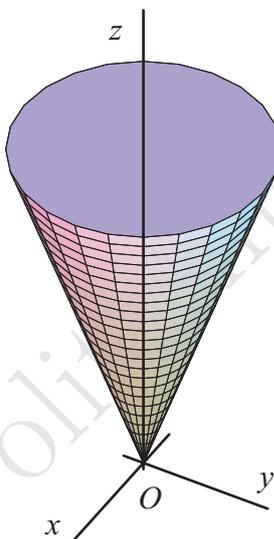
por otro lado,

$$\int \rho^2 dm = \frac{m}{V} \int_0^H \frac{1}{2}\pi \left(\frac{Rz}{H}\right)^4 dz = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \frac{1}{2}\pi \left(\frac{R}{H}\right)^4 \frac{H^5}{5} = \frac{3}{10}mR^2$$

Entonces,

$$I_x^O = I_y^O = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mH^2$$

$$I_z^O = \int \rho^2 dm = \frac{3}{10}mR^2$$



El centro de masas se encuentra en $z_G = 3H/4$ y entonces $I_x^G = I_y^G = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{80}mH^2$.

Para un diámetro de la base se utiliza de nuevo el teorema de Steiner y resulta $I^{\text{diam}} = \frac{3}{20}mR^2 + \frac{1}{10}mH^2$.

Paraboloide de revolución de radio R y altura H : tiene por ecuación $(x^2 + y^2)/R^2 = z/H$ por lo que la curva generatriz es $\rho = R\sqrt{z}/H$. Procediendo de la misma manera que para el cono se tiene:

$$\int z^2 dm = \frac{1}{12}mH^2 = \frac{m}{V} \int_0^H z^2 \pi \left(\frac{Rz}{H}\right)^2 dz = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \pi \left(\frac{R}{H}\right)^2 \frac{H^5}{5} = \frac{3}{5}mH^2$$

por otro lado,

$$\int \rho^2 dm = \frac{m}{V} \int_0^H \frac{1}{2}\pi \left(\frac{Rz}{H}\right)^4 dz = \frac{m}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \frac{1}{2}\pi \left(\frac{R}{H}\right)^4 \frac{H^5}{5} = \frac{3}{10}mR^2$$

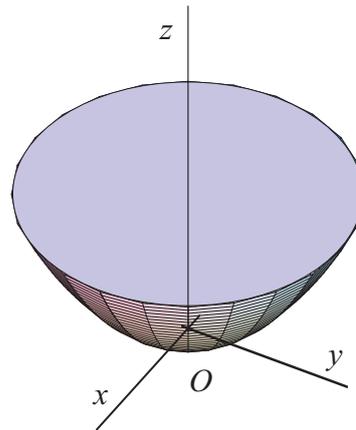
Entonces,

$$z_G = \frac{2}{3}h$$

$$I_x^O = I_y^O = \frac{1}{6}mR^2 + \frac{1}{2}mH^2$$

$$I_z^O = \frac{1}{3}mR^2$$

mientras que en el centro de masas $I_x^G = I_y^G = \frac{1}{6}mR^2 + \frac{1}{18}mH^2$.

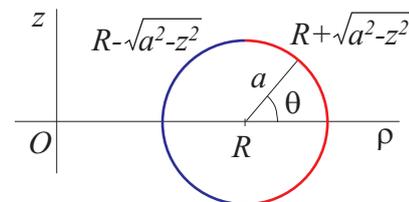
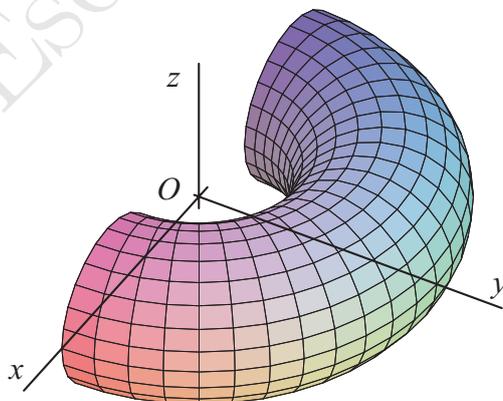


Paraboloide elíptico de semiejes a y b y altura H : $(x/a)^2 + (y/b)^2 = z/H$ aplicando un factor de escala a cada eje la elipse se convierte en círculo,

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{2}{3}h \\ I_x^O &= \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{2}mH^2 \\ I_y^O &= \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}mH^2 \\ I_z^O &= \frac{1}{6}m(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Semitoro de radios R y a : tiene por ecuación $(x^2 + y^2) - R^2 + z^2 = a^2$ con $y \geq 0$. Es la mitad de un cuerpo de revolución por lo que los momentos de inercia se pueden obtener a partir de los de la figura completa. Para tratarlo de esta forma la curva generatriz sería la circunferencia de radio a que habría que hacer en dos partes,

$$\int dV = \int_{-a}^{+a} \pi \left(R + \sqrt{a^2 - z^2} \right)^2 dz - \int_{-a}^{+a} \pi \left(R - \sqrt{a^2 - z^2} \right)^2 dz$$



También es posible hacer las integrales en coordenadas cilíndricas o utilizando la coordenada cilíndrica φ y unas coordenada polares desde el centro del círculo (véase figura), en ese caso, $\rho = R + r \cos \theta$ y $z = r \sin \theta$, siendo la integral de volumen

$$\int_0^a dr \int_0^{2\pi} r d\theta \int_0^\pi \rho d\varphi = \pi^2 R a^2$$

El resultado final es,

$$y_G = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$$
$$I_x^O = I_y^O = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{5}{8}ma^2$$
$$I_z^O = mR^2 + \frac{3}{4}ma^2$$
$$P_{xy}^O = P_{xz}^O = P_{yz}^O = 0$$

Escuela Politécnica Superior



6. Equilibrio del sólido rígido

- 6.1 Equilibrio del sólido rígido libre.
- 6.2 Principio del trabajo virtual. Aplicación a la estática.
- 6.3 Energía potencial y criterios de estabilidad del equilibrio.

Introducción

Estudiaremos en este tema los dos métodos (vectorial y analítico) que permiten establecer las condiciones de equilibrio de un sistema, centrándonos en el caso particular del sólido rígido.

En el apéndice se recuerdan algunos conceptos y resultados explicados en el curso de Física 1.

6.1. Equilibrio del sólido rígido libre

La dinámica del sólido rígido establece como condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un sólido rígido:

$$\text{Equilibrio del sólido rígido} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases}$$

Comentarios:

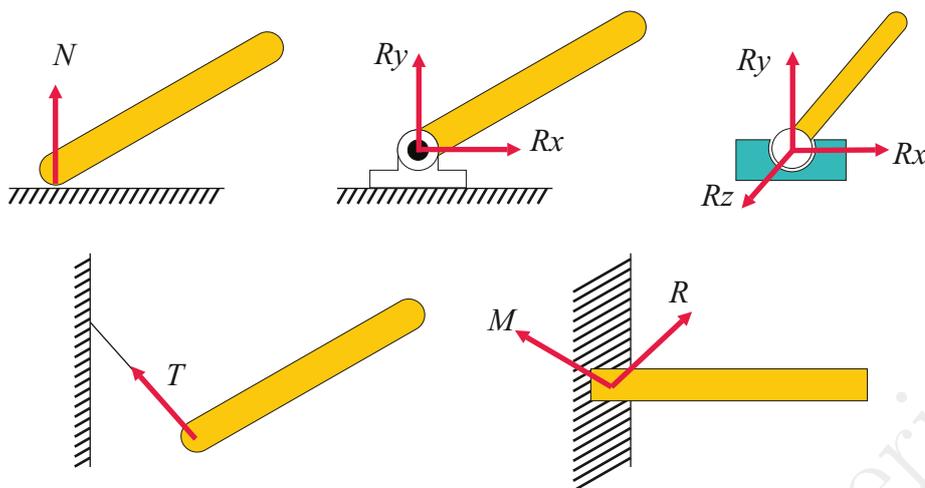
1. Como $\vec{R} = 0$, el momento no depende del origen que tomemos $\vec{M}_P = \vec{M}_O = \vec{M}$ y puede utilizarse el sistema de coordenadas que mejor convenga (inercial).
2. Las fuerzas pueden deslizarse sin que cambie \vec{R} ni \vec{M} .
3. Hay 6 ecuaciones de equilibrio ($R_x = 0 = R_y = R_z = M_x = M_y = M_z$) que se corresponden con los 6 grados de libertad del sólido rígido.
4. Podemos olvidarnos de las fuerzas interiores. Además, en general no sería fácil determinarlas. Eso es el objetivo de la Elasticidad.
5. Para cuerpos planos, el n° de grados de libertad es 3, 2 de movimiento de traslación y 1 de rotación. Consecuentemente el n° de ecuaciones de equilibrio es también 3: $R_x = 0 = R_y = M_z$.

6.1.1. Equilibrio de Sólidos Ligados: Principio de liberación

Es muy frecuente el caso en que existan varios sólidos enlazados o ligados. Para poder aplicar las ecuaciones de la estática a sólidos enlazados es necesario aislar cada uno de ellos suprimiendo el enlace y sustituyendo su efecto por unas fuerzas y momentos adecuados, *Principio de Liberación*. Estas fuerzas se denominan fuerzas de ligadura o reacciones y serán incógnitas a resolver.

Las ligaduras más habituales

- Apoyo simple: \vec{R} es normal a la tangente común; $\vec{R} \geq 0$.
- Articulación Plana: \vec{R} tiene 2 componentes.
- Articulación Esférica: \vec{R} tiene 3 componentes.
- Cable: R tiene 1 componente, tensión, además de ser paralela al hilo es siempre hacia afuera.
- Empotramiento: La reacción será una fuerza (3 componentes) y un momento (3 componentes)



Comentarios:

- Las reacciones son desconocidas y deberán determinarse con las ecuaciones de equilibrio.
- El número de ecuaciones de equilibrio es igual al número de grados de libertad.
- Llamando grado de estaticidad al número de componentes de las reacciones a determinar, si:

Movilidad	G. Estat. < G. Libertad	Estáticamente determinado
Inmovilidad total	G. Estat. = G. Libertad	
	G. Estat. > G. Libertad	Estát. Indeterminado

- Si el sistema está formado por sólidos rígidos enlazados, cada subsistema que aísle tendrá a $\vec{R} = 0$ y $\vec{M} = 0$ como condición necesaria (en general no suficiente) de equilibrio. Sin embargo, el número de ecuaciones de equilibrio independientes seguirá siendo igual al número de grados de libertad del conjunto de sólidos.

6.2. Principio del trabajo virtual. Aplicación a la estática.

Hasta ahora hemos analizado el equilibrio de un sistema ligado aislándolo y escribiendo las ecuaciones vectoriales de equilibrio para cada componente como si fuera libre. Este método se suele utilizar cuando la posición de equilibrio es conocida y se quiere determinar el valor de alguna fuerza que se desconoce. Sin embargo, en muchas situaciones nos encontramos con sólidos ligados cuyas partes pueden moverse unas respecto de las otras de manera que son posibles varias configuraciones de equilibrio. En estos casos el método vectorial, aunque válido, no suele ser el más adecuado para resolver el problema.

Un método alternativo basado una magnitud escalar, el trabajo, es más útil; proporciona una visión más profunda del comportamiento de los sistemas mecánicos y permite además analizar la estabilidad de los sistemas en equilibrio. Este método se denomina *método del trabajo virtual*.

Definimos en primer lugar algunos conceptos:

- Desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_\alpha$: Es un desplazamiento infinitesimal de la partícula α compatible con las ligaduras. El término virtual debe entenderse como que es un movimiento hipotético del sistema que no tiene porque coincidir con el movimiento que realiza realmente (si el sistema está en equilibrio no realizaría ninguno).
- Trabajo virtual δW : Es el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento virtual, $\delta \vec{r}_\alpha$.

**Principio del trabajo virtual** ⁴

Un sistema está en equilibrio cuando, para cualquier desplazamiento virtual, el trabajo realizado por las fuerzas que actúan es nulo:

$$\text{EQUILIBRIO} \Leftrightarrow \delta W = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0 \quad \forall \delta \vec{r}_{\alpha}$$

Coordenadas generalizadas.

Para un sistema con ligaduras los desplazamientos de sus partículas no son independientes y por tanto las coordenadas utilizadas para definir la posición del sistema tampoco lo son. Sea S el número de grados de libertad de un sistema, definimos entonces:

Coordenadas generalizadas: Conjunto de variables $\{q_1, \dots, q_S\}$ independientes entre sí, que definen unívocamente la posición del sistema, es decir,

$$\vec{r}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha}(q_1, \dots, q_S)$$

Fuerza generalizada: El desplazamiento virtual y el trabajo virtual se expresan en función de las coordenadas generalizadas como

$$\delta \vec{r}_{\alpha} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \delta q_j$$

y

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} \cdot \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \delta q_j$$

y así, denominamos *fuerza generalizada* Q_j asociada a la coordenada generalizada q_j a:

$$Q_j = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j}$$

De manera que, en función de las coordenadas y fuerzas generalizadas, el trabajo virtual puede escribirse:

$$\delta W = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j$$

y dado que los desplazamientos de las coordenadas generalizadas son independientes, el principio del trabajo virtual queda:

$$\text{EQUILIBRIO} \Leftrightarrow \delta W = 0, \forall \delta q_j \Leftrightarrow Q_j = 0, \forall j$$

6.3. Energía potencial y criterios de estabilidad del equilibrio.

Decimos que un sistema de partículas es conservativo si la fuerza que actúa sobre cada una de las partículas es conservativa: $\forall \alpha, \vec{F}_{\alpha} = -\vec{\nabla}_{\alpha} V$, siendo V una función escalar que depende únicamente de las posiciones de las partículas, $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{\alpha}, \dots)$, el *potencial* o *energía potencial* del sistema.

El trabajo en un sistema conservativo es :

$$dW = \sum_{\alpha=1}^N -\vec{\nabla}_{\alpha} V \cdot d\vec{r}_{\alpha} = - \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_{\alpha}} dx_{\alpha} + \frac{\partial V}{\partial y_{\alpha}} dy_{\alpha} + \frac{\partial V}{\partial z_{\alpha}} dz_{\alpha} \right) = -dV$$

⁴Se puede tomar como un principio si se considera la estática de forma aislada si no, el equilibrio no es más que una solución particular de movimiento.

y dado que las fuerzas generalizadas se pueden escribir en función del potencial como:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

las posiciones de equilibrio corresponderán a los valores estacionarios de V . De manera que la condición necesaria y suficiente para que un sistema conservativo esté en equilibrio es:

$$EQUILIBRIO \Leftrightarrow \delta W = 0, \forall \delta \vec{r}_\alpha \Leftrightarrow Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \forall j$$

6.3.1. Estabilidad del equilibrio.

El potencial permite además analizar la *estabilidad de las posiciones de equilibrio*. El concepto de estabilidad en un sistema dinámico se refiere a los estados del sistema en los que una pequeña variación en las condiciones iniciales produce estados que se mantienen próximos para cualquier tiempo posterior (es la llamada estabilidad Liapunov). En lo que se refiere a una condición de equilibrio la estabilidad consiste en garantizar que ante pequeñas perturbaciones respecto de la posición de equilibrio el movimiento se mantiene próximo a dicha configuración en el futuro. La relación entre el potencial y la estabilidad es la siguiente:

- Las posiciones de equilibrio correspondientes a un mínimo de V son posiciones de equilibrio estable.
- Las posiciones correspondientes a un máximo de V son posiciones de equilibrio inestable.

Nota. Para determinar si una función de varias variables $V(q_1, \dots, q_S)$ tiene un máximo o mínimo local puede utilizarse la matriz Hessiana. La matriz Hessiana es una matriz simétrica cuyos elementos son las segundas derivadas parciales,

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_S} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_S} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial q_S \partial q_1} & \frac{\partial^2 V}{\partial q_S \partial q_2} & \cdots & \frac{\partial^2 V}{\partial q_S^2} \end{bmatrix}$$

Se cumple que:

- Si la matriz H es definida positiva (todos su autovalores son positivos), V tiene un mínimo.
- Si la matriz H es definida negativa (todos su autovalores son negativos), V tiene un máximo.

Si llamamos Δ_k al determinante del k -ésimo menor principal de H ,

$$\Delta_1 = |H_{11}| \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{k1} & \cdots & H_{kk} \end{vmatrix} \quad \cdots \quad \Delta_S = |H|$$

se cumple (criterio de Silvester)

- H es definida positiva sí, y solo sí, $\Delta_k > 0$ para $1 \leq k \leq S$.
- H es definida negativa sí, y solo sí, $(-1)^k \Delta_k > 0$ para $1 \leq k \leq S$.

Apéndice: Repaso de Física 1.

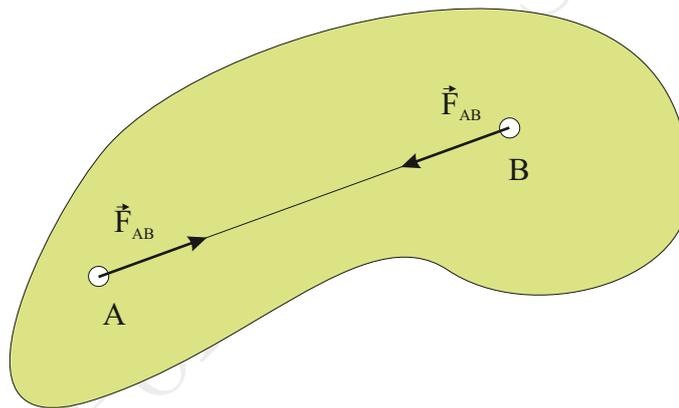
Un sistema material está en **equilibrio** si abandonado en reposo en un sistema inercial, sus partículas no toman ningún movimiento.

Para el caso de una **partícula**, la segunda ley de Newton determina la condición necesaria y suficiente de equilibrio; es decir, ausencia de fuerza. Dado el carácter vectorial de la fuerza, la condición de equilibrio también se cumple si la resultante de las fuerzas que actúan es nula $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0$.

Las fuerzas que actúan sobre los puntos de un **sistema** material pueden clasificarse en dos tipos:

- **Fuerzas internas**, cuya presencia es debida a la interacción mutua entre las partículas que integran el sistema material.
- **Fuerzas externas**, originadas por interacciones ajenas al sistema material considerado.

Las fuerzas internas entre dos puntos son iguales y opuestas y dirigidas a lo largo de la recta que los une ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \parallel \vec{r}_{AB}$).



Como consecuencia, la resultante y el momento resultante de las fuerzas internas que actúan entre cada pareja de puntos se anula,

$$\begin{aligned}\vec{F}_{AB} + \vec{F}_{BA} &= 0 \\ \vec{r}_A \times \vec{F}_{AB} + \vec{r}_B \times \vec{F}_{BA} &= 0\end{aligned}$$

y entonces el conjunto de todas las fuerzas internas en un sistema material constituye un sistema nulo,

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{F}_i^{int} = 0 &\Rightarrow \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i^{ext} \\ \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int} = 0 &\Rightarrow \vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}\end{aligned}$$

Dado que el equilibrio de un sistema exige que cada uno de sus puntos esté en equilibrio, y teniendo en cuenta lo precisado para las fuerzas interiores, se deduce que para que un sistema material se encuentre en equilibrio es condición necesaria que el conjunto de las fuerzas externas constituya un sistema nulo:

$$\text{Equilibrio del sistema} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases}$$

Esta condición es en general **necesaria, pero no suficiente**. En el caso de sistemas no rígidos se requieren más ecuaciones que pueden obtenerse a partir de las propiedades del material (Teoría de la Elasticidad).

Distribución de momentos

Recordaremos aquí algunas de las propiedades generales de la distribución de momentos de vectores deslizantes, aplicables en su totalidad al caso de las fuerzas sobre sistemas rígidos.

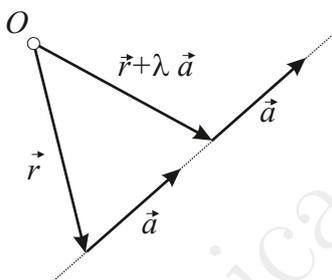
El *momento central de un vector* \vec{a} respecto de un punto O es el producto vectorial del vector que va desde O al origen del vector \vec{a} por el propio vector \vec{a} ,

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{a}$$

Propiedades:

1. Es compatible con la definición de vector deslizante. \vec{M}_O no cambia si desplazamos \vec{a} a lo largo de su recta de acción.

$$(\vec{r} + \lambda \vec{a}) \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a} + \lambda \vec{a} \times \vec{a} = \vec{M}_O$$



2. Ley de cambio de origen:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O - \vec{OO'} \times \vec{a}$$

3. las componentes de \vec{M}_O no son todas independientes de las de \vec{a} porque se cumple siempre que:
 $\vec{M}_O \cdot \vec{a} = 0$
4. Conocido un vector y su momento, se conoce la recta soporte.

