



UNIVERSIDADE DA CORUÑA
Escuela Politécnica Superior

Apuntes de 730112102-Mecánica Fundamental

curso 2010/2011

Ana Jesús López Díaz

Escuela Politécnica Superior

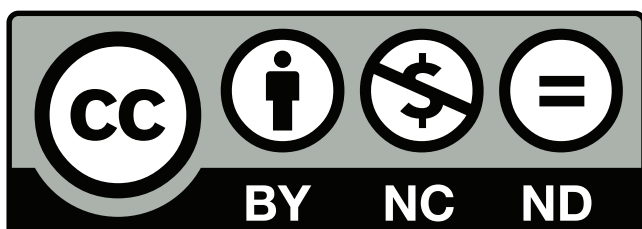
Título: Apuntes de 730112102-Mecánica Fundamental

Autora: López Díaz, Ana Jesús

Año: 2011

Centro: Escola Politécnica Superior, Universidade da Coruña (SPAIN)

Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 España.





Índice

1. Sistemas de Vectores deslizantes	1
1.1. Momento central del un vector	1
1.2. Momento axial de un vector	2
1.3. Sistemas de vectores deslizantes	2
1.4. Equivalencia entre sistemas de vectores deslizantes	3
1.5. Invariantes de un sistema de vectores deslizantes	3
1.6. Eje central	4
1.7. Distribución de momentos	5
1.8. Clasificación de sistemas de vectores deslizantes	5
2. Equilibrio	7
2.1. Equilibrio	7
2.2. Fuerzas externas e internas	7
2.3. Sólido rígido	8
2.4. Equilibrio de Sólidos Ligados: Principio de liberación	9
2.5. Las ligaduras más habituales	9
2.6. Equilibrio de cables	9
3. Rozamiento	13
3.1. Tipos de rozamiento	13
3.2. Aplicaciones del rozamiento a las máquinas	14
4. Fuerzas distribuidas	19
4.1. Centro de masas	19
4.2. Tensor de Inercia	20
4.3. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos	21
4.4. Diagonalización del tensor de inercia	22
4.5. Simetrías en las distribuciones de masas	23
4.6. Elipsoide de inercia	23
5. Trabajo virtual y energía potencial	25
5.1. Principio del trabajo virtual. Aplicación a la estática.	25
5.2. Coordenadas generalizadas.	25
5.3. Energía potencial y criterios de estabilidad del equilibrio.	26
6. Cinemática del punto	27
6.1. Derivada de un vector en una base móvil.	27
6.2. Triedro intrínseco. Fórmulas de Frenet.	27
6.2.1. Triedro intrínseco	28
6.2.2. Curvatura y torsión	28
6.2.3. Fórmulas de Frenet	29
6.3. Velocidad y aceleración. Componentes intrínsecas.	29
6.3.1. Velocidad y aceleración. Definiciones y unidades.	30
6.3.2. Componentes tangencial y normal de la aceleración.	31
7. Cinemática del sólido rígido	33
7.1. Sólido rígido. Condición cinemática de rigidez	33
7.2. Movimiento de traslación y rotación.	33
7.3. Distribución helicoidal de velocidades. Teorema de Chasles	34
7.4. Grupo cinemático. Invariantes	35
7.5. Eje instantáneo de rotación	36
7.6. Axoides	36