Para un sistema de vectores deslizantes $\{\vec{a}_i, i = 1, \dots\}$ con origen en $\{\vec{r}_i, i = 1, \dots\}$, llamaremos:

- RESULTANTE a la suma de todos los vectores como si fueran libres:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{a}_i$$

- MOMENTO RESULTANTE a la suma de los momentos centrales de cada vector tomados desde el mismo punto:

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

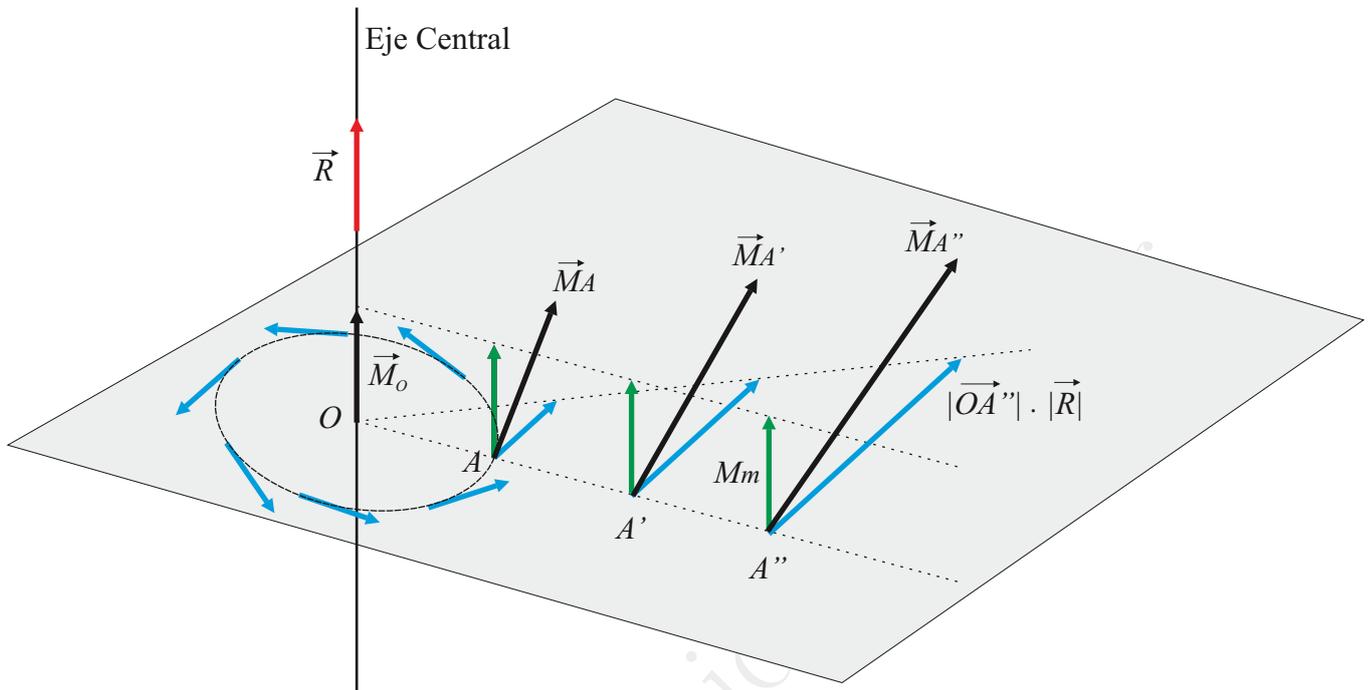
La ley del cambio de origen para un sistema será:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O - \vec{OO'} \times \vec{R}$$

A partir de la ecuación $\vec{M}_A = \vec{M}_O - \vec{OA} \times \vec{R}$ puede verse que la distribución de momentos alrededor del eje central (recta de punto con momento paralelo a la resultante) presenta una forma helicoidal, como se aprecia en la figura:

- si movemos el origen paralelamente a \vec{R} , \vec{M} no cambia
- si nos movemos en dirección normal a \vec{R} , la componente del momento paralela a \vec{R} permanece fija e igual a M_{\min} , mientras que la componente perpendicular a \vec{R} aumenta proporcionalmente con la distancia al eje central: $|\vec{OA}| \cdot |\vec{R}|$

- $|\vec{M}|$ es constante en superficies cilíndricas alrededor del eje central.



Analogía con la rotación. La ley de cambio de origen del momento tiene exactamente la misma forma que la ley de distribución de velocidades en un sólido rígido por lo que se pueden hacer las siguientes analogías:

distribución de momentos en un sólido rígido	distribución de velocidades en un sólido rígido
$\vec{M}_A = \vec{M}_O + \vec{R} \times \vec{OA}$	$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OA}$
momento resultante en A, \vec{M}_A	\vec{v}_A , velocidad de A
fuerza resultante, \vec{R}	$\vec{\omega}$, velocidad de rotación
momento mínimo, M_{\min}	v_d , velocidad de deslizamiento mínimo
eje central	eje instantáneo de rotación

7. Equilibrio de hilos

- 7.1 Ecuación de equilibrio del hilo ideal.
- 7.2 Equilibrio bajo un sistema de fuerzas paralelas.
- 7.3 Hilo bajo la acción de su propio peso. Catenaria.

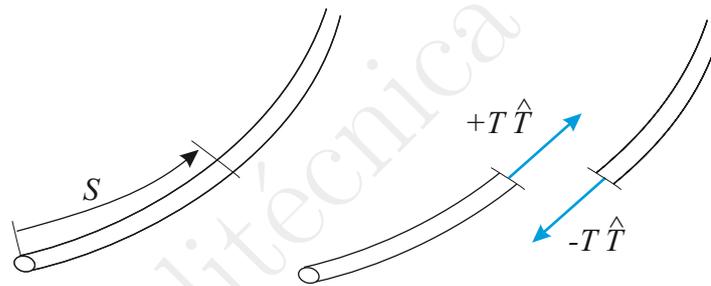
Introducción

Los cables son sólidos deformables con una sección mucho menor que su longitud. Cuando sobre ellos actúa una fuerza, alcanzan el equilibrio produciendo una tensión muy grande y flexionándose.

Se llama cable o *hilo ideal* al que no ofrece resistencia a la flexión y no sufre alargamiento alguno (inextensible). La única fuerza interna es la tensión que es siempre normal a la sección y por tanto en la dirección tangente a la curva que adopta el hilo,

$$\vec{T} = \pm T \hat{T}$$

donde el signo depende de la rama considerada (el vector unitario tangente \hat{T} sigue el sentido en que se recorre la curva).

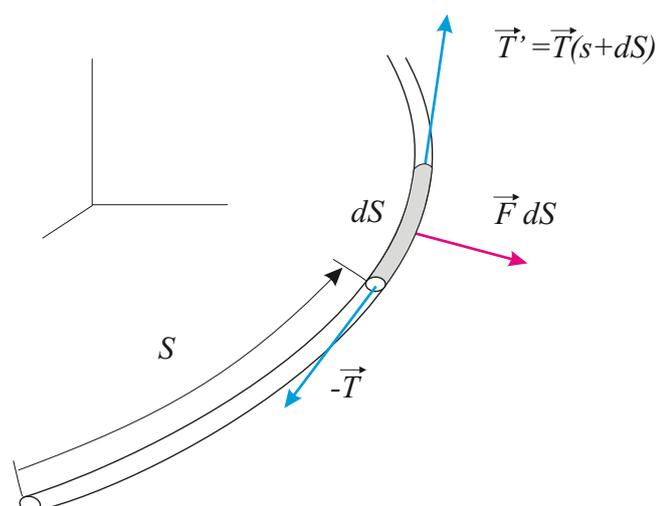


Esta tensión T varía en intensidad a lo largo del hilo y será necesario determinarla a la vez que se obtiene la ecuación de la curva que adopta el hilo.

7.1. Ecuación de equilibrio del hilo ideal.

Consideremos un elemento de longitud de arco dS y sea \vec{F} la fuerza externa por unidad de longitud que actúa sobre ese elemento. En el equilibrio la tensión en los extremos se equilibra con la fuerza exterior: $\vec{T}' + \vec{F} dS - \vec{T} = 0$ y como $\vec{T}' = \vec{T}(S + dS) = \vec{T}(S) + d\vec{T}$, la *ecuación de equilibrio del hilo ideal* queda:

$$d\vec{T} + \vec{F} dS = 0$$



La ecuación de equilibrio anterior se puede expresar en coordenadas cartesianas como:

$$\left. \begin{aligned} d\left(T \frac{dx}{dS}\right) + F_x dS &= 0 \\ d\left(T \frac{dy}{dS}\right) + F_y dS &= 0 \\ d\left(T \frac{dz}{dS}\right) + F_z dS &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde

$$\hat{T} = \frac{dx \hat{i} + dy \hat{j} + dz \hat{k}}{dS}$$

El sistema anterior tiene 3 ecuaciones pero hay 4 incógnitas: la tensión $T(S)$ y las 3 componentes de la ecuación de la curva que adopta el hilo $\vec{r}(S)$. La cuarta ecuación es:

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dS}\right)^2 = \hat{T}^2 = 1 = \left(\frac{dx}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dS}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dS}\right)^2$$

Como las ecuaciones son de 2º orden en las coordenadas tendrían seis constantes arbitrarias. Las formas más corrientes de dar las 6 condiciones de contorno son:

- 1) $x, y, z, \frac{dx}{dS}, \frac{dy}{dS}, \frac{dz}{dS}$ en un punto de la curva.
- 2) Las coordenadas en dos puntos y la longitud de la cuerda.
- 3) Un extremo sobre una superficie $f(x, y, z)$ y normal a ella $\vec{\nabla}f \parallel \frac{d\vec{r}}{dS}$
- 4) Un extremo sobre una curva $\begin{cases} f(x, y, z) \\ g(x, y, z) \end{cases}$ y normal a ella $(\vec{\nabla}f \times \vec{\nabla}g) \cdot \frac{d\vec{r}}{dS} = 0$

Ecuaciones intrínsecas del equilibrio de un hilo.

En ciertos casos es muy útil escribir las ecuaciones de equilibrio en el triedo intrínseco $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$:

$$\frac{d\vec{T}}{dS} + \vec{F} = 0 = \frac{d}{dS} (T \hat{T}) + \vec{F} = \frac{dT}{dS} \hat{T} + T \frac{d\hat{T}}{dS} + \vec{F}$$

y sustituyendo la primera fórmula de Frenet, $d\hat{T}/dS = \kappa \hat{N}$, se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{dS} + F_T &= 0 \\ \frac{T}{\rho} + F_N &= 0 \\ F_B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

que son las *ecuaciones de equilibrio en forma intrínseca* y que permiten extraer las siguientes conclusiones:

- La componente de la fuerza externa paralela a la tangente del hilo, F_T , es la que hace variar la tensión.
- La componente normal, F_N , es la que hace variar la curvatura (flexiona el hilo).
- La forma que adopta el hilo en el equilibrio es tal que en cada punto la fuerza externa es paralela al plano osculador (no hay componente binormal).



7.2. Equilibrio bajo un sistema de fuerzas paralelas.

Si todas las fuerzas \vec{F} son paralelas a una dirección fija \hat{u} , $\vec{F} \times \hat{u} = 0$ y multiplicando vectorialmente la ecuación de equilibrio por el vector unitario se tiene,

$$0 = \hat{u} \times (d\vec{T} + \vec{F} dS) = \hat{u} \times d\vec{T} = d(\hat{u} \times \vec{T})$$

por lo que $\hat{u} \times \vec{T} = \vec{cte}$ lo que indica que la tensión y el vector unitario \hat{u} son coplanarios y ese mismo plano contiene la curva que adopta el hilo.

Sea Oxy el plano que contiene al hilo y Oy la dirección de la fuerza, $\vec{F} = F\hat{j}$, las componentes de la ecuación de equilibrio quedan:

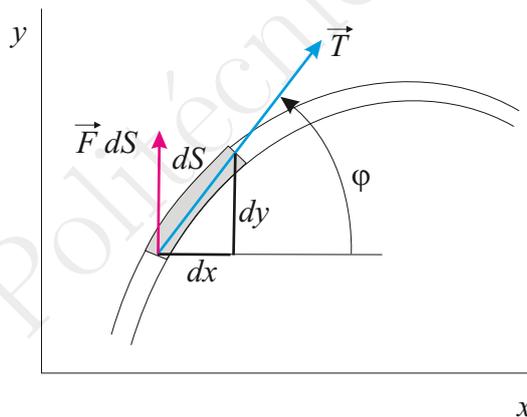
$$\begin{aligned}dT_x &= 0 \\dT_y + FdS &= 0\end{aligned}$$

De la primera se obtiene que la componente de la tensión en la dirección perpendicular a la fuerza no cambia, $T_x = cte = T_0$. Para la segunda ecuación utilizamos que la pendiente de la curva es la derivada, $y' = dy/dx = \tan \varphi$ y puesto que la tensión es tangente a la curva, $\tan \varphi = T_y/T_x$. Despejando T_y tenemos

$$T_y = T_x y' = T_0 y'$$

que conduce a

$$0 = \frac{d(T_0 y') + FdS}{dx} = T_0 y'' + F \frac{dS}{dx} = T_0 y'' + F\sqrt{1 + (y')^2}$$



7.3. Hilo bajo la acción de su propio peso. Catenaria.

En este caso la fuerza es el peso del hilo $\vec{F}dS = -qdS\hat{j}$, donde q es el peso por unidad de longitud del hilo. La ecuación de equilibrio queda

$$T_0 \frac{dy'}{dx} - q\sqrt{1 + (y')^2} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \int \frac{q}{T_0} dx \Rightarrow \operatorname{arcsenh}(y') = \frac{q}{T_0}x + C_1$$

integrando nuevamente se obtiene

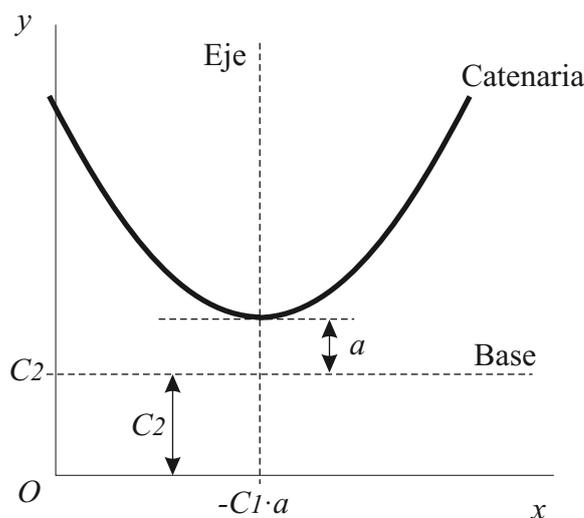
$$y = \frac{T_0}{q} \cosh\left(\frac{q}{T_0}x + C_1\right) + C_2$$

que es la ecuación de la catenaria.

Para simplificar la ecuación de la curva se suele cambiar el origen de las coordenadas de manera que el eje de ordenadas pase por el punto de pendiente nula y este se encuentre a una altura $a = T_0/q$ del eje de abscisas. Se dice que la catenaria está referida a su eje y y a su base y la ecuación queda como

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

La constante $a = T_0/q$ que tiene dimensiones de longitud se conoce por parámetro de la catenaria.



Elementos de la catenaria: Tensiones en los extremos y longitud total. Propiedades y métodos de obtención bajo condiciones dadas.

La *tensión de la cuerda* se obtiene de la derivada de la curva:

$$T = T_0 \sqrt{1 + (y')^2} = a q \sqrt{1 + \left[\sinh \left(\frac{x}{a} \right) \right]^2} = a q \cosh \left(\frac{x}{a} \right) = q y$$

por tanto

$$T = q y$$

siendo y la altura de la catenaria desde su base. El valor mínimo se obtiene para $y = a$, por tanto: $T_{\min} = q a = T_0$

Nótese que $\vec{F} = -q \hat{j} = -\vec{\nabla} V$ con $V = q y + cte \Rightarrow T = V + cte$

La *longitud de una de las ramas* de la catenaria (longitud de arco), se obtiene de forma similar:

$$S = \int_0^x \frac{dS}{dx} dx = \int_0^x \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^x \cosh \left(\frac{x}{a} \right) dx = a \sinh \left(\frac{x}{a} \right)$$

y entonces

$$S = a \sinh \left(\frac{x}{a} \right)$$

Que está relacionada con la tensión vertical:

$$T_y = \sqrt{T^2 - T_x^2} = \sqrt{T^2 - (q \cdot a)^2} = q a \sinh \left(\frac{x}{a} \right)$$

por tanto,

$$T_y = q S$$

Sobre las condiciones de contorno

Consideraremos por ejemplo la catenaria:

$$y(x) = \frac{T_0}{q} \cosh \left(\frac{q}{T_0} x + C_1 \right) + C_2$$

la derivada

$$y'(x) = \sinh \left(\frac{q}{T_0} x + C_1 \right)$$

y la tensión

$$T(x) = T_0 \sqrt{1 + (y')^2} = T_0 \cosh \left(\frac{q}{T_0} x + C_1 \right)$$



La longitud del arco de la catenaria entre x_1 y x_2 ,

$$S(x_1, x_2) = \frac{T_0}{q} \left[\sinh \left(\frac{q}{T_0} x_2 + C_1 \right) - \sinh \left(\frac{q}{T_0} x_1 + C_1 \right) \right]$$

Todo depende de 4 constantes: q, T_0, C_1 y C_2 , que aparecen de diferente forma en cada magnitud

$$\begin{aligned} Y(x) &\rightarrow \frac{T_0}{q}, C_1, C_2 \\ Y'(x) &\rightarrow \frac{T_0}{q}, C_1, \\ T(x) &\rightarrow T_0 \frac{T_0}{q}, C_1 \\ S &\rightarrow \frac{T_0}{q}, C_1, \end{aligned}$$

Así, si se conoce el peso por unidad de longitud q , la curva de la catenaria queda totalmente determinada conociendo tres condiciones de contorno que puede ser:

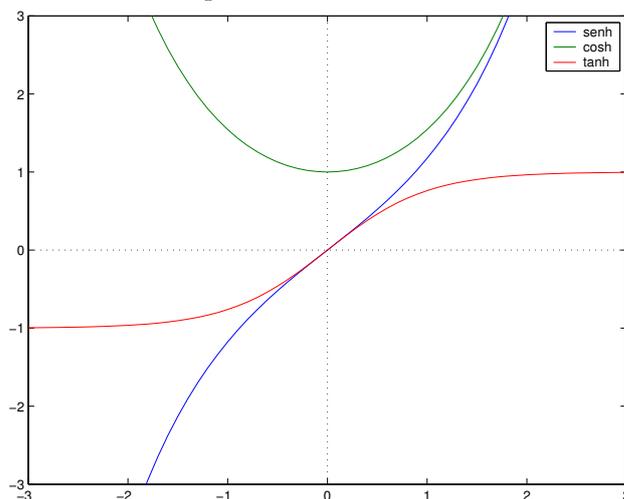
- I) $y(A), y(B), S(A, B)$
- II) $y(A), y(B), y'(C)$
- III) $y(A), y'(A), T(A)$
- IV) ...

Apéndice: Propiedades de las funciones hiperbólicas

Definición:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{cosh}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{tanh}(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{cosh}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Representación Gráfica:



Propiedades:

$$\operatorname{senh}(ix) = i \operatorname{sen}(x)$$

$$\operatorname{cosh}(ix) = \cos(x)$$

$$\operatorname{tanh}(ix) = i \operatorname{tan}(x)$$

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$$

$$\operatorname{cosh}(-x) = \operatorname{cosh}(x)$$

$$\operatorname{tanh}(-x) = -\operatorname{tanh}(x)$$

$$\operatorname{senh}(0) = 0$$

$$\operatorname{cosh}(0) = 1$$

$$\operatorname{tanh}(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{senh}(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{cosh}(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{tanh}(x) = \pm 1$$

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{senh}(x)] = \operatorname{cosh}(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{cosh}(x)] = \operatorname{senh}(x)$$

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{tanh}(x)] = \frac{1}{\operatorname{cosh}^2(x)}$$

$$\operatorname{senh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$\operatorname{cosh}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\operatorname{tanh}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots$$

$$e^{\pm x} = \operatorname{cosh}(x) \pm \operatorname{senh}(x)$$

$$1 = \operatorname{cosh}^2(x) - \operatorname{senh}^2(x)$$

$$\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh}(x) \operatorname{cosh}(y) \pm \operatorname{cosh}(x) \operatorname{senh}(y)$$

$$\operatorname{senh}(2x) = 2 \operatorname{senh}(x) \operatorname{cosh}(x)$$

$$\operatorname{cosh}(x \pm y) = \operatorname{cosh}(x) \operatorname{cosh}(y) \pm \operatorname{senh}(x) \operatorname{senh}(y)$$

$$\operatorname{cosh}(2x) = \operatorname{cosh}^2(x) + \operatorname{senh}^2(x)$$

Funciones inversas:

$$\operatorname{arcsenh}(x) = \ln \left[x + \sqrt{x^2 + 1} \right] \quad \operatorname{arccosh}(x) = \pm \ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] \quad \operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+x}{1-x} \right]$$

Propiedades de las funciones inversas:

$$\frac{d}{dx} [\operatorname{arcsenh}(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \frac{d}{dx} [\operatorname{arccosh}(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \frac{d}{dx} [\operatorname{arctanh}(x)] = \frac{d}{dx} [\operatorname{arccoth}(x)] = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\operatorname{cosh}[\operatorname{arcsenh}(x)] = \sqrt{x^2 + 1} \quad \operatorname{senh}[\operatorname{arccosh}(x)] = \pm \sqrt{x^2 - 1} \quad \operatorname{tanh}[\operatorname{arccoth}(x)] = \operatorname{coth}[\operatorname{arctanh}(x)] = \frac{1}{x}$$

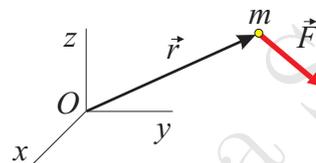
8. Principios de la dinámica

- 8.1 Principios y Leyes de la mecánica de Newton.
- 8.2 Principio de D'Alembert.
- 8.3 Principio variacional de Hamilton.

Introducción

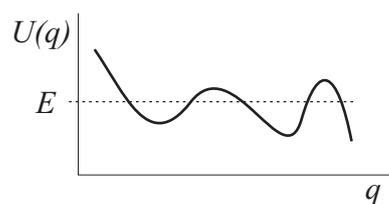
En este tema se presentan las dos ramas de la mecánica clásica y la relación que hay entre ellas.

Mecánica vectorial (también conocida como racional o Newtoniana) que se basa en las ecuaciones de Newton (*Philosophiæ naturalis principia mathematica*, 1687) y en el análisis de fuerzas. El carácter vectorial de las fuerzas hace que las ecuaciones se escriban utilizando este tipo de magnitudes y de la misma forma la localización de las partículas se expresará por vectores de posición.



Los efectos mutuos entre varios cuerpos o de las partículas que forman un cuerpo complejo han de introducirse por medio de fuerzas que en principio son desconocidas y que han de resolverse simultáneamente con el movimiento.

Mecánica analítica que se basa en el uso de la energía (escalares) y que utiliza coordenadas generalizadas que definen el llamado espacio de configuraciones. Las coordenadas generalizadas se eligen para cada sistema teniendo en cuenta sus grados de libertad lo que permite que su número sea más reducido y se adapten mejor a cada problema. En lugar de fuerzas se utilizan potenciales.



Dentro de la mecánica analítica hay a su vez dos formulaciones:

- **Formulación de Lagrange**, (*Mécanique Analytique*, 1788), es la más sencilla y permite obtener las ecuaciones del movimiento de las coordenadas generalizadas (compatibles con las ligaduras) por lo que no es necesario introducir las fuerzas en los enlaces. Es suficiente para las aplicaciones de la ingeniería.
- **Formulación de Hamilton**, (1834) es más general que la anterior porque utiliza las coordenadas y sus momentos conjugados que para cada estado del sistema definen un único punto en el espacio de fases. Permite una gran libertad al elegir estas variables y es especialmente útil para buscar constantes del movimiento. Se utiliza sobre todo en estudios más profundos del movimiento de sistemas y su aplicación a otras partes de la física (mecánica cuántica).

Todas las formulaciones son equivalentes y conducen a los mismos resultados, siendo la mecánica newtoniana la que proporciona una visión más intuitiva (fuerzas) aunque la mecánica analítica es particularmente útil para sistemas con ligaduras.

8.1. Principios y Leyes de la mecánica de Newton

La mecánica se basa en una serie de principios y leyes fundamentales determinadas a partir de experimentos. Se deduce de esta premisa que la mecánica es una ciencia experimental y la utilización del método científico permite establecer unos postulados que se considerarán ciertos en tanto en cuanto sus consecuencias concuerdan con las observaciones experimentales.

Principios

- P1) El espacio es tridimensional y euclídeo, y el tiempo es unidimensional.
- P2) Principio de Relatividad de Galileo. Existen sistemas de coordenadas (llamados inerciales) en los que se verifica:
- las leyes de la física, en particular del movimiento, tienen la misma forma en todo momento y en todos los sistemas inerciales.
 - todo sistema en movimiento rectilíneo y uniforme respecto a uno inercial es también inercial.
- P3) Principio de determinación de Newton. El estado inicial de un sistema mecánico (la totalidad de posiciones y velocidades de sus puntos en algún instante de tiempo) determina de forma única todos los estados de su movimiento.

Leyes de Newton

De acuerdo con estos principios, Newton estableció las **leyes del movimiento** válidas en un sistema de referencia inercial:

- L1) Todo cuerpo permanece en estado de reposo o de movimiento uniforme si no se ejerce ninguna fuerza sobre él.

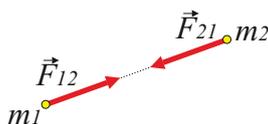
$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = cte$$

- L2) La variación de la cantidad de movimiento de un cuerpo respecto al tiempo es igual a la fuerza que actúa sobre él.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}, \quad \text{donde } \vec{p} = m\vec{v}$$

- L3) A cada acción se le opone una reacción igual y de sentido contrario, o lo que es lo mismo, cuando dos cuerpos ejercen fuerzas entre sí, estas son de intensidades iguales y de sentidos opuestos.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



La **interacción gravitatoria** que causa el movimiento de los planetas y la aceleración de la gravedad (peso por unidad de masa) viene dada por:

- L4) La fuerza de atracción gravitacional que ejercen entre sí dos cuerpos es proporcional a sus masas, inversamente proporcional al cuadrado de su distancia y dirigida según la línea que los une.

$$\vec{F}_g = -G \frac{m m'}{r^2} \hat{u}_r$$

donde $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ es la constante de gravitación universal.



Las leyes de Newton permiten resolver el movimiento de los cuerpos en la superficie de la Tierra (la manzana) y de los objetos del sistema solar (la Luna y los planetas). Además explica otros movimientos (plano inclinado, ...) e introduce la acción a distancia entre los cuerpos por medio de fuerzas (instantáneas).

La dificultad para su aplicación aparece en sistemas con enlaces o ligaduras que limitan los grados de libertad del sistema y han de ser introducidos por medio de fuerzas desconocidas que dificultan extraer las ecuaciones que verdaderamente determinan el movimiento.

8.2. Principio de D'Alembert

El principio de D'Alembert extiende a la dinámica el principio del trabajo virtual de la estática, sustituyendo las condiciones de equilibrio de un sistema basadas en fuerzas por otras basadas en el trabajo que realizan esas fuerzas.

Recordando el teorema de la energía según el cual el trabajo realizado por una fuerza se emplea en variar la energía cinética,

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = dT = d\left(\frac{1}{2} m v^2\right)$$

las fuerzas que no producen trabajo no tienen capacidad para generar energía cinética y no podrán separar el sistema del equilibrio (reposo). Por ello, para sistemas complejos con muchas ligaduras que limitan parcialmente el movimiento de los distintos elementos del sistema, la capacidad de producir trabajo de las fuerzas es lo que determina que el sistema se encuentre o no en equilibrio,

$$EQUILIBRIO \Leftrightarrow \delta W = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0, \quad \forall \delta \vec{r}_{\alpha} \text{ compatible con las ligaduras}$$

es el *Principio del trabajo virtual*.

Así, para un sistema con enlaces perfectos (sin rozamiento), separando las fuerzas aplicadas de las de enlace,

$$\vec{F}_{\alpha} = \vec{F}_{\alpha}^{\text{apl}} + \vec{F}_{\alpha}^{\text{enl}}$$

estas últimas no producen trabajo y por tanto,

$$EQUILIBRIO \Leftrightarrow \delta W = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{apl}} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0, \quad \forall \delta \vec{r}_{\alpha}$$

Para extenderlo a la dinámica consideraremos el equilibrio entre las fuerzas aplicadas y las de inercia, $\vec{F}_I = -d\vec{p}/dt$, por lo que el *Principio de D'Alembert* queda,

$$0 = \sum_{\alpha} \left[\vec{F}_{\alpha}^{\text{apl}} - \frac{d\vec{p}_{\alpha}}{dt} \right] \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0, \quad \forall \delta \vec{r}_{\alpha} \text{ instantáneo y compatible con las ligaduras}$$

De este principio y utilizando coordenadas generalizadas, se pueden deducir las ecuaciones del movimiento de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad \forall q_j$$

que para sistemas conservativos (en los que las fuerzas que producen trabajo pueden obtenerse de un potencial), pueden escribirse como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1 \dots s$$

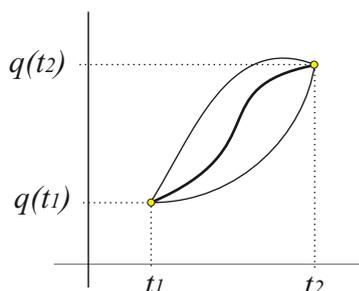
donde $\mathcal{L} = T - U$ es la función escalar denominada *función lagrangiana* que determina el movimiento del sistema y es la diferencia entre la energía cinética T y el potencial U .

8.3. Principio variacional de Hamilton

La ecuación anterior se obtuvo aplicando Principio de D'Alembert a un desplazamiento infinitesimal alrededor de un determinado instante pero también puede obtenerse desde un sencillo principio integral (que tenga en cuenta el movimiento completo del sistema entre dos instantes t_1 y t_2) conocido por *Principio de Hamilton*, que dice que el movimiento del sistema entre dos instantes t_1 y t_2 es tal que la integral de línea de la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt$$

toma un valor extremo.



La magnitud S recibe el nombre de *acción* y dado que el extremo es realmente un mínimo (el máximo es infinito) el principio anterior también se conoce por *principio de mínima acción*.

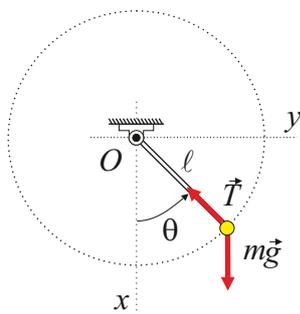
El principio de Hamilton conduce a un problema de minimización que se resuelve por el llamado cálculo de variaciones cuya solución es de nuevo la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1 \dots s$$

Los principios integrales se utilizan en otras partes de la física y también tienen aplicaciones prácticas para formular problemas numéricos.

Ejemplo: el péndulo plano

Se trata de un punto material de masa m unido al origen por una varilla de longitud ℓ de peso despreciable,



Con las leyes de Newton

La ecuación del movimiento sería

$$m \vec{a} = \vec{F} = \vec{F}^{\text{apl}} + \vec{F}^{\text{enl}}$$

donde la fuerza aplicada es el peso $\vec{F}^{\text{apl}} = m g \hat{i}$ y la de enlace es la tensión de la varilla que es paralela a esta $\vec{F}^{\text{enl}} = -T \vec{r}/\ell$, por tanto,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x = m g - \frac{T}{\ell} x$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y = -\frac{T}{\ell} y$$



que han de resolverse junto con la ligadura $x^2 + y^2 = \ell^2$ para determinar la solución del movimiento $(x(t), y(t))$ y el valor de la tensión T . Para separar los dos problemas puede proyectarse la ecuación de Newton en la dirección de la tangente y de la normal a la curva.

Con el principio de D'Alembert

La ecuación del movimiento se obtiene a partir del trabajo en un desplazamiento infinitesimal virtual (instantáneo y compatible con la ligadura) del sistema, por tanto,

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \delta \theta = \ell \left(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} \right) \delta \theta$$

En las fuerzas ha de incluirse a la de inercia

$$\vec{F} + \vec{F}_I = \vec{F}^{\text{apl}} + \vec{F}^{\text{enl}} - m \vec{a}$$

pero solo el peso y la fuerza de inercia realizan trabajo, la fuerza de enlace es perpendicular al desplazamiento y por eso no trabaja. Así, en la expresión del trabajo ya no aparece la tensión,

$$\left[\vec{F}^{\text{apl}} + \vec{F}_I \right] \cdot \delta \vec{r} = -m g \ell \sin \theta \delta \theta - m \ell^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} \delta \theta = 0, \quad \forall \delta \theta$$

por lo que

$$m g \ell \sin \theta + m \ell^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

Con las ecuaciones de Euler-Lagrange

Elegimos como coordenada el ángulo, $q = \theta$, y la usamos para determinar la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\ell \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

y el potencial

$$U = -m g x = -m g \ell \cos \theta$$

de manera que

$$\mathcal{L} = T - U$$

y al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(m \ell^2 \frac{d\theta}{dt} \right) + m g \ell \sin \theta = 0$$

y entonces

$$m \ell^2 \frac{d^2 \theta}{dt^2} + m g \ell \sin \theta = 0$$

Además, para integrar la ecuación del movimiento y para determinar sus características principales puede utilizarse la constante del movimiento energía,

$$E = T + U = \frac{1}{2} m \left(\ell \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + m g \ell \cos \theta = cte$$

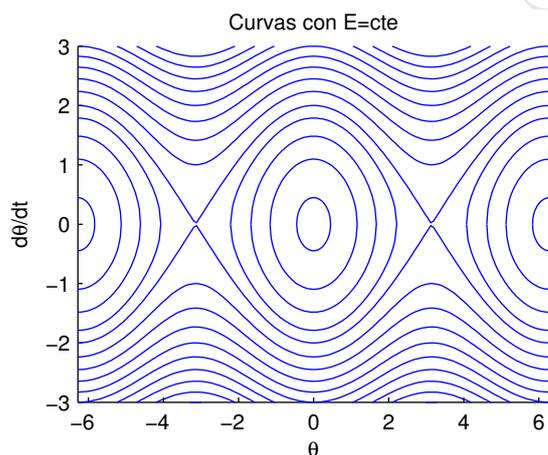


Figura 1: Trayectorias del péndulo en el espacio de configuraciones para diferentes valores de la energía. El valor de la constante E caracteriza el tipo de movimiento: Las curvas cerradas ($E < 0$) corresponden al movimiento oscilatorio mientras que las abiertas ($E > 0$) corresponden a una rotación monótona.



9. Elementos básicos de Mecánica Analítica

- 9.1 Ligaduras en sistemas físicos. Definición, propiedades y clasificación.
- 9.2 Coordenadas y fuerzas generalizadas.
- 9.3 Principio de D'Alembert.
- 9.4 Ecuación general de la dinámica para un sistema con ligaduras sin rozamiento.
- 9.5 Fuerzas, trabajo y energía en coordenadas generalizadas.

9.1. Ligaduras en sistemas físicos. Definición, propiedades y clasificación.

Ya hemos visto que las ligaduras restringen los movimientos de un sistema. Matemáticamente se expresan como una relación funcional entre las posiciones y velocidades de los puntos del sistema y el parámetro tiempo. Existen diversos criterios para clasificar las ligaduras, aquí consideraremos:

- Ligaduras holónomas: Son aquellas que conducen a problemas que pueden resolverse formalmente; existe solución general completa. En el caso de ligaduras no holónomas no existe un método general para obtener las ecuaciones del movimiento.

Son *holónomas* las ligaduras geométricas, es decir aquellas que pueden expresarse mediante una relación funcional de las posiciones de las partículas (y posiblemente el tiempo) de la forma $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$. Un ejemplo de ligadura geométrica es el sólido rígido, $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$. El caso de una partícula que se mueve ligada a una curva o una superficie es otro ejemplo de ligadura geométrica, donde las ecuaciones de la curva o de la superficie actúan como ecuaciones de ligadura. Sin embargo, el problema de una partícula que se mueve por el exterior de la superficie de una esfera de radio a , donde la ligadura se expresaría como una desigualdad, $\vec{r}^2 - a^2 \geq 0$, sería un caso de ligadura no holónoma.

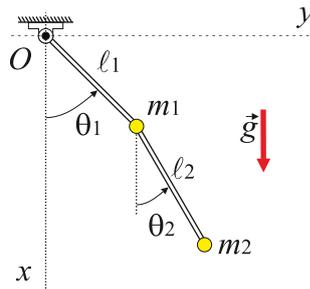
Las ligaduras cinemáticas, que se expresan como una relación funcional de las velocidades y del tiempo, $f(\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0$, son en general no holónomas; sin embargo aquellas que por integración conducen a una ligadura geométrica (cinemáticas integrables) son también ligaduras holónomas. Un ejemplo de ligadura cinemática integrable sería el caso de un círculo que rueda sin deslizar sobre una recta, la ligadura sería que la velocidad del punto de contacto A es nula, $v_A = v_C - \omega r = 0$ que puede integrarse dando lugar a una relación entre la coordenada del centro del círculo C y el ángulo girado ϕ , $x_C = r\phi + cte$.

- Esclerónomas y reónomas: Se clasifican así atendiendo a su dependencia temporal. Si en la ecuación de ligadura aparece explícitamente el tiempo la denominaremos *reónoma* y en caso contrario *esclerónoma*.

9.2. Coordenadas y fuerzas generalizadas.

Para un sistema con ligaduras los desplazamientos de sus partículas no son independientes y por tanto las coordenadas utilizadas para definir la posición del sistema tampoco lo son. Cuando todas las ligaduras son holónomas (sistemas holónomos) la dependencia que existe entre las posiciones de los diferentes puntos del sistema puede evitarse eligiendo unas nuevas coordenadas que sean independientes entre sí. Definimos entonces:

Coordenadas generalizadas: Conjunto de variables $\{q_1, \dots, q_s\}$ independientes entre sí, que definen unívocamente la posición del sistema, es decir, $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_s, t)$, siendo s el número de grados de libertad (movimientos independientes) del sistema y α un índice que recorre el número N de partículas. Para un sistema dado, la elección de las coordenadas generalizadas no es única. Así, por ejemplo, en el caso del péndulo doble existen dos ligaduras: $x_1^2 + y_1^2 = \ell_1^2$ y $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell_2^2$, y cuatro coordenadas cartesianas por lo que podrían elegirse 2 coordenadas independientes de múltiples formas y en diversas combinaciones siendo todas ellas válidas. En este caso lo más cómodo es tomar los dos ángulos indicados en la figura.



De forma similar al desarrollo del principio del trabajo virtual que hicimos en el tema de equilibrio del sólido rígido, llamaremos desplazamiento virtual del sistema a un desplazamiento hipotético instantáneo y compatible con las ligaduras, que se expresa como

$$\delta \vec{r}_\alpha = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j$$

de manera que el trabajo virtual se puede escribir como:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_j Q_j \delta q_j$$

donde

$$Q_j = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

es la **fuerza generalizada** asociada a la coordenada generalizada q_j . Nótese que, en general Q_j no tiene dimensiones de fuerza pero el producto $Q_j \delta q_j$ siempre tiene dimensiones de trabajo o energía: ML^2T^{-2} .

9.3. Principio de D'Alembert.

El principio de D'Alembert es la extensión del principio del trabajo virtual a la dinámica. Partiendo de la segunda ley de Newton para un sistema de partículas

$$\vec{F}_\alpha = \dot{\vec{p}}_\alpha, \quad \forall \alpha$$

y separando las fuerzas aplicadas y las fuerzas de ligadura que actúan sobre la partícula α , $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{apli}} + \vec{R}_\alpha$, se tiene que:

$$\vec{F}_\alpha^{\text{apli}} + \vec{R}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha = 0, \quad \forall \alpha$$

Si los enlaces son perfectos (sin rozamiento) las fuerzas de ligadura no trabajan y por lo tanto, la ecuación de trabajo virtual queda:

$$\delta W = \sum_{\alpha} \left(\vec{F}_\alpha^{\text{apli}} + \vec{R}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha} \left(\vec{F}_\alpha^{\text{apli}} - \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0, \quad \forall \delta \vec{r}_\alpha \quad (9.18)$$

que se conoce por *Principio de D'Alembert*.

Según este principio, un sistema está en equilibrio dinámico bajo la acción de las fuerzas aplicadas más las fuerzas de inercia $-\dot{\vec{p}}_\alpha$. Es un principio fundamental que proporciona una formulación completa para todos los problemas mecánicos. La ventaja de utilizar el principio de D'Alembert sobre la formulación de Newton es que tanto las fuerzas de ligadura como las fuerzas internas entre las partículas del sistema se eliminan lo cual supone una gran ventaja en sistemas con varios grados de libertad en los que hay presentes ligaduras.



9.4. Ecuación general de la dinámica para un sistema con ligaduras sin rozamiento.

La ecuación 9.18 es difícil de resolver porque en general los desplazamientos virtuales de las partículas no son independientes entre sí. Cuando el sistema es holónomo puede elegirse un conjunto de coordenadas generalizadas y reescribir cada uno de los términos que aparecen en términos de las coordenadas y las fuerzas generalizadas:

Así, el primer término, ya hemos visto que quedaría:

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = \sum_{j=1}^s Q_j \delta q_j \quad (9.19)$$

El segundo término

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \dot{\vec{p}}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} &= \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} (m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} (m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}) \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{\alpha} \left[\frac{d}{dt} \left(m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \right) - m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \end{aligned} \quad (9.20)$$

Teniendo en cuenta que

$$\vec{v}_{\alpha} = \vec{v}_{\alpha}(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{d\vec{r}_{\alpha}}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t}$$

por tanto,

$$\frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j}$$

y el primer término de la ecuación 9.20 queda

$$\sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \left(m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \right) = \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \left(m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

siendo

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2$$

la energía cinética del sistema.

Teniendo en cuenta que las derivadas parciales cruzadas son iguales, en el otro sumando de la expresión 9.20 puede hacerse el cambio,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_k \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \right] = \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial q_j}$$

Entonces, la ecuación 9.20 queda

$$\sum_{\alpha=1}^N \dot{\vec{p}}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{v}_{\alpha}}{\partial q_j} \right] \delta q_j = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

Finalmente la ecuación 9.18 puede escribirse

$$\sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \forall \delta q_j \quad (9.21)$$

y dado que los δq_j son independientes entre sí, tenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \forall q_j \quad (9.22)$$

que es la ecuación del movimiento para la coordenada q_j que recibe el nombre de *ecuación de Euler-Lagrange*.