7.7. Distribución de aceleraciones	37
8. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS	39
8.1. Composición de velocidades	39
8.2. Composición de rotaciones	40
8.3. Composición de aceleraciones	40
8.4. Composición de aceleraciones angulares	41
8.5. Movimientos inversos	41
8.6. Movimiento de dos sólidos en contacto	41
9. Movimiento Plano	43
9.1. Definición y propiedades	43
9.2. Centro instantáneo de rotación. Base y ruleta.	43
9.3. Distribución de velocidades.	44
9.4. Velocidad de sucesión del CIR	45
9.5. Distribución de aceleraciones	45
10. Dinámica del punto material sometido a enlaces	47
10.1. Punto ligado a una curva sin rozamiento	48
10.2. Punto ligado a una superficie sin rozamiento	49
11. Movimiento relativo del punto material	51
11.1. Fuerzas de inercia	51
11.2. Movimiento en la superficie de la Tierra	51
12. Dinámica del sólido rígido	57
12.1. Movimiento con un eje fijo.	57
12.2. Movimiento con un punto fijo. Ecuaciones de Euler.	60
13. Introducción a la dinámica analítica	69
13.1. Ligaduras en sistemas físicos. Definición, propiedades y clasificación.	69
13.2. Condiciones de equilibrio y ecuaciones del movimiento en coordenadas generalizadas.	70
13.3. Principio de D'Alembert.	71
13.4. Ecuación general de la dinámica para un sistema con ligaduras sin rozamiento.	71
13.5. Fuerzas, trabajo y energía en coordenadas generalizadas	73
14. Formulación de Lagrange	75
14.1. Ecuaciones de Lagrange.	75
14.2. Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación.	77
14.3. Aplicaciones sencillas de la formulación de Lagrange.	78
14.4. Constantes del movimiento. Teoremas de conservación	78
14.5. Principio variacional de Hamilton. Aplicación a la derivación de las ecuaciones de Lagrange.	80
14.6. Función hamiltoniana.	81
14.7. Ecuaciones de Hamilton.	81
14.8. Eliminación de coordenadas cíclicas. Función de Routh.	82
15. Trompo de Lagrange	85
15.1. Movimiento de un sólido pesado alrededor de un punto fijo. Trompo de Lagrange	85
15.2. Ecuaciones de Lagrange	86
15.3. Problema unidimensional equivalente	86
15.4. Clasificación de los movimientos	87
15.5. Función de Hamilton y función de Routh	88
15.6. Ecuación del movimiento de nutación	89
15.7. Condición de precesión estacionaria	90



16. Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio	93
16.1. Pequeñas oscilaciones alrededor de posiciones de equilibrio.	93
16.1.1. Oscilaciones libres en un sistema con N grado de libertad.	95
16.2. Determinación de frecuencias naturales de oscilación.	96
16.3. Caracterización del movimiento según los distintos modos de oscilación. Estabilidad del movimiento.	97
16.4. Respuesta temporal del sistema ante fuerzas aplicadas. Vibraciones en máquinas como oscilaciones forzadas.	99

Escuela Politécnica Superior



1. Sistemas de Vectores deslizantes

- 1.1 Momento central de un vector.
- 1.2 Momento axial de un vector.
- 1.3 Sistemas de vectores deslizantes
- 1.4 Equivalencia entre sistemas de vectores deslizantes
- 1.5 Invariantes de un sistema de vectores deslizantes
- 1.6 Eje central
- 1.7 Distribución de momentos
- 1.8 Clasificación de sistemas de vectores deslizantes

Introducción

Iniciamos el curso con el capítulo dedicado a la estática, la parte de la mecánica que estudia el equilibrio. Se dice que un sistema está en equilibrio respecto de un sistema de referencia inercial cuando, abandonado en reposo, sus partículas no adquieren ningún movimiento. A partir de esta descripción de equilibrio es fácil ver la estática como un caso particular de la dinámica (ausencia de movimiento) y obtener a partir de las leyes de la Dinámica las ecuaciones de equilibrio de un sistema mecánico. En este curso, sin embargo, estudiaremos la estática separadamente, basándonos en los conocimientos previamente adquiridos en el curso de física y presentaremos las ecuaciones de equilibrio directamente para centrarnos en el análisis del equilibrio en distintos sistemas mecánicos (punto material, los sistemas rígidos y los cables). Así el objetivo del capítulo será analizar bajo qué condiciones (sistemas de fuerzas y configuraciones geométricas) un sistema se encuentra en equilibrio. Los problemas generales que se resuelven son:

- Dado un sistema material sometido a un sistema de fuerzas conocido, determinar la configuración geométrica del mismo para que se encuentre en equilibrio.
- Estudiar la estabilidad de las configuraciones de equilibrio anteriormente determinadas.
- Determinar en las configuraciones de equilibrio las fuerzas mutuas que ejercen las diversas partes del sistema, así como las que este recibe de sus contactos físicos con el exterior.
- Determinar los sistemas de fuerzas que hacen adoptar a un sistema una configuración de equilibrio determinada

El primer tema de este capítulo se dedica al estudio de las propiedades generales de los sistemas de vectores deslizantes que serán de aplicación tanto en la estática como en la cinemática. Las magnitudes físicas que pueden describirse utilizando los llamados vectores deslizantes son aquellas que tienen la propiedad de que no cambian al desplazar el vector a lo largo de su dirección; los ejemplos más importantes son las fuerzas aplicadas a un sistema rígido y los vectores rotación.