9.5. Fuerzas, trabajo y energía en coordenadas generalizadas

La fuerza generalizada Q_j , asociada a la coordenada generalizada q_j se obtiene como:

$$Q_j = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j}$$

de manera que el trabajo en un desplazamiento infinitesimal es

$$dW = \sum_{j=1}^S Q_j dq_j$$

y la potencia

$$P = \frac{dW}{dt} = \sum_{j=1}^S Q_j \dot{q}_j$$

El trabajo realizado sobre un sistema se emplea en cambiar su energía cinética, para un sistema holónomo se tiene

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_j B_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} C$$

donde

$$A_{jk} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_k}$$
$$B_j = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t}$$
$$C = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial t} \right)^2$$

Si el sistema es además esclerónomo las funciones B_j y C son cero y la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades generalizadas.

Si las fuerzas aplicadas son conservativas, el trabajo es igual a menos la variación de la energía potencial, donde

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{\alpha}, \dots) = V(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, t)$$

y de nuevo la dependencia con el tiempo desaparece si el sistema es también esclerónomo.



10. Formulación de Lagrange

- 10.1 Ecuaciones de Lagrange.
- 10.2 Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación.
- 10.3 Aplicaciones sencillas de la formulación de Lagrange.
- 10.4 Constantes del movimiento. Teoremas de conservación
- 10.5 Principio variacional de Hamilton. Aplicación a la derivación de las ecuaciones de Lagrange.
- 10.6 Función hamiltoniana.
- 10.7 Eliminación de coordenadas cíclicas. Función de Routh.

10.1. Ecuaciones de Lagrange.

En el tema anterior hemos obtenido las ecuaciones del movimiento, *ecuaciones de Euler-Lagrange*, para cada una de las coordenadas generalizadas, q_j .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \forall j \quad (10.23)$$

Sistemas conservativos

A continuación veremos qué forma tienen estas ecuaciones en sistemas conservativos, es decir sistemas en los cuales $\forall \alpha, \vec{F}_\alpha = -\vec{\nabla}_\alpha V$, siendo $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_\alpha, \dots)$ la energía potencial del sistema, una función escalar que depende únicamente de las posiciones de las partículas del sistema.

En un sistema conservativo las fuerzas generalizadas pueden escribirse $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$. Si además el sistema es holónomo, las posiciones dependen de las coordenadas generalizadas y tal vez del tiempo, $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_s; t)$, pero no dependen de las velocidades \dot{q}_j ; por tanto $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ y podremos escribir

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Haciendo $\mathcal{L} = T - V$, las ecuaciones del movimiento pueden escribirse

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1 \dots s \quad (10.24)$$

Estas ecuaciones se denominan *Ecuaciones de Lagrange* y \mathcal{L} es la función *lagrangiana* del sistema.

Propiedades de la lagrangiana

- \mathcal{L} es una función escalar que contiene toda la información sobre la evolución temporal del sistema.
- $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$
- La magnitud $p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$, se denomina *momento conjugado* de la coordenada q_j . En términos de los momentos conjugados las ecuaciones de Lagrange, $\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j$, guardan una gran similitud con la ecuación de Newton $\dot{\vec{p}}_\alpha = \vec{F}_\alpha$.
- Lagrangianas que conducen a las mismas ecuaciones del movimiento:
 - $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + cte$, lagrangianas que se diferencian en una constante. (Es lo mismo que le ocurre al potencial)
 - $\mathcal{L}' = cte \mathcal{L}$, lagrangianas entre las que hay un factor constante.
 - $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + f(t)$, lagrangianas que se diferencian en una función que solo depende del tiempo.
 - $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} [f(q, t)]$, lagrangianas que se diferencian en la derivada temporal de una función que no depende de las velocidades. (Esta propiedad se conoce por invariancia Gauge).

Sistemas no conservativos

Si el sistema es holónimo pero no conservativo separaremos las fuerzas que actúan sobre cada partícula en la parte conservativa y la no conservativa, $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^C + \vec{F}_\alpha^{NC}$, lo que conduce a dos términos en la fuerza generalizada,

$$Q_j = Q_j^C + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

obteniéndose unas ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC} \quad j = 1 \dots s$$

donde las fuerzas conservativas se incluyen dentro de la lagrangiana y las no conservativas se introducen mediante las fuerzas generalizadas,

$$Q_j^{NC} = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha^{NC} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

Sistemas no holónomos. Método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange

Si el sistema es no holónimo podemos elegir un conjunto de coordenadas $\{q_1, \dots, q_s\}$ que no serán todas independientes ya que existirán ligaduras no integrables entre ellas. En estos casos todavía puede aplicarse el principio de D'Alembert,

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \forall \delta q_j \quad (10.25)$$

pero los desplazamientos no serán independientes.

Existe un caso de ligaduras no holónomas para las que existe solución general, es el caso de las ligaduras lineales en las velocidades del tipo,

$$\sum_{j=1}^s a_{\ell j} \dot{q}_j + a_{\ell t} = 0, \ell = 1, \dots, m \quad (10.26)$$

siendo $a_{ij} = a_{ij}(q_1, \dots, q_s, t)$ funciones de las coordenadas y del tiempo. En un desplazamiento virtual (instantáneo, $\delta t = 0$) estas ligaduras llevan a

$$\sum_{j=1}^s a_{\ell j} \delta q_j = 0, \ell = 1, \dots, m$$

de manera que multiplicando la ecuación anterior para cada ligadura por un coeficiente λ_ℓ y sumándolas todas en la ecuación 10.25 se tiene,

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j} \right] \delta q_j = 0, \forall \delta q_j$$

donde por comodidad hemos supuesto que el sistema es conservativo. Como hay s coordenadas y m ligaduras podemos considerar que las coordenadas $j = 1, \dots, s - m$ son independientes y para las m restantes elegir los valores de los coeficientes λ_ℓ de manera que sean cero los términos que multiplican a los desplazamientos de esas coordenadas. Entonces tendríamos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j}, \quad j = 1, \dots, s$$

que junto con las ecuaciones 10.26 de las ligaduras forma un sistema de $s + m$ cuyas incógnitas son las s soluciones de las coordenadas $q_j(t)$ y los m valores de los coeficientes λ_ℓ . Además, el término $\sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j}$ puede interpretarse como la fuerza generalizada asociada con la ligadura,

$$Q_j^{\text{lig}} = \sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j}$$

Este método puede emplearse para determinar las reacciones de las ligaduras hólomas introduciendo las que se deseen calcular como ligaduras.



10.2. Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación.

Las ecuaciones de Lagrange son válidas para sistemas holónomos que no son conservativos pero donde existe un *potencial generalizado* $U = U(q, \dot{q}, t)$ tal que

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

de manera que haciendo $\mathcal{L} = T - U$ se cumplen las ecuaciones de Lagrange.

Este potencial generalizado permite tratar dentro del formalismo lagrangiano a sistemas que no son conservativos en la formulación de Newton. Ejemplos de fuerzas no conservativas que pueden obtenerse de un potencial generalizado son la fuerza electromagnética $\vec{F} = q [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}/c]$ o la fuerza de Coriolis $\vec{F} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}$.

Función de disipación. La *función de disipación* es una función escalar similar a un potencial generalizado que permite incluir en el formalismo lagrangiano cierto tipo de fuerzas de rozamiento. Las fuerzas de rozamiento que se pueden describir por la función de disipación son las de tipo viscoso a bajas velocidades que son proporcionales a la diferencia de las velocidades de las partículas

$$\vec{F}_\alpha^{\text{NC}} = \sum_\beta \vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}}$$

donde $\vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ es la fuerza de rozamiento sobre la partícula α debida a la partícula β ,

$$\vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}} \propto -(\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta)$$

que puede expresarse como

$$\vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}} \propto -\frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha} \frac{1}{2} (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta)^2$$

y conduce a una forma cuadrática de las velocidades que se conoce por *función de disipación de Rayleigh*,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta} \vec{v}_\alpha \vec{v}_\beta$$

de la que se obtienen por derivación las fuerzas,

$$\vec{F}_\alpha^{\text{NC}} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{v}_\alpha}$$

Si las ligaduras no dependen del tiempo, las velocidades de las partículas se obtienen a partir de las velocidades generalizadas y puede escribirse,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j f_{ij}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

donde

$$f_{ij}(q_1, \dots, q_s) = \sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\beta}{\partial q_j}$$

Las fuerzas generalizadas se obtienen como,

$$Q_j^{\text{NC}} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}$$

y las ecuaciones del movimiento quedarían,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1 \dots s$$

10.3. Aplicaciones sencillas de la formulación de Lagrange.

Las aplicaciones y ejemplos se harán dentro de las clases de problemas. Aquí solo resumiremos los pasos a seguir para obtener las ecuaciones del movimiento que es válido para todos los sistemas holónomos:

- 1º) Elegir las coordenadas generalizadas $\{q_1, \dots, q_s\}$, tantas como grados de libertad tiene el sistema.
- 2º) Obtener la energía cinética y las fuerzas generalizadas (o el potencial) en función de las coordenadas y sus derivadas.
- 3º) Escribir para cada coordenada la ecuación de Lagrange.

10.4. Constantes del movimiento. Teoremas de conservación

10.4.1. Constantes del movimiento

Las ecuaciones de Lagrange se pueden desarrollar como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_k \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_k \partial \dot{q}_j} \dot{q}_k \right] + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1 \dots s$$

que son s ecuaciones diferenciales de 2º orden que tendrán $2s$ constantes de integración. Cada una de estas constantes de integración puede verse como una función de las coordenadas y de las velocidades cuyo valor permanece constante,

$$C_i(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t) = cte, \quad i = 1 \dots 2s$$

son las llamadas *integrales primeras*. El valor de estas constantes vendrá determinado por las condiciones iniciales. Algunas de estas constantes tienen un significado físico muy claro y pueden obtenerse sin necesidad del resolver el movimiento atendiendo a las simetrías del problema y permiten conocer las características principales del movimiento. Dentro de estas hay unas que tienen un significado más profundo por estar relacionadas con propiedades fundamentales del espacio-tiempo (homogeneidad e isotropía) dando lugar a los teoremas de conservación.

Ejemplo: constantes del movimiento del oscilador armónico. Si llamamos x al desplazamiento desde la posición de equilibrio entonces la función lagrangiana queda $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$ y la ecuación del movimiento $m\ddot{x} + kx = 0$ cuya solución es $x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$ donde A y δ son las constantes de integración mientras que $\omega = \sqrt{k/m}$. Las constantes de integración pueden escribirse como relaciones entre la coordenada y sus derivadas,

$$A = \sqrt{x^2 + (\dot{x}/\omega)^2}$$
$$\delta = \arctan \left(\frac{-\dot{x}}{\omega x} \right) - \omega t$$

También es constante del movimiento la energía

$$h = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{k}{2} (\dot{x}^2/\omega^2 + x^2) = \frac{k}{2}A^2$$

10.4.2. Teoremas de conservación. Coordenadas cíclicas

Veremos a continuación los teoremas de conservación asociados a las propiedades de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo. Por comodidad consideraremos un sistema holónimo y en el que existe potencial.



Homogeneidad del tiempo, conservación de la energía. En un sistema aislado, el estado del sistema no puede depender de la elección del origen de tiempos, es decir, el tiempo es homogéneo. Por tanto, la función lagrangiana no dependerá explícitamente del tiempo, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$, entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right]$$

de manera que

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \right] = 0$$

y se obtiene una magnitud constante

$$h = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

llamada *función energía*. Entonces el teorema de conservación de la energía queda

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow h = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = cte$$

Más adelante veremos que esta magnitud da lugar a la función hamiltoniana. Además, en los sistemas llamados *naturales* (holónomos, esclerónomos y conservativos) la función energía coincide con la energía mecánica del sistema $h = T + V = E$. Otra forma de saber cuando h coincide con $T + V$ es comprobando que la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades y el potencial depende únicamente de las coordenadas generalizadas.

Coordenadas cíclicas: son las q_j para las que la lagrangiana depende de su velocidad pero no de la propia coordenada, de manera que la ecuación de Lagrange conduce a la conservación momento conjugado,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \Rightarrow p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = cte$$

La conservación del momento conjugado de una coordenada cíclica puede utilizarse para ilustrar los teoremas de conservación de la cantidad movimiento y del momento cinético.

Homogeneidad del espacio, conservación de la cantidad de movimiento. El teorema de conservación de la cantidad de movimiento en la formulación lagrangiana se expresa: si el sistema no cambia (y por tanto \mathcal{L} no cambia) al trasladarlo como un todo a lo largo de una dirección \hat{u} , la componente de la cantidad de movimiento total sobre esa dirección se conserva. Para demostrarlo vamos a considerar que existe una coordenada generalizada q_j asociada con el desplazamiento del sistema en la dirección \hat{u} , entonces

$$\vec{r}_\alpha(q_j + dq_j) = \vec{r}_\alpha(q_j) + dq_j \hat{u}$$

de manera que

$$\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \hat{u}$$

Si el sistema no cambia al hacer esa traslación, la coordenada q_j sería cíclica por lo que se conserva el momento conjugado

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = cte = \sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_\alpha} \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \vec{P}_{\text{tot}} \cdot \hat{u}$$

Nótese que la fuerza generalizada asociada con una coordenada de este tipo es la componente de la fuerza en la dirección \hat{u} ,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\sum_\alpha \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot \hat{u}$$

Isotropía del espacio, conservación del momento cinético. El teorema de conservación del momento cinético en la formulación lagrangiana dice: si el sistema no cambia (y por tanto \mathcal{L} no cambia) al efectuar una rotación del sistema como un todo alrededor de un eje e , el momento cinético total respecto de ese eje se conserva. Ahora consideraremos que existe una coordenada generalizada q_j asociada con la rotación del sistema alrededor de un eje e , entonces tomando como origen un punto del eje,

$$\vec{r}_\alpha(q_j + dq_j) = \vec{r}_\alpha(q_j) + dq_j \hat{e} \times \vec{r}_\alpha$$

de manera que

$$\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \hat{e} \times \vec{r}_\alpha$$

Procediendo de forma similar al caso anterior,

$$p_j = cte = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot (\hat{e} \times \vec{r}_\alpha) = \hat{e} \cdot \sum_\alpha m_\alpha (\vec{r}_\alpha \times \vec{v}_\alpha) = \hat{e} \cdot \vec{L}_{\text{tot}}$$

Análogamente la fuerza generalizada asociada con una coordenada de este tipo es el momento de la fuerza respecto del eje e ,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot (\hat{e} \times \vec{r}_\alpha) = \hat{e} \cdot \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha = \hat{e} \cdot \vec{M} = M_e$$

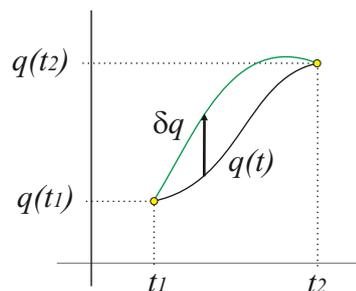
10.5. Principio variacional de Hamilton. Aplicación a la derivación de las ecuaciones de Lagrange.

Como las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtuvieron a partir de las ecuaciones de Newton pueden parecer un caso particular de estas, todo lo contrario, en realidad la formulación lagrangiana permite una mayor generalidad y es posible deducir todas las leyes de la mecánica a partir de un único principio, que sustituiría a las leyes de Newton, y que hace posible su aplicación incluso a sistemas no mecánicos.

Principio de Hamilton: Todo sistema mecánico está caracterizado por una función lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. El movimiento del sistema es tal que entre dos instantes de tiempo $t = t_1$ y $t = t_2$ sigue la trayectoria que hace extremal (máxima o mínima) la integral,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (10.27)$$

Es decir, de todas las trayectorias posibles entre dos estados del sistema, $q(t_1)$ y $q(t_2)$, la que se sigue es la que hace extremo la integral de la magnitud S que recibe el nombre de *acción*⁵.



Las ecuaciones de Lagrange pueden obtenerse del principio de Hamilton utilizando el *cálculo variacional*. Se trata de elegir el camino que hace extremo la integral y para ello la variación de un camino a otro debe

⁵El extremo es realmente un mínimo ya que el máximo es infinito. Por ese motivo el principio de Hamilton también se conoce por principio de mínima acción



ser cero. Considerando por simplicidad que hay una única coordenada q , si cambiamos la función $q(t)$ por $q(t) + \delta q(t)$ el cambio en la acción será,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

si δq es infinitesimal en todo el intervalo $t \in [t_1, t_2]$,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt$$

como $\delta \dot{q} = d(\delta q)/dt$, integrando por partes el segundo término,

$$\delta S = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt$$

y como la posición inicial y final son fijas, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, el primer término es cero. El camino que hace extremal la acción cumple que $\delta S = 0$, $\forall \delta q$ por lo que el integrando debe ser cero,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

que es la ecuación de Lagrange. Este cálculo puede generalizarse al caso de que existan varias coordenadas.

La integral de la acción muestra claramente el origen de la invariancia Gauge que vimos al escribir las lagrangianas que conducen a las mismas ecuaciones del movimiento, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} [f(q, t)]$, conducen al mismo extremo de la integral de la acción.

Aunque hemos supuesto que se trata de un sistema holónomo y conservativo, es posible extender el principio de Hamilton a sistemas no conservativos (utilizando el trabajo no conservativo en lugar del potencial) y no holónomos (método de los multiplicadores u otros).

Este tipo de principios integrales (en lugar de las ecuaciones diferenciales de las leyes de Newton) se aplican en distintas partes de la física y junto con el cálculo de variaciones tienen interés para resolver distintos problemas dentro de la ingeniería ya que son una generalización del principio del trabajo virtual.

10.6. Función hamiltoniana.

En la mecánica analítica existe una formulación alternativa a la formulación lagrangiana en la que en lugar de utilizar las coordenadas generalizadas y sus velocidades se utilizan las coordenadas y los momentos conjugados. Esto permite expresar las ecuaciones del movimiento de forma más sencilla y utilizar cambios de variables mucho más generales en los que se mezclan coordenadas y momentos conjugados. Estos cambios se utilizan para obtener constantes de movimiento con las que facilitar la integración del movimiento. También facilitan el estudio de la estabilidad y permiten profundizar y extender la mecánica clásica a otros sistemas más complejos.

Para sustituir en \mathcal{L} las velocidades \dot{q}_j por los momentos conjugados $p_j = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_j$ de manera que no se pierda información debe aplicarse la *transformada de Legendre*⁶,

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \longrightarrow \mathcal{H}(q_j, p_j, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

donde $\mathcal{H}(q_j, p_j, t)$ se conoce por función *hamiltoniana* del sistema, y, al igual que la lagrangiana, contiene toda la información del sistema.

⁶Es la misma transformación que se utiliza en la termodinámica para cambiar de un potencial termodinámico a otro, por ejemplo, de la energía interna U a la entalpía, $H = U + pV$ donde $p = -\partial U / \partial V$.

10.7. Ecuaciones de Hamilton.

Derivando $\mathcal{H}(q_j, p_j, t)$ se obtienen las ecuaciones del movimiento,

$$d\mathcal{H} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

por otro lado

$$d\mathcal{H} = d \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \right) = \sum_j (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j) - \left\{ \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right\}$$

sustituyendo la definición de momento conjugado y las ecuaciones de Lagrange,

$$d\mathcal{H} = \sum_j [-\dot{p}_j dq_j + \dot{q}_j dp_j] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

y entonces,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{cases}, \quad j = 1 \dots s \quad (10.28)$$

las dos primeras son las ecuaciones del movimiento del momento conjugado p_j y de la coordenada q_j y se denominan *ecuaciones de Hamilton* o *ecuaciones canónicas*.

Propiedades del hamiltoniano

- La derivada total de \mathcal{H} respecto del tiempo coincide con la derivada parcial,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_j [-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

de modo que si \mathcal{H} no depende explícitamente del tiempo, entonces su derivada temporal es cero y se obtiene el teorema de conservación de la energía, $\mathcal{H} = cte$.

- La diferencia entre la función energía h y el hamiltoniano \mathcal{H} es que esta última tiene que expresarse en función de las coordenadas y de los momentos conjugados y no pueden aparecer las velocidades.
- Aplicando de nuevo la transformación de Legendre se recupera la función lagrangiana,

$$\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \longrightarrow \sum_j p_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \mathcal{H} = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{H} = \mathcal{L}$$

10.8. Eliminación de coordenadas cíclicas. Función de Routh.

Como ya hemos visto, las coordenadas cíclicas conducen a una ecuación del movimiento que se expresa mediante la constancia de su momento conjugado. En la función lagrangiana no aparecen las coordenadas cíclicas pero sí sus derivadas, mientras que en la formulación hamiltoniana en lugar de las velocidades aparecerían los momentos conjugados siendo constantes los que corresponden a las coordenadas cíclicas. Así, en la formulación hamiltoniana las velocidades de las coordenadas cíclicas son sustituidas por constantes y es como si el problema tuviese menos grados de libertad. Existe también la posibilidad de aplicar la transformación solamente a las coordenadas cíclicas y dejan sin transformar las no cíclicas. La función que



se obtiene de esa manera se denomina *función de Routh* y se comporta como una lagrangiana para las coordenadas no cíclicas y como una hamiltoniana para las cíclicas,

Si consideramos que las coordenadas cíclicas son q_1, \dots, q_n y las no cíclicas q_{n+1}, \dots, q_s , entonces,

$$\mathcal{R}(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_n, \dot{q}_{n+1}, \dots, \dot{q}_s, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

y se cumple

$$\text{Coordenadas Cíclicas } (j = 1, \dots, n) : \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = 0 & \Rightarrow p_j = cte \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \end{cases}$$

$$\text{Coordenadas No Cíclicas } (j = n + 1, \dots, s) : \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \end{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0$$

además de

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Como los momentos conjugados de las coordenadas cíclicas son constantes, un método para resolver el movimiento de un sistema consiste en combinar las coordenadas para generar coordenadas cíclicas.