1.1. Momento central del un vector

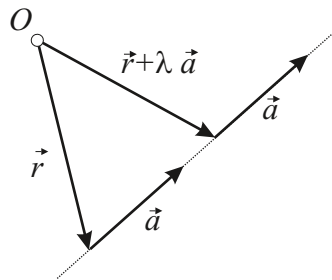
El momento central de un vector \vec{a} respecto de un punto O es el producto vectorial del vector que va desde O al origen del vector \vec{a} por el propio vector \vec{a} ,

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{a}$$

Propiedades:

1. Es compatible con la definición de vector deslizante. Si desplazamos \vec{a} a lo largo de su recta de acción.

$$(\vec{r} + \lambda \vec{a}) \times \vec{a} = \vec{r} \times \vec{a} + \lambda \vec{a} \times \vec{a} = \vec{M}_O$$



2. Ley de cambio de origen:

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O - \vec{OO'} \times \vec{a}$$

3. las componentes de \vec{M}_O no son todas independientes de las de \vec{a} porque se cumple siempre que:
 $\vec{M}_O \cdot \vec{a} = 0$

4. Conocido un vector y su momento, se conoce la recta soporte.

1.2. Momento axial de un vector

El momento de un vector \vec{a} respecto de un eje e se define como la proyección sobre el eje del momento desde cualquier punto O del eje:

$$M_e = \hat{u} \cdot \vec{M}_O = \hat{u} \cdot (\vec{r} \times \vec{a})$$

siendo \hat{u} vector unitario en la dirección del eje.

Si tomamos como origen otro punto O' del mismo eje, $\vec{OO'} = \lambda \hat{u}$:

$$\hat{u} \cdot \vec{M}_{O'} = \hat{u} \cdot (\vec{M}_O - \vec{OO'} \times \vec{a}) = \hat{u} \cdot \vec{M}_O - \hat{u} \cdot (\vec{OO'} \times \vec{a}) = \hat{u} \cdot \vec{M}_O$$

por lo que la definición es coherente.

1.3. Sistemas de vectores deslizantes

Llamaremos sistema de vectores deslizantes a un conjunto de vectores deslizantes debidamente definidos en el espacio: $\{\vec{a}_i, i = 1, \dots\}$ con origen en $\{\vec{r}_i, i = 1, \dots\}$.

- Llamaremos RESULTANTE de un sistema de vectores deslizantes a la suma de todos los vectores como si fueran libres:

$$\vec{R} = \sum_i \vec{a}_i$$

- Llamaremos MOMENTO RESULTANTE a la suma de los momentos centrales de cada vector tomados desde el mismo punto:

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

La ley del cambio de origen será:

$$\vec{M}_{O'} = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{a}_i = \sum_i (\vec{O'O} + \vec{r}_i) \times \vec{a}_i = \sum_i \vec{O'O} \times \vec{a}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i$$

aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma tendremos

$$\sum_i \vec{O'O} \times \vec{a}_i = \vec{O'O} \times \left(\sum_i \vec{a}_i \right) = \vec{O'O} \times \vec{R} = -\vec{OO'} \times \vec{R}$$



Finalmente

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O - \vec{OO'} \times \vec{R}$$

Propiedades:

1. El momento resultante no cambia si nos movemos paralelos a \vec{R} , es decir $\vec{OO'} = \lambda \vec{R}$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O - \vec{OO'} \times \vec{R} = \vec{M}_O$$

2. Si tenemos un punto con momento \vec{M}_O , tendremos una recta de puntos con ese mismo valor del momento bastará con movernos paralelos a \vec{R} .
3. Teorema de Varignon: El momento resultante de un sistema de vectores concurrentes es igual al momento de su resultante situada en el punto de concurrencia.

Para demostrarlo basta tener en cuenta que el momento de un vector no cambia si lo movemos a lo largo de su recta soporte. Como los vectores son concurrentes todas las rectas soporte se cruzan en el punto de concurrencia C , entonces deslizando los vectores hasta el punto de concurrencia:

$$\vec{M}_O = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{a}_i) = \sum_i (\vec{OC} \times \vec{a}_i) = \vec{OC} \times \sum_i \vec{a}_i = \vec{OC} \times \vec{R}$$

Es el único caso en el que el momento resultante coincide con el momento de la resultante:

1.4. Equivalencia entre sistemas de vectores deslizantes

Dos sistemas de vectores deslizantes son equivalentes si tienen la misma resultante y el mismo momento resultante respecto del mismo origen.

Algunas operaciones por las que se pasa de un sistema a otro equivalente son:

1. Deslizar los vectores a lo largo de su recta de soporte.
2. Sumar vectores concurrentes dejando el vector suma en el punto de concurrencia
3. Descomponer un vector en varios que lo sumen y concurren con él.
4. Añadir o retirar pares de vectores con el mismo módulo, misma dirección y sentidos opuestos sobre la misma recta soporte.

Es evidente que ninguna de estas operaciones afecta al valor de la resultante ni al valor del momento resultante. También es evidente que todo el sistema de vectores deslizantes es equivalente a un sistema formado por dos vectores que se cruzan y que cumplen:

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{R}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{a}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{a}_2 = \vec{M}$$

1.5. Invariantes de un sistema de vectores deslizantes

la resultante \vec{R} no depende de la elección del sistema de coordenadas, decimos que es un invariante; sin embargo \vec{M} sí cambia con el origen de coordenadas. A partir de \vec{M} puede obtenerse un invariante; para ello basta multiplicar escalarmente \vec{M} y \vec{R} :

$$\vec{M}_{O'} \cdot \vec{R} = (\vec{M}_O - \vec{OO'} \times \vec{R}) \cdot \vec{R} = \vec{M}_O \cdot \vec{R} - (\vec{OO'} \times \vec{R}) \cdot \vec{R}$$

decimos por tanto que en un sistema de vectores deslizantes hay dos invariantes: la resultante \vec{R} y la proyección del momento en la dirección de la resultante, que denominamos momento mínimo $M_{\text{mín}}$

$$M_{\text{mín}} = \frac{\vec{M}_O \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|}$$

Recibe el nombre porque es realmente el valor mínimo que el momento del sistema puede tomar respecto de cualquier punto del espacio.

$$|\vec{M}| \geq M_{\text{mín}}$$

1.6. Eje central

Definimos el eje central de un sistema de vectores deslizantes como el lugar geométrico de los puntos con momento igual al momento mínimo.

Claramente se trata de una recta ya que la ley de cambio de momentos demuestra que para que dos puntos tengan el mismo momento han de estar situados en una recta paralela a la resultante.

Para determinar un punto P de esa recta, utilizamos que M_P y la resultante \vec{R} son paralelos y por tanto el momento en ese pu \vec{M}_O

$$0 = \vec{R} \times \vec{M}_P = \vec{R} \times (\vec{M}_O - \vec{OP} \times \vec{R}) = \vec{R} \times \vec{M}_O - \vec{OP} R^2 + \vec{R} (\vec{OP} \cdot \vec{R})$$

y por tanto

$$\vec{OP} = \frac{\vec{R} \times \vec{M}_O}{R^2} + \lambda \vec{R} \quad (1.1)$$

Caso particular: Sistema de vectores paralelos En este caso todos los vectores son paralelos a una dirección fija \hat{u} , $\vec{a}_i = a_i \hat{u}$, entonces la resultante queda como

$$\vec{R} = \sum_i \vec{a}_i = \left(\sum_i a_i \right) \hat{u}$$

y el momento resultante puede escribirse como

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{a}_i = \left(\sum_i a_i \vec{r}_i \right) \times \hat{u}$$

El momento mínimo es siempre cero ya que $\vec{R} \parallel \hat{u}$ y $\vec{M} \perp \hat{u}$.

Aplicando la ecuación 1.1 se puede demostrar que el eje central pasa por el punto de coordenadas

$$\left(\frac{\sum_i a_i x_i}{\sum_i a_i}, \frac{\sum_i a_i y_i}{\sum_i a_i}, \frac{\sum_i a_i z_i}{\sum_i a_i} \right)$$

Este resultado es de gran importancia ya que la fuerza peso de un sistema de masas es un caso particular de fuerzas paralelas a la dirección definida por la aceleración de la gravedad, $\hat{u} = \vec{g}/g$ y $\vec{a}_i = m_i \vec{g}$. Aplicando la ecuación anterior y simplificando la constante g se tiene