11. Dinámica del sólido rígido con un eje fijo

11.1 Ecuaciones del movimiento de un sólido con un eje fijo.

11.2 Reacciones en los apoyos. Equilibrado estático y dinámico.

11.1. Ecuaciones del movimiento de un sólido con un eje fijo.

Un sólido rígido con un eje fijo solamente tiene un grado de libertad, el giro alrededor del eje. La coordenada generalizada será el ángulo tomado en el plano normal al eje de giro $q = \varphi$. Desde el punto de vista cinemático es un caso particular de movimiento plano en el que el E.I.R es fijo y coincide con el eje de rotación,

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}$$

Ecuaciones del movimiento. Tomando como origen un punto O del eje de giro,

$$\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$$

y la energía cinética sería

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} I_e \omega^2 = \frac{1}{2} I_e \dot{\varphi}^2$$

donde

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\hat{e} \times \vec{r}_{\alpha})^2 = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

es el momento de inercia para el eje de rotación. La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada φ ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = I_e \ddot{\varphi} = Q_{\varphi}$$

y recordando que la fuerza generalizada asociada con el giro alrededor del eje es el par o momento de las fuerzas respecto del eje, $Q_{\varphi} = M_e$ y entonces,

$$I_e \frac{d\omega}{dt} = M_e$$

donde el par de las fuerzas aplicadas al eje es $M_e = \hat{e} \cdot \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}$ y en el caso de que las fuerzas sean conservativas $M_e = Q_{\varphi} = -\partial V / \partial \varphi$.

La ecuación del movimiento también puede obtenerse utilizando el principio de liberación (sustituyendo ligaduras por reacciones) y aplicando luego las ecuaciones del movimiento del sólido rígido libre (movimiento de traslación de centro de masas y rotación alrededor de un punto O del eje fijo),

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}^{\text{ext}} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \vec{M}_O^{\text{ext}} \end{aligned} \right\}$$

donde dentro de las fuerzas y momentos externos están incluidas las reacciones en el eje. En el caso del sólido rígido la ecuación de la cantidad de movimiento está asociada con la traslación del centro de masas y la del momento cinético con la rotación alrededor del centro de masas o de un punto fijo. En este caso el único grado de libertad esta asociado con la rotación según el eje fijo por lo que la ecuación que determina el movimiento es la componente según ese eje de la derivada del momento cinético

$$\hat{e} \cdot \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \hat{e} \cdot \vec{M}_O^{\text{ext}} = M_e^{\text{ext}}$$

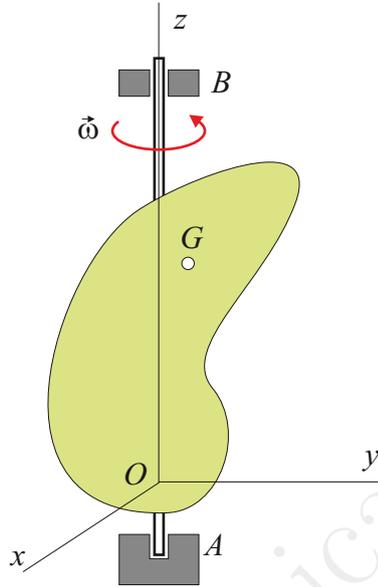
y como el vector unitario según el eje no cambia,

$$\hat{e} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{1}_O \vec{\omega} = \frac{d}{dt} (\hat{e} \cdot \mathbf{1}_O \hat{e} \omega) = \frac{d}{dt} (I_e \omega) = I_e \frac{d\omega}{dt}$$

obtenemos la misma ecuación del movimiento, $M_e^{\text{ext}} = I_e \dot{\omega}$.

11.2. Reacciones en el eje de giro. Equilibrado estático y dinámico.

Determinaremos las reacciones en los apoyos para el caso de un sólido rígido con un eje fijo alrededor del cual gira con rotación uniforme y en ausencia de fuerzas⁷. Tomamos un sistema cartesiano $Oxyz$ solidario con el sólido y en el que Oz coincide con el eje de giro. En ese caso, $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ con $\omega = cte$.



Para el movimiento centro de masas, G , la velocidad $\vec{v}_G = \vec{\omega} \times \vec{r}_G$ y la aceleración se obtiene de la fórmula de Boure

$$\vec{a}_G = \left(\frac{d\vec{v}_G}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{v}_G = 0 + \vec{\omega} \times \vec{v}_G = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)$$

y entonces

$$m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) = \vec{R}_A + \vec{R}_B$$

donde \vec{R}_A y \vec{R}_B son las reacciones en los apoyos.

Para el movimiento de rotación,

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{OA} \times \vec{R}_A + \vec{OB} \times \vec{R}_B$$

utilizando de nuevo la fórmula de Boure

$$\dot{\vec{L}}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = \mathbf{I}_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = 0 + \vec{\omega} \times \vec{L}_O$$

En este caso

$$\dot{\vec{L}}_O = \omega \hat{k} \times (I_{xz}^O \hat{i} + I_{yz}^O \hat{j} + I_{zz}^O \hat{k}) \omega = -I_{yz}^O \omega^2 \hat{i} + I_{xz}^O \omega^2 \hat{j}$$

que no tiene componente según el eje de giro (ya que ω es constante). Por tanto se tiene un sistema con 5 ecuaciones y 6 incógnitas (las 3 componentes de las 2 reacciones),

$$-m \omega^2 x_G = A_x + B_x \quad (11.29)$$

$$-m \omega^2 y_G = A_y + B_y \quad (11.30)$$

$$0 = A_z + B_z \quad (11.31)$$

$$-I_{yz}^O \omega^2 = +\vec{OA} A_y - \vec{OB} B_y \quad (11.32)$$

$$-I_{xz}^O \omega^2 = -\vec{OA} A_x + \vec{OB} B_x \quad (11.33)$$

que permiten determinar las componentes de las reacciones perpendiculares al eje y solamente la suma de las reacciones a lo largo del eje.

⁷Solamente se buscan las reacciones debidas al movimiento del cuerpo. Si hubiese fuerzas o momentos externos habría que añadirlos en las ecuaciones de la cantidad de movimiento y del momento cinético.

Equilibrado Estático y Dinámico. Se dice que un sistema con eje fijo está equilibrado cuando no se producen reacciones en los apoyos (diferentes de las del peso). Las reacciones responden a dos efectos diferentes, por una lado a la aceleración del centro de masas y por otro a la derivada del momento cinético. Para conseguir anular el primer efecto es condición necesaria y suficiente que el centro de masas pertenezca al eje de rotación,

$$\text{Equilibrado Estático} \Leftrightarrow x_G = y_G = 0 \Leftrightarrow G \in \text{Eje de rotación}$$

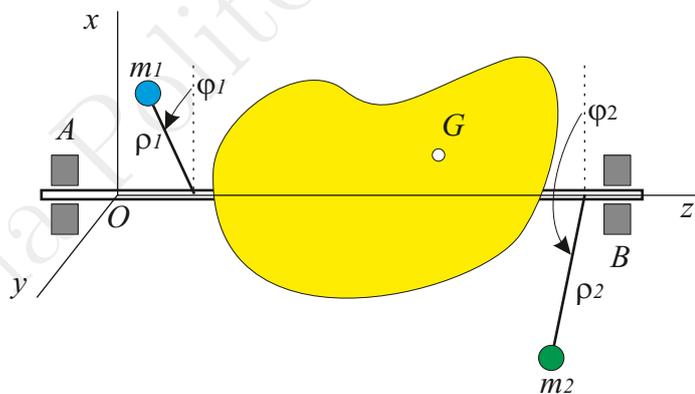
El segundo efecto se anula si el eje de giro es dirección principal de inercia de manera que $\vec{L}_0 \parallel \vec{\omega}$ y se anula la derivada,

$$\text{Equilibrado Dinámico} \Leftrightarrow I_{yz}^O = I_{xz}^O = 0 \Leftrightarrow \text{Eje de rotación es dirección principal}$$

Los nombres de estático y dinámico se deben a que en el primer caso se puede utilizar la fuerza peso para detectar si el sistema está equilibrado colocando el eje de giro horizontal y comprobando que el peso no provoca ningún movimiento con independencia de la postura en la que se encuentre el cuerpo. Para determinar si está equilibrado dinámicamente hay que recurrir a provocar el giro y detectar los esfuerzos sobre los apoyos.

El equilibrado de ejes es importante desde el punto de vista práctico porque permite minimizar el desgaste y la producción de ruido y vibraciones en estos sistemas. Como se trata de hacer cero 4 ecuaciones, añadiendo una única masa (3 grados de libertad) en general no podrá conseguirse. Con dos masas (6 grados de libertad) existen en principio infinitas posibilidades que se pueden reducir imponiendo ciertas condiciones a las posiciones en las que se colocan las masas.

Así, por ejemplo, se pueden fijar los valores de la coordenada z y la distancia al eje ρ de las masas, dejando libres los valores de las masas y los valores del ángulo acimutal φ . (Este es el caso de las ruedas de los automóviles que se equilibran colocando unas pequeñas masas con forma de grapa en el borde interior y exterior de la llanta.)



Entonces,

$$\left. \begin{aligned} m x_G + m_1 \rho_1 \cos \varphi_1 + m_2 \rho_2 \cos \varphi_2 &= 0 \\ m y_G + m_1 \rho_1 \sin \varphi_1 + m_2 \rho_2 \sin \varphi_2 &= 0 \\ I_{xz}^O - m_1 z_1 \rho_1 \cos \varphi_1 - m_2 z_2 \rho_2 \cos \varphi_2 &= 0 \\ I_{yz}^O - m_1 z_1 \rho_1 \sin \varphi_1 - m_2 z_2 \rho_2 \sin \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es

$$\left\{ \begin{aligned} \tan \varphi_1 &= \frac{z_2 m y_G + I_{yz}^O}{z_2 m x_G + I_{xz}^O} \\ \tan \varphi_2 &= \frac{z_1 m y_G + I_{yz}^O}{z_1 m x_G + I_{xz}^O} \\ m_1 &= \frac{z_2 m x_G + I_{xz}^O}{(z_1 - z_2) \rho_1 \cos \varphi_1} \\ m_2 &= \frac{z_1 m x_G + I_{xz}^O}{(z_2 - z_1) \rho_2 \cos \varphi_2} \end{aligned} \right.$$



12. Dinámica del sólido rígido con un punto fijo

- 12.1 Ecuaciones del movimiento de un sólido indeformable con un punto fijo. Cantidad de movimiento, momento cinético y energía cinética.
- 12.2 Aplicación del teorema del momento cinético. Ecuaciones de Euler.
- 12.3 Integración de las ecuaciones de Euler en ausencia de pares. Casos de elipsoide de revolución y elipsoide asimétrico.
- 12.4 Estabilidad de la rotación alrededor de los ejes principales.
- 12.5 Movimiento de un sólido pesado alrededor de un punto fijo. Trompo de Lagrange.

Introducción

El movimiento del sólido rígido con un punto fijo es un caso particular en el que existe un punto O cuya velocidad permanece nula. En este caso el sólido tiene todos los grados de libertad asociados con la rotación y ninguno asociado con la traslación por ello representa el movimiento general de rotación de un sistema indeformable. El movimiento general del sólido podría descomponerse en un movimiento de traslación del centro de masas y una rotación alrededor de ese punto G que sería formalmente idéntica al movimiento alrededor del punto fijo O (todas las ecuaciones siguen siendo válidas cambiando O por G).

El movimiento con un punto fijo también se conoce por *movimiento esférico* ya que al permanecer constante la distancia de cualquier punto P al punto fijo O hace que la trayectoria de este esta contenida en una esfera de radio \overline{OP} con centro en O . Al igual que en el movimiento plano, se puede reducir el movimiento del sólido al de los puntos de esa superficie esférica.

12.1. Ecuaciones del movimiento de un sólido indeformable con un punto fijo. Cantidad de movimiento, momento cinético y energía cinética.

Las ecuaciones del movimiento serían las asociadas a la rotación alrededor de O ,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \quad (12.34)$$

siendo el momento cinético

$$\vec{L}_O = \mathbf{I}_O \vec{\omega}$$

un vector que en general no es paralelo a $\vec{\omega}$.

Si elegimos un sistema cartesiano inercial con origen en el punto fijo, $Oxyz$, el momento cinético sería

$$\vec{L}_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

y al derivar esta expresión debe tenerse en cuenta que las componentes del tensor de inercia varían con el tiempo ya que la orientación del cuerpo respecto del sistema de ejes fijo en el espacio también cambia. Eso hace que la situación sea muy diferente al del caso del movimiento plano donde la ecuación de rotación era muy sencilla y tenía la misma forma que las movimiento de traslación del centro de masas.

La ecuación 12.34 permite determinar $\vec{\omega}(t)$. A partir de $\vec{\omega}$ es posible determinar por integración la posición del sólido utilizando, por ejemplo, los ángulos de Euler. Debe notarse sin embargo que, a diferencia con el caso del movimiento plano, el vector rotación $\vec{\omega}$ no es en general la derivada de ningún otro vector,

$$\vec{\omega} \neq \frac{d}{dt} \vec{\Lambda}$$

Para demostrarlo basta suponer que si existe el vector $\vec{\Lambda}$ debería poder expresarse en función de los ángulos de Euler ya que estos determinan la orientación del sólido, $\vec{\Lambda}(\psi, \theta, \varphi)$. Para demostrar que tal vector no existe basta con derivar cualquiera de sus componentes y comparar con las derivadas de $\vec{\omega}$,

$$\omega_x = \frac{d}{dt} \Lambda_x \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta = \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \varphi} \dot{\varphi}$$

que claramente no puede darse, basta comprobar que la derivada cruzada no coincide

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \theta} &= \cos \psi \\ \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \varphi} &= \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Lambda_x}{\partial \varphi \partial \theta} \neq \frac{\partial^2 \Lambda_x}{\partial \theta \partial \varphi}$$

El hecho de que el vector $\vec{\omega}$ no sea un función integrable hace que se le llame *vector rotación* para distinguirlo de la velocidad angular que es siempre la derivada de un ángulo respecto del tiempo.

En el movimiento esférico todas las magnitudes dinámicas del sólido se pueden expresar en función de $\vec{\omega}$, así, la cantidad de movimiento

$$\vec{p} = m \vec{v}_G = m \vec{\omega} \times \vec{r}_G$$

la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}_G \vec{\omega}$$

o desde el punto fijo

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}_O \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O$$

El desplazamiento infinitesimal sería, $d\vec{r}_\alpha = \vec{v}_\alpha dt = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha dt$, por lo que el trabajo quedaría,

$$dW = dT = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega} dt$$

12.2. Aplicación del teorema del momento cinético. Ecuaciones de Euler.

Sea $Oxyz$ un sistema de referencia fijo (inercial) que llamaremos *espacio* y consideremos otro sistema de referencia $Ox_1x_2x_3$ que se mueva con el sólido y cuyos ejes coincidan con las direcciones principales, le llamaremos *cuervo*. En este sistema de referencia el tensor de inercia es diagonal y sus componentes no cambian con el tiempo

$$[I_O] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

En este sistema de referencia el momento cinético se expresa como:

$$\vec{L}_O = I_1 \omega_1 \hat{u}_1 + I_2 \omega_2 \hat{u}_2 + I_3 \omega_3 \hat{u}_3$$

y su derivada viene dada por

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\text{móvil}} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O$$

que igualada al momento de las fuerzas da lugar a un sistema de tres ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned} \right\}$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Euler* y permiten determinar la evolución temporal de $\vec{\omega}$ respecto de los ejes móviles conocidas las componentes M_1 , M_2 y M_3 de los momentos aplicados.

**12.3. Integración de las ecuaciones de Euler en ausencia de pares. Casos de elipsoide de revolución y elipsoide asimétrico.**

Comenzamos resolviendo el caso más sencillo, $\vec{M}_O = \vec{0}$, es decir, movimiento en ausencia de pares que también se conoce por movimiento por inercia, ya que sería el movimiento que haría el sólido aislado en ausencia de fuerzas aplicadas. Las ecuaciones de Euler quedan,

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

y existen dos constantes del movimiento

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= c\vec{t}\vec{e} \\ T &= cte \end{aligned}$$

que nos van a permitir expresar dos de las componentes de $\vec{\omega}$ en función de la tercera, reduciendo de este modo la resolución de las ecuaciones de Euler a una integral.

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que si $\vec{L}_O = c\vec{t}\vec{e}$, lo serán cada una de sus componentes en el sistema fijo L_x, L_y, L_z , no así sus componentes en el sistema móvil L_1, L_2, L_3 . Dado que $\vec{L}_O \cdot \vec{L}_O$ es un escalar y no depende de la orientación de la base, tomamos como constantes

$$\begin{aligned} L^2 &= I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 \\ 2T &= I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \end{aligned}$$

Caso con el elipsoide de inercia esférico.

El elipsoide de inercia es una esfera si los tres momentos principales son iguales, $I_1 = I_2 = I_3$. En este caso el momento cinético y la rotación son siempre paralelos y la conservación del momento cinético lleva a que la rotación también es constante. El movimiento será por tanto una rotación uniforme $\omega = cte$ alrededor de una dirección fija.

Caso con el elipsoide de inercia de revolución.

Suponiendo que el eje de simetría del elipsoide sea el eje 3, entonces, $I_1 = I_2 \neq I_3$ y las ecuaciones de Euler quedan,

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_1 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La tercera ecuación nos dice que la componente 3 de la rotación permanece constante, $\omega_3 = cte$. Las otras dos forman un sistema que puede resolverse fácilmente si se escriben en la forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde $\Omega = \omega_3(I_3 - I_1)/I_1$ es una constante. Derivando la primera y sustituyendo en ella la segunda,

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

que es la ecuación de una oscilación armónica, $\omega_1(t) = A \cos(\Omega t + \delta)$. Despejando ω_2 de la primera ecuación del sistema se tiene $\omega_2(t) = -\dot{\omega}_1/\Omega = A \sin(\Omega t + \delta)$. Finalmente,

$$\vec{\omega}(t) = A [\cos(\Omega t + \delta) \hat{u}_1 + \sin(\Omega t + \delta) \hat{u}_2] + \omega_3 \hat{u}_3$$

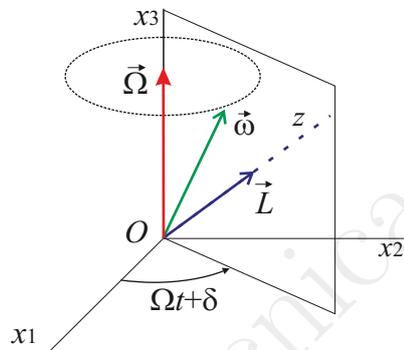
es un vector de módulo constante que gira alrededor del eje Ox_3 con velocidad angular constante Ω .

Para describir el movimiento del cuerpo nos fijamos en que el movimiento del sistema $Ox_1x_2x_3$ es el mismo que el del cuerpo; el EIR es la recta que pasa por el punto fijo O y tiene la dirección de $\vec{\omega}$; eligiendo el eje Oz del sistema fijo en el espacio según la dirección \vec{L}_O , que en ese sistema permanece constante, el movimiento del momento cinético en el sistema móvil nos permitirá obtener el del cuerpo en el sistema fijo en el espacio.

En el sistema cuerpo tenemos,

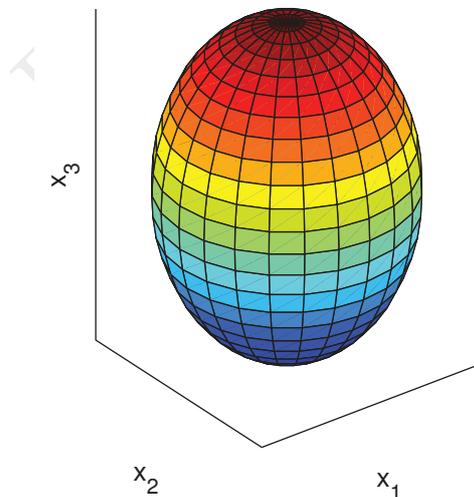
$$\vec{L}_O = I_1 A [\cos(\Omega t + \delta) \hat{u}_1 + \sin(\Omega t + \delta) \hat{u}_2] + I_3 \omega_3 \hat{u}_3$$

que realiza el mismo movimiento que la rotación alrededor del eje Ox_3 , manteniéndose en un mismo plano \hat{u}_3 , $\vec{\omega}$ y \vec{L}_O . Al mantenerse además constantes los ángulos que forma el EIR con el eje Ox_3 y con el eje Oz , los axoides móvil y fijo son dos conos de revolución con vértice en O .