$$\left(\frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i} \right)$$

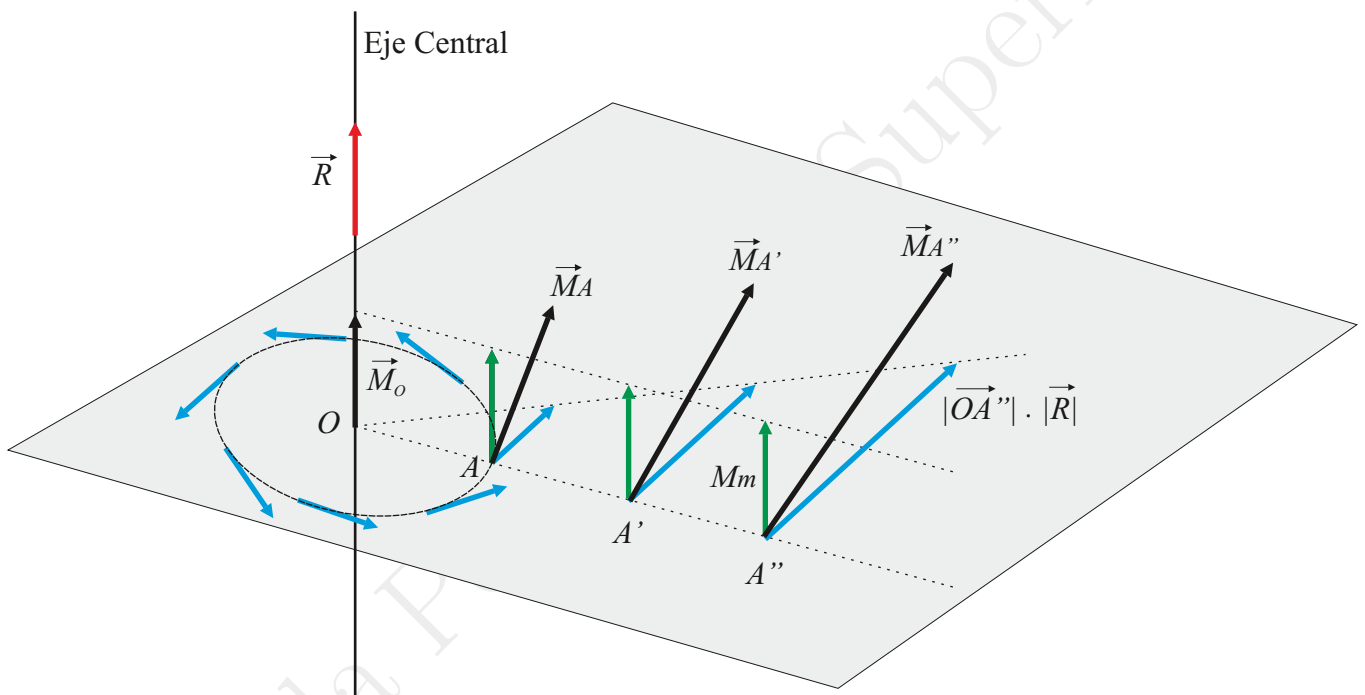
que son las coordenadas del centro de masas. El sistema de fuerzas peso se reduce a la resultante (peso total del sistema) situado en el centro de masas.



1.7. Distribución de momentos

A partir de la ecuación $\vec{M}_A = \vec{M}_O - \vec{OA} \times \vec{R}$ puede verse que la distribución de momentos alrededor del eje central presenta una forma helicoidal, como se aprecia en la figura:

- si movemos el origen paralelamente a \vec{R} , \vec{M} no cambia
- si nos movemos en dirección normal a \vec{R} , la componente del momento paralela a \vec{R} permanece fija e igual a M_{\min} , mientras que la componente perpendicular a \vec{R} aumenta proporcionalmente con la distancia al eje central : $|\vec{OA}| \cdot |\vec{R}|$
- $|\vec{M}|$ es constante en superficies cilíndricas alrededor del eje central.



1.8. Clasificación de sistemas de vectores deslizantes

Veamos la forma de clasificar los sistemas de vectores deslizantes en función de la resultante y el momento resultante, así como la reducción más sencilla en cada caso (reducción es la obtención de otro sistema de vectores que sea equivalente y resulte más sencillo de manejar).

- $\vec{M} \cdot \vec{R} \neq 0$ (Momento mínimo no nulo): Es el sistema más general. La reducción más sencilla es la resultante \vec{R} aplicada en un punto O (ya sea del eje central o no) y el momento \vec{M}_O en ese punto.
- $\vec{M} \cdot \vec{R} = 0$ (Momento mínimo nulo):
 - $|\vec{R}| \neq 0$; $\vec{M} = 0$. La reducción más sencilla es \vec{R} situado en el eje central.
 - $\vec{R} = 0$; $\vec{M} \neq 0$. El momento es el mismo en todos los puntos del espacio. El sistema se reduce a un momento. Es lo que se denomina un par de vectores.
 - $\vec{R} = 0$; $\vec{M} = 0$. Se llama sistema nulo de vectores. No tiene ningún efecto.