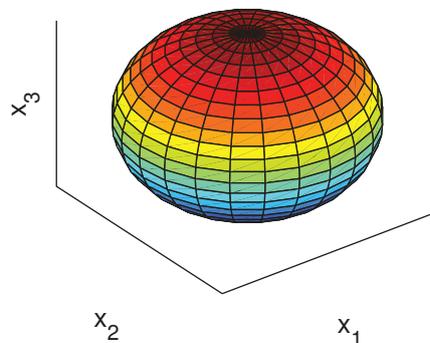


Se dan dos situaciones que están relacionadas con la forma del elipsoide de inercia: si $I_1 = I_2 > I_3$ el eje polar es mayor que el diámetro ecuatorial y se dice que el elipsoide es *prolato* (tiene forma de pepino o de balón de rugby) y si $I_1 = I_2 < I_3$ el eje polar es menor que el diámetro ecuatorial y el elipsoide es *oblato* (tiene forma de naranja).

$$I_1 = I_2 > I_3$$



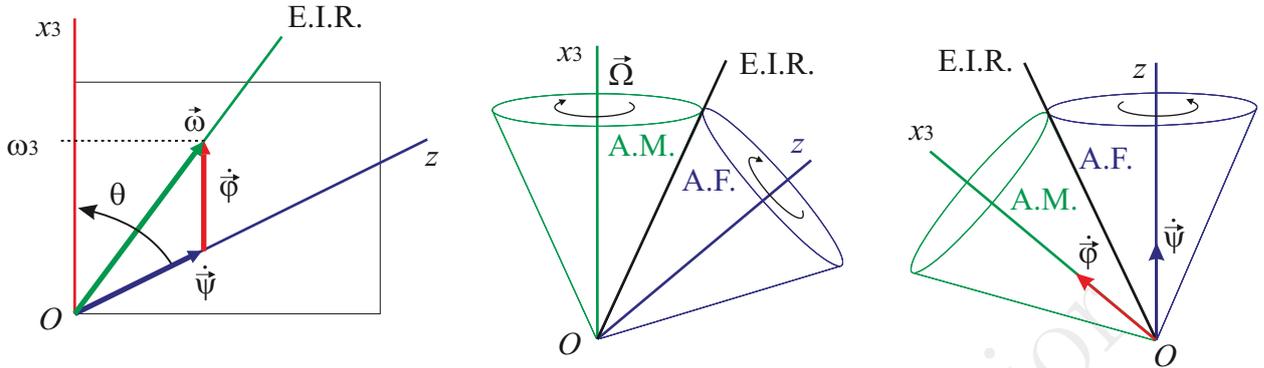
$$I_1 = I_2 < I_3$$



Si $I_1 > I_3$ el vector rotación está en medio de Ox_3 y Oz y los axoides ruedan sin deslizar uno por el exterior del otro. La velocidad angular Ω tiene el signo contrario de ω_3 y al pasar al sistema fijo el movimiento de $\vec{\omega}$ y de Ox_3 se invierte y acaba teniendo el mismo sentido que ω_3 , se denomina *precesión directa*.

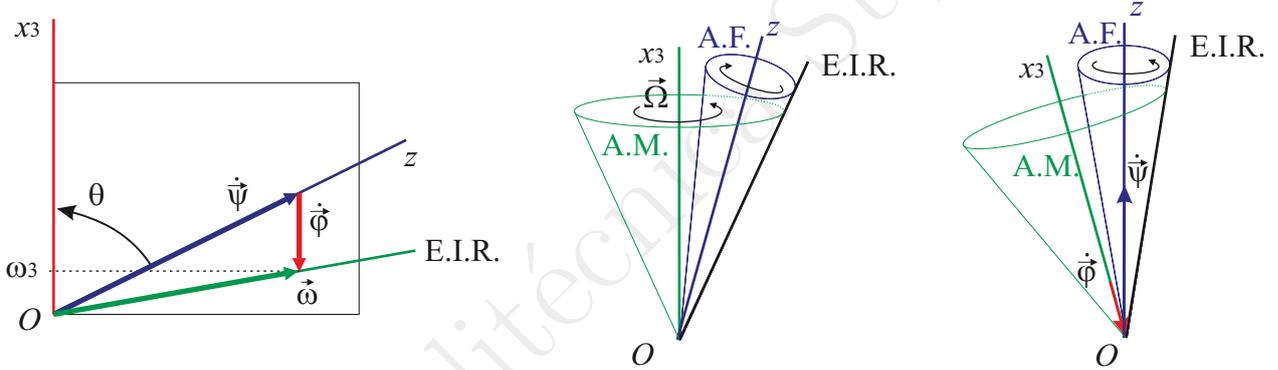


Precesión Directa ($I_1 > I_3$)



Si por el contrario $I_1 < I_3$ es Oz el que está en medio de Ox_3 y $\vec{\omega}$, en el sistema del cuerpo el axoide fijo rueda por el interior del fijo. Cambiando al sistema espacio es el axoide móvil el que rueda por el exterior del fijo en sentido contrario a Ω y por tanto en sentido contrario a ω_3 , se denomina *precesión retrógrada*.

Precesión Retrograda ($I_1 < I_3$)



Ángulos de Euler. Para determinar el movimiento final del cuerpo obtendremos los ángulos de Euler. El ángulo de nutación es el que forman Ox_3 y Oz y puede determinarse fácilmente con la tercera componente del momento cinético,

$$L_3 = I_3 \omega_3 = L \cos \theta \Rightarrow \theta = \arccos \left(\frac{I_3 \omega_3}{L} \right) = cte$$

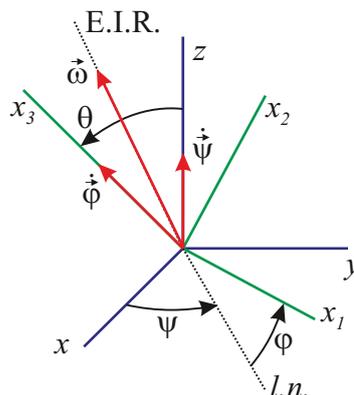
La componente 1 nos permite obtener la rotación de precesión ya que $\dot{\theta} = 0$,

$$L_1 = I_1 \omega_1 = I_1 \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi = L \sin \theta \sin \varphi \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L}{I_1} = cte \Rightarrow \psi = \psi(0) + \frac{L}{I_1} t$$

La rotación propia también es constante y se obtiene de la componente 3,

$$L_3 = I_3 \omega_3 = I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = L \cos \theta \Rightarrow \dot{\varphi} = \left(\frac{L}{I_3} - \dot{\psi} \right) \cos \theta = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 = cte$$

que es igual pero opuesta a la precesión del EIR vista en el sistema móvil, $\dot{\varphi} = -\Omega$.



Caso general: elipsoide de inercia asimétrico

Considerando el caso más general en que los tres momentos de inercia son distintos y redefiniendo los ejes principales de manera que $I_1 > I_2 > I_3$, se tienen dos ecuaciones

$$\begin{aligned} 2TI_1 - L^2 &= I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2 + I_3(I_1 - I_3)\omega_3^2 \geq 0 \\ L^2 - 2TI_3 &= I_1(I_1 - I_3)\omega_1^2 + I_2(I_2 - I_3)\omega_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

que permiten expresar ω_1 y ω_3 en función de ω_2 :

$$\begin{aligned} \omega_3^2 &= \frac{2TI_1 - L^2 - I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2}{I_3(I_1 - I_3)} \\ \omega_1^2 &= \frac{L^2 - 2TI_3 - I_2(I_2 - I_3)\omega_2^2}{I_1(I_1 - I_3)} \end{aligned}$$

Así, la segunda ecuación de Euler se reduce a:

$$\frac{d\omega_2}{dt} = \pm \frac{\sqrt{2TI_1 - L^2 - I_2(I_1 - I_2)\omega_2^2} \sqrt{L^2 - 2TI_3 - I_2(I_2 - I_3)\omega_2^2}}{I_2 \sqrt{I_1 I_3}}$$

que conduce a una integral elíptica y permite obtener $\omega_2 = \omega_2(t)$ y con ello $\omega_1 = \omega_1(t)$ y $\omega_3 = \omega_3(t)$.

Ángulos de Euler. Una vez conocida $\vec{\omega}(t)$ en los ejes principales pueden obtenerse los ángulos de Euler, para ello elegiremos la orientación del sistema fijo en el espacio de manera que el eje Oz coincida con la dirección del momento cinético \vec{L}_O que no varía con el tiempo. Así,

$$\vec{L}_O = L \hat{k} = I_1 \omega_1 \hat{u}_1 + I_2 \omega_2 \hat{u}_2 + I_3 \omega_3 \hat{u}_3$$

y aplicando la matriz de transformación del sistema espacio al cuerpo,

$$\begin{aligned} L_1 &= I_1 \omega_1 = L \sin \theta \sin \varphi \\ L_2 &= I_2 \omega_2 = L \sin \theta \cos \varphi \\ L_3 &= I_3 \omega_3 = L \cos \theta \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \frac{L_3}{L} = \arccos \frac{I_3 \omega_3(t)}{L} \\ \varphi &= \arctan \frac{L_1}{L_2} = \arctan \frac{I_1 \omega_1(t)}{I_2 \omega_2(t)} \end{aligned}$$

Para determinar el ángulo de precesión utilizamos la expresión de la rotación de precesión en función de las componentes de la rotación en el sistema móvil,

$$\dot{\psi} = \frac{\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi}{\sin \theta} = L \frac{I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2}{I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2}$$

que una vez integrada nos proporciona $\psi(t)$.

Estabilidad de la rotación alrededor de los ejes principales.

Si la rotación coincide con una de las direcciones principales, el momento cinético y la rotación son paralelas y la conservación del momento cinético lleva a que la rotación se mantiene constante y por eso a los ejes principales se les llama también *ejes permanentes*. Si hacemos que $\vec{\omega}$ se separe ligeramente de una de las direcciones principales puede ocurrir que la rotación se mantenga próxima a la dirección principal o que inicie un movimiento en el que se aleja rápidamente de la dirección inicial, en el primer caso diremos que la rotación permanente es estable y en el segundo que es inestable.



Este resultado se puede obtener con las ecuaciones de Euler considerando que en las proximidades de un eje principal la componente de la rotación según ese eje va a ser mucho mayor que las otras dos. Así, considerando un sólido tal que $I_1 > I_2 > I_3$, y analizando el caso de rotación próxima al eje 1, $\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$, entonces,

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 & \Rightarrow \omega_1 \approx \text{cte} \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 & \Rightarrow \dot{\omega}_2 + \frac{(I_1 - I_3) \omega_1}{I_2} \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 & \Rightarrow \dot{\omega}_3 - \frac{(I_1 - I_2) \omega_1}{I_3} \omega_2 = 0 \end{cases}$$

las dos últimas pueden escribirse en la misma forma,

$$\ddot{\omega}_k + C \omega_k = 0 \quad k = 2, 3$$

donde la constante C

$$C = \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 > 0$$

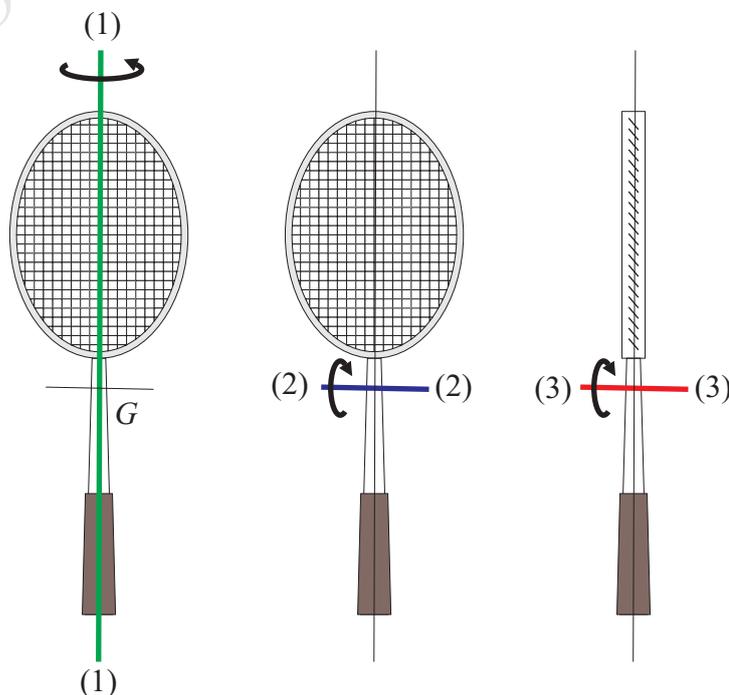
es en este caso positiva lo que nos indica que la solución de las componentes 2 y 3 son armónicas y se mantendrán siempre en valores pequeños.

En cambio, para el eje mediano, 2, el mismo procedimiento nos llevaría a una constante B negativa,

$$B = \frac{(I_2 - I_3)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3} \omega_2^2 < 0$$

y la solución sería una combinación de exponenciales crecientes y decrecientes con lo que la rotación terminaría alejándose del eje 2, demostrando que la rotación alrededor del eje mediano es inestable.

Este resultado se conoce por el teorema de la raqueta de tenis (Antonio Rañada, Dinámica Clásica, p. 458) y demuestra el hecho de que una raqueta de tenis puede hacerse girar fácilmente a lo largo del eje del mango (1) o en el plano de la pala (3) pero muy difícilmente alrededor del eje (2) normal a los dos anteriores. Los valores aproximados de los momentos principales para una raqueta de tenis son $I_1 \approx 0,15 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$, $I_2 \approx 1,49 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ e $I_3 \approx I_1 + I_2$.



12.4. Movimiento de un sólido pesado alrededor de un punto fijo. Trompo de Lagrange.

El movimiento esférico de un cuerpo sometido al par de su peso no es en general un problema integrable. Existen solamente unos casos especiales en los que puede obtenerse la solución con ayuda de ciertas constantes del movimiento asociadas a sus simetrías.

El caso que estudiaremos se conoce por *trompo de Lagrange* y consiste en un sólido con simetría de revolución que se mueve bajo el par de su propio peso alrededor de un punto fijo O , de su eje de simetría, que no coincida con G . Si G coincide con O tendríamos el movimiento por inercia ya estudiado y que se conoce también por *trompo de Euler*.

El trompo de Lagrange es también un buen ejemplo de la aplicación de las ecuaciones de la mecánica analítica y por ello las aplicaremos al máximo de manera que podamos ver su potencialidad.

Las dos hipótesis que simplifican el problema son:

1. Sólido con simetría de revolución.
 - a) El eje de simetría es principal y cualesquiera dos ejes perpendiculares también son principales y sus momentos de inercia iguales.
 - b) El centro de masas G está sobre el eje de simetría.
2. El punto fijo pertenece al eje de simetría.

Estas simetrías hacen que el sistema no cambie si lo giramos alrededor del eje de simetría del cuerpo o alrededor de la vertical. Tomando un sistema de referencia fijo, $Oxyz$ con el eje Oz vertical y un sistema móvil $Ox_1x_2x_3$ tal que Ox_3 coincida con el eje de simetría del trompo, se tiene que $I_1 = I_2 \neq I_3$.

Expresando la orientación del sólido mediante los ángulos de Euler (ψ, θ, φ) la rotación $\vec{\omega}$ en función de las rotaciones de Euler queda

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{u}_n + \dot{\varphi} \hat{u}_3$$

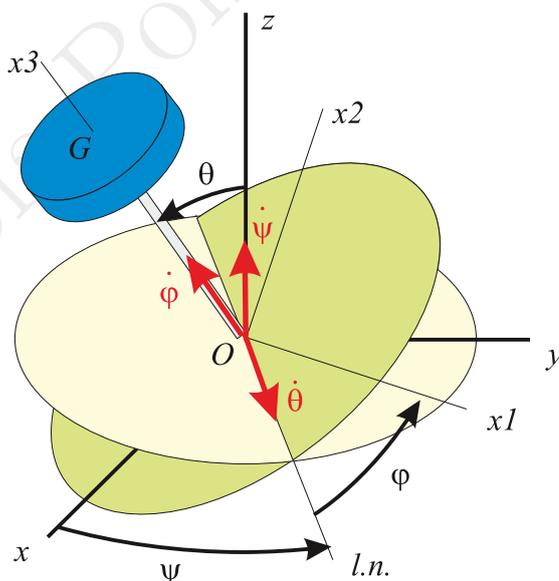


Figura 2: Trompo de Lagrange con los ángulos y las rotaciones de Euler.

Ecuaciones de Lagrange

Las simetría del problema para el eje Oz hace que la coordenada ψ (ángulo de precesión) sea cíclica, y lo mismo ocurre con el eje del trompo Ox_3 y la coordenada φ (ángulo de rotación propia). Para la última coordenada θ (ángulo de nutación) no hay ninguna simetría pero puede integrarse utilizando la



conservación de la energía que está asociada a que el problema no depende de la elección del origen de tiempos. Obtendremos el valor de las tres constantes a partir de la función lagrangiana.

Como es un sólido con un punto fijo y la única fuerza que trabaja es el peso,

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}^O \vec{\omega} - m g z_G = \frac{1}{2} [I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2] - m g z_G$$

utilizando como coordenadas los ángulos de Euler y llamado $\ell = \overline{OG}$ a la distancia entre el centro de masas y el punto fijo,

$$z_G = \ell \cos \theta$$

y las componentes del vector rotación en ejes principales

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})$$

de manera que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 \right] - m g \ell \cos \theta$$

Vemos pues que las coordenadas ψ y φ son cíclicas y las constantes del movimiento asociadas son las componentes del momento cinético según los ejes Oz y Ox_3 respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 &\Rightarrow p_\psi = I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta = cte = L_z \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 &\Rightarrow p_\varphi = I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = cte = L_3 \end{aligned}$$

La tercera constante del movimiento es del tipo energía (el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo) que en este caso coincide con la suma de la energía cinética y el potencial porque es un sistema natural (holónomo y esclerónomo),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow h = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = cte = T + V = E$$

donde

$$E = \frac{1}{2} \left[I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 \right] + m g \ell \cos \theta$$

Problema unidimensional equivalente

Las constantes del movimiento asociadas a las coordenadas cíclicas nos permiten eliminarlas de la expresión de la energía y obtener una ecuación en la que solamente aparecen la coordenada no cíclica (ángulo de nutación) y constantes. Despejando la velocidad podremos reducir el problema a una integración, veámoslo.

Para despejar las velocidades de precesión y rotación propia de las constantes L_z y L_3 nos fijamos en que $(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = \omega_3 = L_3 / I_3$, por tanto,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} = \dot{\psi}(\theta) \\ \dot{\varphi} &= \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta = \dot{\varphi}(\theta) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión de la energía

$$E = T + V = cte = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + m g \ell \cos \theta + \frac{L_3^2}{2 I_3}$$

Así, definiendo el potencial efectivo:

$$V_{\text{ef}}(\theta) = m g \ell \cos \theta + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta}$$

y eliminado el término constante de la energía mediante un cambio de origen,

$$E' = E - \frac{L_3^2}{2I_3} = cte = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + V_{ef}(\theta)$$

se tiene,

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_1}(E' - V_{ef})} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow t = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}[E' - V_{ef}(\theta)]}}$$

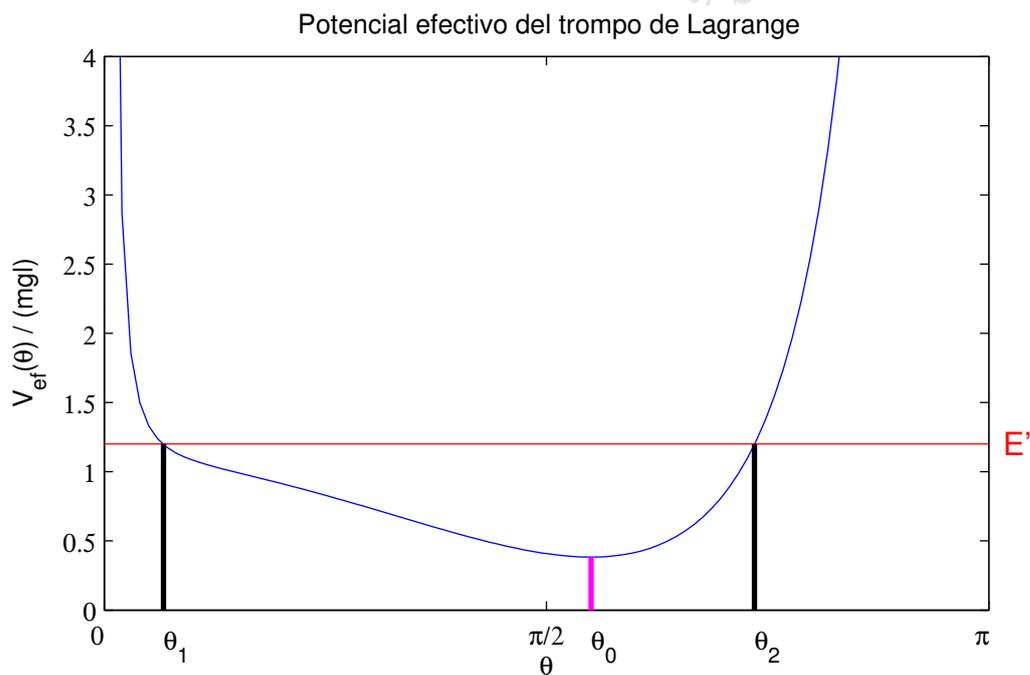
que conduce a una integral elíptica.

La solución para el movimiento de nutación $\theta = \theta(t)$ permite obtener las rotaciones de Euler $\psi(t)$ y $\varphi(t)$ que nuevamente integradas permiten obtener $\psi(t)$ y $\varphi(t)$ con lo que el problema dinámico estaría formalmente resuelto.

Clasificación de los movimientos

Se pueden obtener las características más relevantes del movimiento sin necesidad de realizar las integraciones, analizando el potencial efectivo.

Para $L_z \neq L_3$ el potencial efectivo tiene dos asíntotas verticales en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ y un mínimo en $\theta = \theta_0$.



Si la energía coincide con el mínimo del potencial efectivo $E' = V_{ef}(\theta_0)$, se tiene que el ángulo de nutación es constante y con él la rotación propia y la rotación de precesión. El movimiento consiste en una precesión uniforme del eje del trompo que describe un cono circular. Este caso se conoce por *precesión estacionaria* y volveremos sobre él más adelante.

Para $E' > V_{ef}(\theta_0)$, la ecuación $E' = V_{ef}(\theta)$ tiene dos raíces θ_1 y θ_2 que limitan la inclinación del eje de simetría con la vertical,

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

estos puntos de retroceso se llaman *ángulos absidales*. Se tiene para la coordenada θ un movimiento unidimensional y acotado y por lo tanto periódico. Si el ángulo θ oscila, también lo hará la precesión que además puede cambiar de signo cuando

$$\theta = \theta_3 = \arccos \frac{L_z}{L_3} \quad \text{y} \quad \theta_1 \leq \theta_3 < \theta_2$$

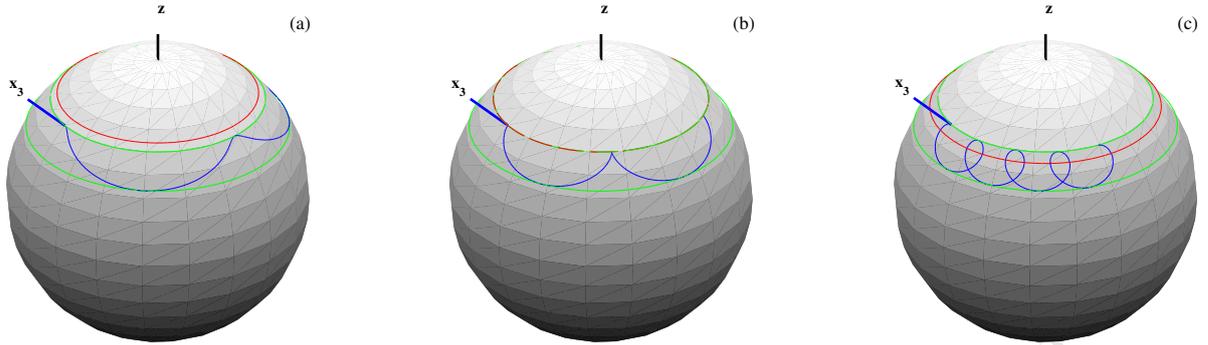


Figura 3: Representación de diferentes movimientos del trompo: (a) $\theta_3 < \theta_1$, (b) $\theta_3 = \theta_1$ y (c) $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$

Se suele representar el movimiento trazando la curva que describe la intersección del eje del trompo con una esfera de radio unidad centrada en el punto fijo O , como se muestra en la figura 3.

En el caso (a) el ángulo al que se anula la precesión (línea roja) está fuera de la región en la que se realiza el movimiento (entre las líneas verdes) y por tanto la precesión nunca cambia de signo, aumenta y disminuye pero sin llegar a anularse. En el caso (b) la precesión se anula en el valor absidal menor y aparecen las cúspides. En el caso (c) el valor al que se anula la precesión está dentro de la región en la que se realiza el movimiento dando lugar a dos zonas una con precesión negativa y otra con precesión positiva. La trayectoria sobre la esfera realiza unos rizos pero con un valor neto distinto de cero lo que hace que el eje del trompo termine girando alrededor de la vertical.

Función de Hamilton y función de Routh

Para eliminar las coordenadas cíclicas podríamos haber usado tanto la función de Hamilton como la función de Routh. Así para la primera tenemos que la coordenada no cíclica,

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}$$

y entonces, para obtener la función de Hamilton tenemos que sustituir las velocidades por sus momentos conjugados en la función energía $h = T + V$,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ \dot{\varphi} &= \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{I_1} \end{aligned}$$

de manera que se obtiene

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2I_3} + mgl \cos \theta = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{L_3^2}{2I_3} + V_{\text{ef}}(\theta)$$

cuyo valor permanece constante, $\mathcal{H} = cte = E$, y permite integrar el movimiento.

De forma similar, la función de Routh sería,

$$\mathcal{R} = p_\psi \dot{\psi} + p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = I_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + I_3 \left(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \right)^2 - \mathcal{L} = -\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{L_3^2}{2I_3} + V_{\text{ef}}(\theta)$$

Prescindiendo del término constante $L_3^2/(2I_3)$ que puede ser añadido al potencial efectivo, la diferencia entre la función de Hamilton y la de Routh es el signo de la energía cinética de la coordenada de nutación, positiva para la de Hamilton (como corresponde a $\mathcal{H} = T + V$) y negativa para la función de Routh (que es una lagrangiana para la coordenada no cíclica).

Ecuación del movimiento de nutación

Las ecuaciones canónicas para la coordenada no cíclica serían,

$$\begin{aligned}\dot{p}_\theta &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta} = m g \ell \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)(L_3 - L_z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{I_1}\end{aligned}$$

que conducirían a la ecuación del movimiento de nutación,

$$I_1 \ddot{\theta} = m g \ell \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)(L_3 - L_z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} \quad (12.35)$$

Esta misma ecuación se obtiene con la función de Routh,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} = 0 = \frac{d}{dt} (-I_1 \dot{\theta}) - \frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta}$$

de donde

$$I_1 \ddot{\theta} = -\frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta} = m g \ell \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)(L_3 - L_z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta}$$

Para estudiar el movimiento de nutación se suele hacer el cambio de variable $u \equiv \cos \theta$ (como $\theta \in [0, \pi]$, $u \in [-1, +1]$) y se definen las constantes $a = L_z/I_1$, $b = L_3/I_1$, $\alpha = 2E'/I_1$ y $\beta = 2mg\ell/I_1$ de manera que la ecuación diferencial del movimiento de nutación queda,

$$\ddot{u}(1-u^2) + u\dot{u}^2 + \frac{\beta}{2}(1-u^2)^2 - (b-au)(a-bu) = 0$$

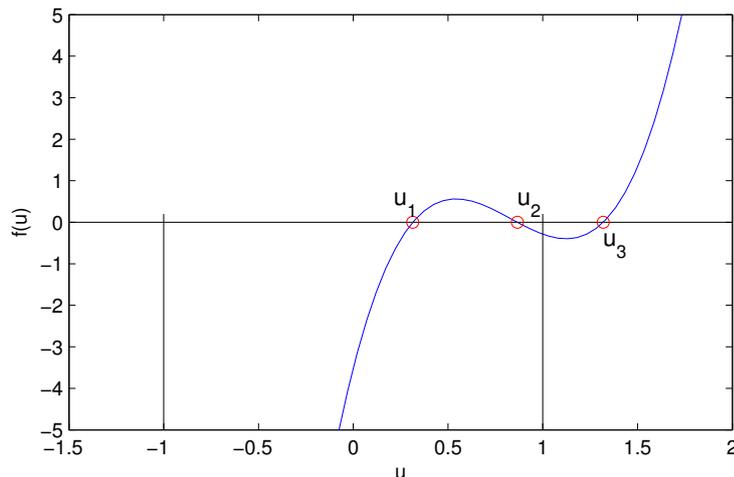
Podemos reducir un orden la ecuación diferencial si utilizamos el problema unidimensional equivalente sustituyendo el ángulo de nutación por la variable u ,

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta} + V_{\text{ef}}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{\dot{u}^2}{1-u^2} + u + \frac{(a-bu)^2}{\beta(1-u^2)}$$

que puede escribirse como $\dot{u}^2 = f(u)$ donde

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (a-bu)^2$$

que es un polinomio cúbico en el que una de las raíces, u_3 , es siempre mayor que +1. Las otras dos raíces son reales y definen los puntos de retroceso ($u_1 = \cos \theta_2$ y $u_2 = \cos \theta_1$).



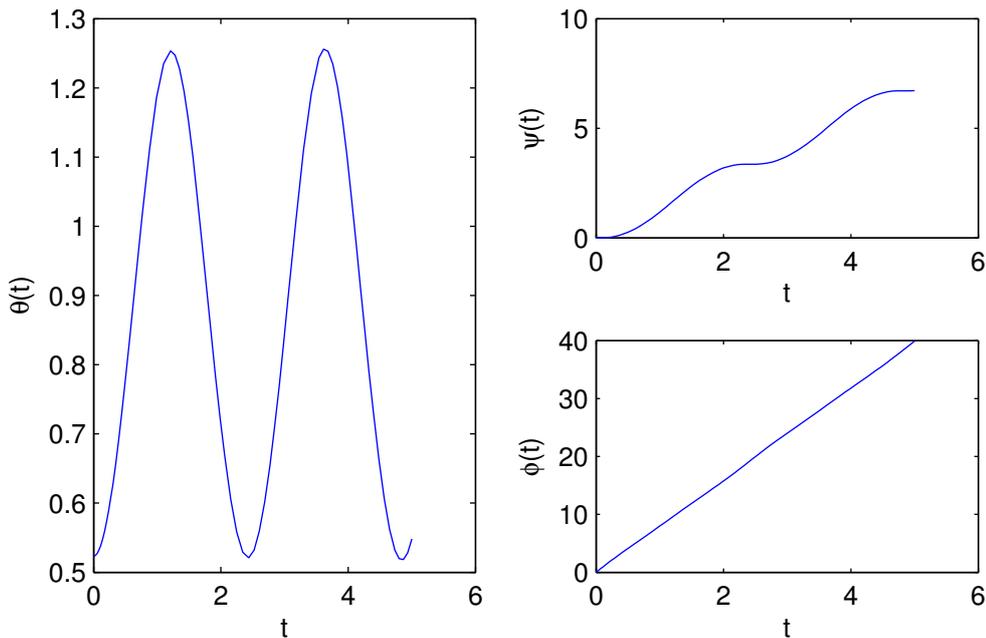


La solución del movimiento se obtendría de la integral

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

y conocida la solución $u(t) = \cos(\theta(t))$ se pueden integrar los otros dos ángulos,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{a - bu}{1 - u^2} \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{I_1}{I_3} a - \frac{a - bu}{1 - u^2} u$$



Condición de precesión estacionaria

Determinaremos ahora las condiciones en que se da el movimiento de precesión estacionaria. Se llama así al caso en el que el trompo se mueve manteniendo el ángulo de nutación constante de manera que las rotaciones de precesión y rotación propia son también uniformes. Para que esto ocurra la energía debe coincidir con el mínimo del potencial efectivo y por tanto, $\theta = \theta_0$, donde

$$\left. \frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad m g \ell \sin \theta_0 - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta_0)(L_3 - L_z \cos \theta_0)}{I_1 \sin^3 \theta_0} = 0$$

Sustituyendo las constantes del movimiento por su relación con los ángulos de Euler, se obtiene,

$$\left\{ (I_1 - I_3) \dot{\psi}^2 \cos \theta_0 - I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} + m g \ell \right\} \sin \theta_0 = 0$$

Olvidándonos de los casos en los que el trompo está en equilibrio vertical ($\theta = 0$ ó $\theta = \pi$), la condición de precesión estacionaria

$$(I_1 - I_3) \cos \theta_0 \dot{\psi}^2 - I_3 \dot{\varphi} \dot{\psi} + m g \ell = 0$$

es una ecuación de segundo grado en la precesión y tendrá dos soluciones,

$$\dot{\psi} = \frac{I_3 \dot{\varphi} \pm \sqrt{(I_3 \dot{\varphi})^2 - 4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0}}{2 (I_1 - I_3) \cos \theta_0}$$

siempre que se cumpla

$$\dot{\varphi}^2 \geq \frac{4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0}{I_3^2}$$



13. Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio

- 13.1 Pequeñas oscilaciones alrededor de posiciones de equilibrio.
- 13.2 Determinación de frecuencias naturales y modos de oscilación.
- 13.3 Caracterización del movimiento según los distintos modos de oscilación. Estabilidad del movimiento.
- 13.4 Respuesta temporal del sistema ante fuerzas aplicadas. Vibraciones en máquinas como oscilaciones forzadas.

Las pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio son uno de los ejemplos más bellos de la potencia de los métodos analíticos de la mecánica, a la vez que sirven de base para el estudio de otros problemas de gran importancia como la Física del Estado Sólido, Vibraciones Mecánicas, Estabilidad de Estructuras, Circuitos Eléctricos Acoplados, etc.

13.1. Pequeñas oscilaciones alrededor de posiciones de equilibrio.

Las oscilaciones de cualquier sistema por complejo que sea pueden estudiarse siguiendo un procedimiento general que surge de la simplificación de que los movimientos sean pequeños. Para mayor claridad aplicaremos el método primero a un sistema con 1 grado de libertad y luego lo extenderemos a sistemas con N grados de libertad.

Oscilaciones libres en un sistema con 1 grado de libertad.

Consideremos un sistema conservativo, holónomo y esclerónomo cuya posición viene determinada por una única coordenada q . Si el potencial $V = V(q)$ tiene un mínimo en $q = q_0$ se cumple,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dV}{dq}\right)_{q_0} &= 0 \\ \left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)_{q_0} &> 0 \end{aligned}$$

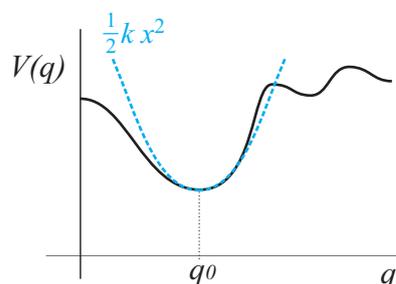
de manera que para posiciones próximas al equilibrio $q = q_0$ podemos desarrollar el potencial en serie de potencias,

$$V(q) = V(q_0) + \left(\frac{dV}{dq}\right)_{q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)_{q_0} (q - q_0)^2 + \dots \approx Cte + \frac{1}{2}k (q - q_0)^2$$

siendo $k = (d^2V/dq^2)_{q_0}$ una constante positiva. Utilizando como coordenada el desplazamiento desde la posición de equilibrio, $x \equiv q - q_0$, el potencial quedaría

$$V(x) \approx \frac{1}{2}k x^2$$

que tiene la misma forma que el potencial elástico de un muelle de rigidez k siendo x el alargamiento. Desde el punto de vista del potencial lo que estamos haciendo es aproximararlo alrededor del mínimo por una parábola con la misma curvatura.



La energía cinética también se expresa en función de q y su derivada ya que para cualquier partícula del sistema $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q)$ y entonces

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} f(q) \dot{q}^2$$

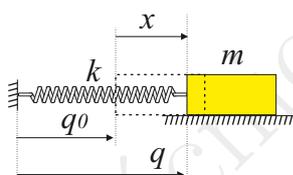
es una función cuadrática de la velocidad generalizada. Para valores próximos a la posición de equilibrio podemos aproximar $f(q) \approx f(q_0)$ que es una constante positiva ya que $T > 0$ si $\dot{q} \neq 0$. Llamando $m \equiv f(q_0)$ y teniendo en cuenta que $\dot{x} = \dot{q}$,

$$T \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

El lagrangiano del sistema se aproximaría por

$$\mathcal{L} = T - V \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

que tiene la misma forma que el de una masa m moviéndose sobre una línea recta y unida a un muelle de rigidez k , siendo x la separación desde la posición de equilibrio, es decir, el lagrangiano de un oscilador armónico.



La ecuación del movimiento será,

$$m \ddot{x} + k x = 0$$

y su solución

$$x(t) = q(t) - q_0 = A \cos(\omega t + \delta)$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia de las oscilaciones, A la amplitud y δ la fase inicial. Nótese que A y δ dependen de las condiciones iniciales ($x(0) = A \cos \delta$, $\dot{x}(0) = -A\omega \sin \delta$) mientras que ω no y su valor depende de las propiedades del sistema. Además como k y m son positivas ω es siempre un número real.

Si tomamos como ejemplo el péndulo formado por una masa puntual,

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m g \ell \cos \theta$$

el potencial tiene un mínimo para $\theta_0 = 0$ y la segunda derivada en el equilibrio nos daría la constante

$$k_{\text{eq}} = \left(\frac{d^2 V}{d\theta^2} \right)_{\theta_0} = m g \ell \cos \theta_0 = m g \ell$$

De forma similar para la energía cinética

$$m_{\text{eq}} = \left(\frac{d^2 T}{d\dot{\theta}^2} \right)_{\theta_0} = m \ell^2$$

de manera que la frecuencia propia resulta

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eq}}}{m_{\text{eq}}}} = \sqrt{\frac{m g \ell}{m \ell^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

que coincide con el valor que obtuvimos en la aproximación de ángulos pequeños.

**13.1.1. Oscilaciones libres en un sistema con N grado de libertad.**

Extenderemos el proceso anterior para un sistema conservativo, holónomo y esclerónomo con N grados de libertad, q_1, \dots, q_N . En la posición de equilibrio el potencial es estacionario:

$$V(q_1, \dots, q_N) \Rightarrow Q_i = - \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_0 = 0, i = 1, \dots, N$$

Desarrollando el potencial alrededor del equilibrio se tiene una constante, el término lineal sería nulo y el primer término significativo sería el cuadrático,

$$V(q_1, \dots, q_N) = V_0 + 0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N k_{ij} (q_i - q_i^0) (q_j - q_j^0) + \dots$$

siendo

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$$

Utilizando los desplazamientos desde el equilibrio $x_i = q_i - q_i^0$, entonces:

$$V(x_1, \dots, x_N) \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j$$

donde ya hemos prescindido de la constante V_0 que no tiene ningún efecto. El potencial se convierte en una forma cuadrática cuya matriz de coeficientes es simétrica. Si la posición de equilibrio es estable, el potencial debe tener un mínimo lo cual hace que la forma cuadrática sea definida positiva.

Nota. La condición que debe cumplir la matriz k_{ij} para que la forma cuadrática sea definida positiva es que todos los menores principales tienen determinante positivo,

$$|k_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & \dots & k_{NN} \end{vmatrix} > 0$$

Para determinar el movimiento será necesario conocer además la energía cinética. Considerando otra vez la situación más sencilla que es el sistema llamado “natural” (holónomo y esclerónomo):

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_N) \Rightarrow \vec{v}_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}$$

La energía será en este caso una función cuadrática de las velocidades,

$$T \equiv \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} f_{ij}(q_1, \dots, q_N) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

siendo las funciones

$$f_{ij}(q_1, \dots, q_N) = \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} = f_{ji}$$

En la aproximación de pequeños movimientos puede considerarse que estas funciones no varían apreciablemente de su valor en el equilibrio y escribirse:

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

siendo $m_{ij} = m_{ji} = f_{ij}(q_1^0, \dots, q_N^0)$.

La energía cinética es también una función cuadrática dada por una matriz simétrica que además es definida positiva (la energía cinética siempre es positiva).

Podemos escribir la función lagrangiana como diferencia de dos formas cuadráticas:

$$\mathcal{L} = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j \quad (13.36)$$

o en forma matricial

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \cdots & \dot{x}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

La ecuación del movimiento de la coordenada genérica x_i será:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j = 0$$

donde ya hemos utilizado que las matrices son simétricas.

Se observa claramente que los elementos no diagonales hacen que en la ecuación de la coordenada x_i aparezcan los desplazamientos de todas las coordenadas x_j y sus aceleraciones \ddot{x}_j . El efecto de estos términos es que en el movimiento de una coordenada influyen los de todas las demás, se dice que las oscilaciones están acopladas. Por ello ha de esperarse que el movimiento se realice también de forma colectiva.

Escribiendo de forma conjunta todas las ecuaciones del movimiento tenemos:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.37)$$

lo que constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogéneo.

13.2. Determinación de frecuencias naturales de oscilación.

Las soluciones de la ecuación 13.37 han de describir un movimiento del sistema de forma colectiva lo que puede obtenerse utilizando la misma dependencia temporal para todas las coordenadas pero con diferentes amplitudes y fases:

$$x_j = a_j e^{i\omega t} \quad (13.38)$$

con a_j constantes complejas. En forma matricial:

$$X = A e^{i\omega t}$$

Introduciendo esta función en la ecuación del movimiento del sistema se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\{\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\} A = 0 \quad (13.39)$$

que constituye un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones (problema de valores propios). Se sabe de Álgebra Lineal que para que exista solución no trivial el determinante de la matriz de coeficientes ha de ser nulo:

$$\det \{\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\} = \begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & \cdots & k_{1N} - \omega^2 m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} - \omega^2 m_{NN} \end{vmatrix} = 0 \quad (13.40)$$

es la llamada *ecuación característica o secular*. Esta última ecuación conduce a un polinomio de grado N en ω^2 que tendrá, en principio, N raíces diferentes

$$\{\omega_\lambda^2; \lambda = 1 \dots N\}$$



que se denominan *frecuencias naturales o propias* del sistema y que dependen únicamente de los coeficientes k_{ij} y m_{ij} . Estas frecuencias naturales son características del sistema y constituyen los únicos valores para los que existe una solución armónica del tipo (13.38) alrededor de la posición de equilibrio.

Se puede demostrar (véase Apéndice al final de este tema) que en el problema de valores propios (13.39) todos los autovalores son reales cuando las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} son hermíticas, es decir, coinciden con su transpuesta conjugada. También es fácil comprobar que si las dos formas cuadráticas son definidas positivas los autovalores serán además positivos.

En el caso que estamos considerando las matrices son reales y simétricas y por tanto hermíticas. La energía cinética es una magnitud siempre positiva y por ello la forma cuadrática correspondiente es definida positiva. Para que el potencial sea definido positivo lo que tiene que ocurrir es que debe aumentar para cualquier valor del desplazamiento alrededor del equilibrio y esto sucede cuando el potencial es un mínimo. Por tanto podemos establecer que:

$$\text{Holónomo y Esclerónomo} + \text{Posición de Equilibrio Estable} \Rightarrow \omega_\lambda^2 > 0 \quad \lambda = 1 \dots N$$

13.3. Caracterización del movimiento según los distintos modos de oscilación. Estabilidad del movimiento.

Para cada una de las frecuencias naturales ω_λ puede resolverse el sistema lineal de ecuaciones (13.39), que ya no serán todas independientes, para determinar, por ejemplo, las relaciones entre la primera y el resto de las amplitudes:

$$a_{i\lambda} = a_{i\lambda}(a_{1\lambda}) ; i = 2 \dots N$$

Esas relaciones serán reales ya que los coeficientes del sistema (13.39) son reales y por ello las amplitudes pueden tomarse todas reales (véase Apéndice). La indeterminación planteada permite exigir una condición adicional de normalización, por ejemplo:

$$\mathbf{A}_\lambda^t \mathbf{M} \mathbf{A}_\lambda = \mathbf{1}$$

Se obtienen por tanto N soluciones independientes del sistema, correspondientes a los N valores de las frecuencias naturales ω_λ . La solución general será la combinación lineal de estas:

$$X = \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda A_\lambda e^{i\omega_\lambda t}$$

siendo C_λ constantes complejas. Tomando la parte real se obtiene:

$$X = \sum_{\lambda=1}^N A_\lambda \zeta_\lambda(t) \tag{13.41}$$

donde

$$\zeta_\lambda(t) = \text{Re}(C_\lambda e^{i\omega t}) = b_\lambda \cos(\omega_\lambda t + \delta_\lambda)$$

La solución general (13.41) del sistema (13.37) consiste en la superposición de N movimientos armónicos independientes, ζ_λ , con amplitudes (b_λ) y fases (δ_λ) arbitrarias pero con frecuencias totalmente determinadas que son precisamente cada una de las frecuencias naturales del sistema, ω_λ . A estas oscilaciones que representan los N movimientos diferentes que realiza el sistema se les llama *modos normales*.

La relación (13.41) entre los modos normales y los desplazamientos puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_N \end{bmatrix}$$

que es formalmente idéntica a la de una transformación de coordenadas, donde los desplazamientos desde el equilibrio x_j vienen dados en función de N nuevas cantidades, ζ_λ , que reciben el nombre de *coordenadas*

normales. Estas coordenadas normales cumplen una importante propiedad, su ecuación del movimiento es la del oscilador armónico:

$$\ddot{\zeta}_\lambda + \omega_\lambda^2 \zeta_\lambda = 0; \quad \lambda = 1 \dots N$$

y por tanto, utilizando estas nuevas coordenadas el sistema pasa de N osciladores acoplados a N osciladores independientes, cuyas frecuencias son precisamente las frecuencias naturales del sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (\dot{\zeta}_\lambda^2 - \omega_\lambda^2 \zeta_\lambda^2)$$

Relación entre la estabilidad y las frecuencias propias.

Los modos normales permiten establecer de forma sencilla cómo el signo de las raíces de la ecuación característica (13.40) es el que determina la estabilidad del movimiento alrededor de la posición de equilibrio:

$$\begin{aligned} \omega_\lambda^2 > 0, \forall \lambda &\Rightarrow \zeta_\lambda = b_\lambda \cos(\omega_\lambda t + \delta_\lambda) && \text{movimiento acotado} &\Rightarrow & \text{ESTABILIDAD} \\ \exists \lambda, \omega_\lambda^2 < 0 &\Rightarrow \zeta_\lambda = b_\lambda e^{p_\lambda t} + c_\lambda e^{-p_\lambda t} && \text{con } p_\lambda = \sqrt{-\omega_\lambda^2} &\Rightarrow & \text{INESTABILIDAD} \\ \exists \lambda, \omega_\lambda^2 = 0 &\Rightarrow \zeta_\lambda = b_\lambda + c_\lambda t && \text{mov. uniforme} &\Rightarrow & \text{INESTABILIDAD} \end{aligned}$$

Oscilaciones libres en presencia de rozamiento.

Podemos ver el efecto de las fuerzas de rozamiento sobre las oscilaciones del sistema alrededor del equilibrio considerando por simplicidad que las fuerzas de rozamiento son del tipo viscoso y pueden caracterizarse por la función de disipación de Rayleigh,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

que cerca de la posición de equilibrio puede aproximarse por

$$\mathcal{F} \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

Las ecuaciones del movimiento son ahora:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j = 0$$

es decir

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N} \\ & & \vdots \\ & & \alpha_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13.42)$$

que de nuevo es un sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales de segundo orden que admite una solución del tipo armónica (13.38) cuyas amplitudes son la solución del sistema lineal,

$$\{\mathbf{K} + i\omega\boldsymbol{\alpha} - \omega^2\mathbf{M}\} \mathbf{A} = 0 \quad (13.43)$$

y las frecuencias propias son las soluciones de una nueva ecuación secular,

$$\begin{vmatrix} k_{11} + i\omega\alpha_{11} - \omega^2 m_{11} & \cdots & k_{1N} + i\omega\alpha_{1N} - \omega^2 m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} + i\omega\alpha_{NN} - \omega^2 m_{NN} \end{vmatrix} = 0 \quad (13.44)$$

cuyas raíces serán en general complejas, $\omega_\lambda = a_\lambda + i b_\lambda$.



Como las fuerzas de rozamiento son disipativas, la energía disminuye con el tiempo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T + V)}{dt} = -2\mathcal{F} < 0$$

y por ello la parte imaginaria de las frecuencias es negativa, $b_\lambda < 0$, por lo que los modos serían una oscilación armónica modulada por una exponencial decreciente,

$$\zeta_\lambda = B_\lambda e^{-|b_\lambda|t} \cos(a_\lambda t + \delta_\lambda)$$

Nótese que hemos tomado para los modos normales el caso subamortiguado porque es el que mantiene las oscilaciones. Si el rozamiento es grande desaparecen las oscilaciones (caso sobreamortiguado) y en medio se encuentra el caso crítico. Evidentemente, al haber varios grados de libertad, se pueden mezclar distintos casos de amortiguamiento en los diferentes modos.

13.4. Respuesta temporal del sistema ante fuerzas aplicadas. Vibraciones en máquinas como oscilaciones forzadas.

Es de enorme importancia el estudio de las pequeñas oscilaciones en presencia de fuerzas externas variables con el tiempo. Se puede obtener una idea del comportamiento general de estos sistemas en la configuración más sencilla. Para ello añadiremos a las ecuaciones del movimiento (13.42) una fuerza variable en cada coordenada,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\alpha} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (13.45)$$

La solución de este sistema no homogéneo será la suma de la solución general de la parte homogénea y una solución particular de la completa:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^h + \mathbf{X}^{nh}$$

siendo (13.41) la solución general de la homogénea pero con las frecuencias complejas.

Para encontrar la solución particular de la completa es conveniente “cambiar” a las coordenadas normales, así, la ecuación del movimiento será ahora:

$$\ddot{\zeta}_\lambda + \omega_\lambda^2 \zeta_\lambda = Q_\lambda(t); \quad \lambda = 1 \dots N \quad (13.46)$$

siendo Q_λ la fuerza generalizada asociada con la coordenada normal y que se obtiene según la forma habitual:

$$Q_\lambda(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial \zeta_\lambda} F_i(t) = \sum_{i=1}^N a_{i\lambda} F_i(t) = [F_1 \quad \dots \quad F_N] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ & \ddots & \\ & & a_{NN} \end{bmatrix}$$

La variación temporal de estas Q_λ dependerá de la forma de las fuerzas variables. El caso más sencillo corresponde a una dependencia armónica común para todas las fuerzas, $Q_\lambda(t) = Q_\lambda^0 \cos(\omega t + \phi)$, donde ω sería la frecuencia del agente excitador externo.

La solución será también armónica con la frecuencia que la fuerza pero con una amplitud dada por la ecuación del movimiento (13.46),

$$\zeta_\lambda^{nh} = \frac{Q_\lambda^0}{\omega_\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \phi)$$

Nótese que si no hay rozamiento las frecuencias propias y las amplitudes son reales y no hay diferencia de fase entre la solución y la fuerza armónica.

Pasando de las coordenadas normales a los desplazamientos

$$x_i^{nh} = \sum_{\lambda=1}^N a_{i\lambda} \frac{Q_\lambda^0}{\omega_\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \phi)$$

y finalmente

$$x_i(t) = \sum_{\lambda=1}^N a_{i\lambda} \zeta_\lambda + \sum_{\lambda=1}^N a_{i\lambda} \frac{Q_\lambda^0}{\omega_\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \phi)$$

En presencia de rozamiento la solución homogénea desaparece rápidamente (transitorio) por lo que a tiempos grandes sólo se advierte la particular de la no homogénea (permanente):

$$x_i^{\text{perm}}(t) = A_i \cos(\omega t + \phi)$$

donde

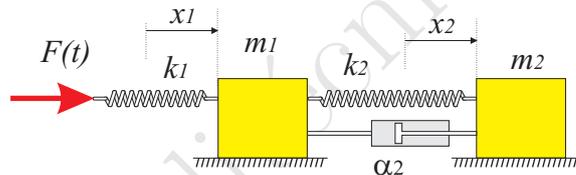
$$A_i(\omega) = \sum_{\lambda=1}^N \frac{a_{i\lambda} Q_{\lambda}^0}{\omega_{\lambda}^2 - \omega^2} = \frac{\text{polinomio}(N-1; \omega^2)}{\text{polinomio}(N; \omega^2)}$$

La solución particular de la ecuación completa, obtenida en el caso más simple, muestra ya el fenómeno más característico de las oscilaciones forzadas: la *resonancia*. El acoplamiento entre las oscilaciones produce para un sistema de N grados de libertad:

- N picos de resonancia coincidiendo con las N frecuencias naturales del sistema.
- hasta $N - 1$ valores de la frecuencia para los que la amplitud se anula.

Ejemplo. Absorbedor dinámico de vibraciones.

Como acabamos de ver en un sistema con N grados de libertad hay N resonancias y $N - 1$ valores a los que se anula la amplitud. Este último resultado puede utilizarse para absorber las vibraciones que puede generar sobre un cuerpo la existencia en su interior de un motor oscilatorio, por ejemplo una máquina de afeitar, una sierra de vaivén, etc.



Para analizar el fenómeno utilizamos el modelo simplificado de la figura, una fuerza excitadora periódica $F(t)$, una masa m_1 y un muelle k_1 al que se añade otra masa m_2 con otro muelle k_2 con el objetivo que esta segunda masa absorba las vibraciones. En principio consideraremos nulo el rozamiento $\alpha_2 = 0$. La fuerza aplicada al extremo del muelle 1 se realiza por medio de un desplazamiento $a(t)$ de manera que el potencial es,

$$V = \frac{1}{2} k_1 [x_1 - a(t)]^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

mientras que la energía cinética es simplemente

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

y las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 a(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si la fuerza es armónica $F(t) = k_1 a(t) = k_1 h e^{i\omega t}$ buscamos una solución del régimen permanente con la misma frecuencia,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\text{perm}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

se obtiene para las amplitudes a_i la siguiente solución

$$\frac{a_1}{h} = \frac{\omega_{01}^2 (\omega_{02}^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)}$$

$$\frac{a_2}{h} = \frac{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}{(\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)}$$

donde por comodidad hemos definido

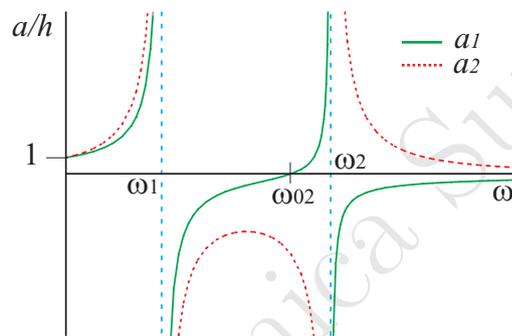
$$\omega_{01}^2 = \frac{k_1}{m_1}$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

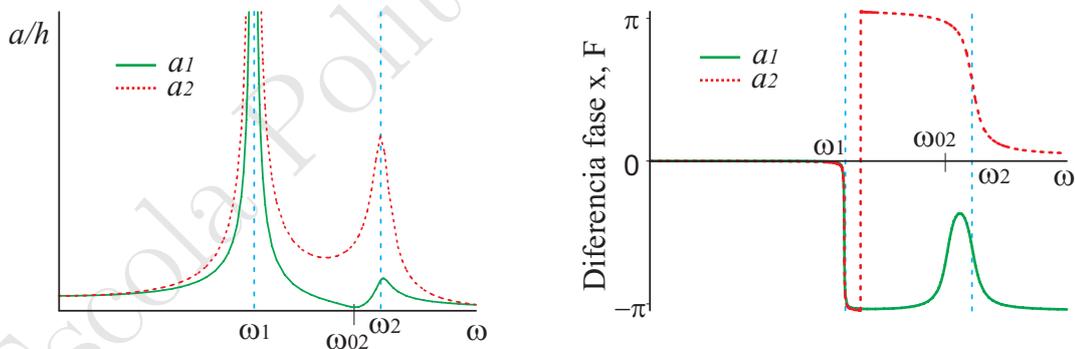
y siendo ω_1 y ω_2 las dos frecuencias propias

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \frac{k_2}{m_1} \mp \sqrt{\left(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \frac{k_2}{m_1} \right)^2 - 4\omega_{01}^2\omega_{02}^2} \right]$$

Puede demostrarse que $\omega_1 < \omega_{02} < \omega_2$ por lo que entre las dos resonancias se encuentra en valor de la frecuencia para el que anula la amplitud del movimiento de la masa 1, $\omega = \omega_{02}$.



Si se tiene en cuenta el rozamiento los valores de las frecuencias de resonancia y la que anula el movimiento de la masa 1 se ven afectadas por el valor del amortiguamiento pero la conclusión se mantiene.

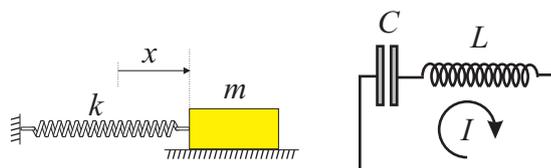


Analogías eléctricas

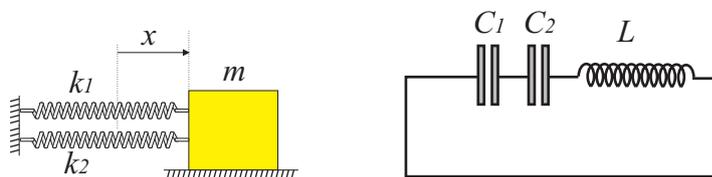
La ecuación del movimiento del oscilador armónico es formalmente idéntica a un resonador eléctrico formado por una bobina de inductancia L y un condensador de capacidad C , si tenemos en cuenta la relación entre la corriente eléctrica y la carga, $I = dQ/dt$,

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0 \quad \Rightarrow \quad L \ddot{Q} + \frac{1}{C} Q = 0$$

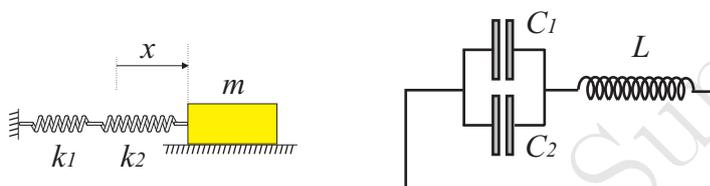
sin más que identificar el desplazamiento x con la carga Q , la masa m con la inductancia L y la rigidez k con la inversa de la capacidad $1/C$. La energía acumulada en la bobina $\frac{1}{2} L I^2$ es análoga a la energía cinética $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$ y la acumulada en el condensador $\frac{1}{2} Q^2/C$ a la energía potencial $\frac{1}{2} k x^2$.



Para utilizar correctamente la analogía debe tenerse en cuenta que la capacidad de los condensadores se suma cuando están en paralelo lo mismo que ocurre con los muelles pero la analogía tiene lugar entre la inversa de la capacidad y la rigidez del muelle, véase la figura siguiente.



$$k = k_1 + k_2 \longleftrightarrow 1/C = 1/C_1 + 1/C_2$$



$$1/k = 1/k_1 + 1/k_2 \longleftrightarrow C = C_1 + C_2$$

El efecto del rozamiento viscoso (proporcional a la velocidad) es análogo al de la resistencia, así el oscilador armónico amortiguado equivale al circuito RLC en serie,

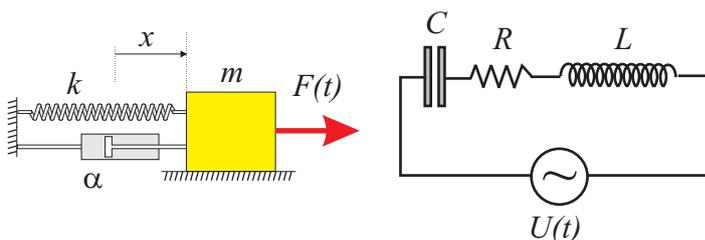
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$$

De la misma forma una fuerza externa (oscilador forzado) es equivalente a la presencia de una fuerza electromotriz $U(t)$,

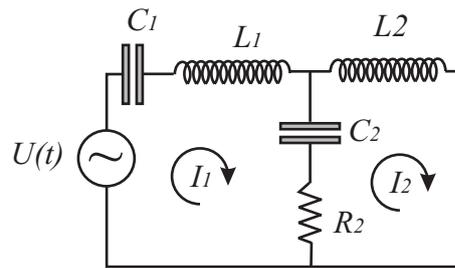
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t) \Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = U(t)$$

Entonces,

desplazamiento,	$x \longleftrightarrow Q$,	carga
masa,	$m \longleftrightarrow L$,	inductancia
rigidez,	$k \longleftrightarrow \frac{1}{C}$,	inversa de la capacidad
amortiguamiento,	$\alpha \longleftrightarrow R$,	resistencia
fuerza,	$F(t) \longleftrightarrow U(t)$,	fuerza electromotriz



Estas analogías pueden extenderse al caso de oscilaciones acopladas dando lugar a una red de circuitos eléctricos cuya solución es análoga a la del sistema mecánico. En la figura siguiente se muestra el circuito eléctrico análogo al absorbedor dinámico de vibraciones que hemos visto anteriormente.



Escuela Politécnica Superior

Apéndice: Problema de valores propios

Sea el problema de valores propios:

$$\mathbf{K} A_\lambda = \omega_\lambda^2 \mathbf{M} A_\lambda \quad (1)$$

donde las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} son complejas.

Entonces:

$$A_\mu^\dagger \mathbf{K} A_\lambda = \omega_\lambda^2 A_\mu^\dagger \mathbf{M} A_\lambda \quad (2)$$

donde el símbolo \dagger representa el adjunto (transpuesto + complejo conjugado, $X^\dagger = (X^t)^*$).

Tomando adjuntos en (2):

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{K}^\dagger A_\mu = \omega_\lambda^{2*} A_\lambda^\dagger \mathbf{M}^\dagger A_\mu$$

Si las matrices son hermíticas (autoadjuntas) se tiene:

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{K} A_\mu = \omega_\lambda^{2*} A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu$$

y utilizando (2) pero cambiando λ por μ se obtiene:

$$\omega_\mu^2 A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu = \omega_\lambda^{2*} A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu \Rightarrow (\omega_\mu^2 - \omega_\lambda^{2*}) A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu = 0 \quad (3)$$

De esta ecuación se obtienen dos conclusiones importantes:

- i) Si $\mu = \lambda \Rightarrow \omega_\lambda^2 = \omega_\lambda^{2*}$, todas las raíces son reales.
- ii) Si $\omega_\mu^2 \neq \omega_\lambda^{2*} \Rightarrow A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu = 0$, los autovectores procedentes de raíces distintas son ortogonales.

Además, los autovalores pueden elegirse reales. Suponiendo que son complejos se podrá escribir:

$$A_\lambda = \vec{\alpha}_\lambda + i \vec{\beta}_\lambda$$

por lo que:

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\lambda = \{ \vec{\alpha}_\lambda^t - i \vec{\beta}_\lambda^t \} \mathbf{M} \{ \vec{\alpha}_\lambda + i \vec{\beta}_\lambda \} = \vec{\alpha}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\alpha}_\lambda + \vec{\beta}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\beta}_\lambda + i \{ \vec{\alpha}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\beta}_\lambda - \vec{\beta}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\alpha}_\lambda \}$$

y si \mathbf{M} es hermítica el valor entre llaves es cero y

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\lambda$$

es siempre real. Esto hace posible elegir los autovectores reales y ortonormales:

$$A_\mu^t \mathbf{M} A_\lambda = \delta_{\mu\lambda} \quad (4)$$

Reescribiendo la ecuación (2) se tiene:

$$\omega_\lambda^2 = \frac{A_\lambda^t \mathbf{K} A_\lambda}{A_\lambda^t \mathbf{M} A_\lambda}$$

Si las dos matrices corresponden a formas cuadráticas definidas positivas los autovalores serán todos positivos y finitos:

$$\mathbf{M}, \mathbf{K} \text{ hermíticas y definidas positivas} \Rightarrow 0 < \omega_\lambda^2 < \infty, \forall \lambda$$