2. Equilibrio

- 2.1 Equilibrio
- 2.2 Fuerzas internas y externas
- 2.3 Equilibrio del sólido rígido
- 2.4 Sólidos ligados.
- 2.5 Cables

2.1. Equilibrio

Se dice que un punto material está en equilibrio en un sistema de referencia inercial cuando su situación no varía a lo largo del tiempo. Del mismo modo un sistema material está en equilibrio si abandonado en reposo en un sistema inercial, sus partículas no toman ningún movimiento.

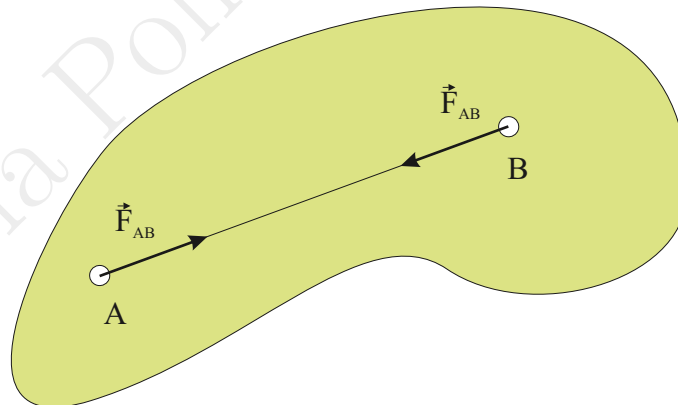
Para el caso de una partícula, la segunda ley de Newton determina la condición necesaria y suficiente de equilibrio; i.e., ausencia de fuerza. Dado el carácter vectorial de la fuerza, la condición de equilibrio también se cumple si la resultante de las fuerzas que actúan es nula $\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i = 0$. En el caso de un sistema material esta condición no es suficiente para el equilibrio, como veremos a continuación.

2.2. Fuerzas externas e internas

Las fuerzas que actúan sobre los puntos de un sistema material pueden clasificarse en dos tipos:

- Fuerzas internas, cuya presencia es debida a la interacción mutua entre las partículas que integran el sistema material.
- Fuerzas externas originadas por interacciones ajenas al sistema material considerado.

Las fuerzas internas entre dos puntos son iguales y opuestas y dirigidas a lo largo de la recta que los une ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \parallel \vec{r}_{AB}$).



En consecuencia el conjunto de todas las fuerzas internas en un sistema material constituye un sistema nulo,

$$\sum_i \vec{F}_i^{int} = 0 \Rightarrow \vec{R} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int} = 0 \Rightarrow \vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

Dado que el equilibrio de un sistema exige que cada uno de sus puntos esté en equilibrio, y teniendo en cuenta lo precisado para las fuerzas interiores, se deduce que para que un sistema material se encuentre en equilibrio es condición necesaria que el conjunto de las fuerzas externas constituya un sistema nulo:

$$\text{Equilibrio del sistema} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases}$$

Esta condición es en general necesaria, pero no suficiente. En el caso de sistemas no rígidos se requieren más ecuaciones que pueden obtenerse a partir de las propiedades del material (Elasticidad).

2.3. Sólido rígido

Un sistema indeformable o sólido rígido es aquel en el cual las distancias entre los puntos permanecen invariables cualesquiera que sean las fuerzas actuantes. La condición de rigidez puede expresarse

$$\vec{r}_{AB}^2 = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2 = cte$$

$\forall A, B$ puntos del sólido.

Grados de libertad : Denominamos grados de libertad de un sistema al número de movimientos independientes que puede realizar, que coincide con el número de coordenadas independientes que es preciso conocer para determinar su posición. Por ejemplo para determinar la posición de un punto material necesitamos 3 coordenadas (x, y, z) , decimos por tanto que tiene 3 grados de libertad. Cuando existen ligaduras entre los puntos del sistema, estas limitan los movimientos que puede realizar y por lo tanto reducen el número de grados de libertad. Para un sistema con N partículas y l ecuaciones de ligadura, el número de grados de libertad, s , será $s = 3N - l$.

En el caso del sólido rígido, si consideramos tres puntos A, B y C no alineados, de acuerdo con la condición de rigidez:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{AB}^2 &= |\vec{r}_A - \vec{r}_B|^2 = cte \\ \vec{r}_{AC}^2 &= |\vec{r}_A - \vec{r}_C|^2 = cte \\ \vec{r}_{BC}^2 &= |\vec{r}_B - \vec{r}_C|^2 = cte\end{aligned}$$

Para dar la posición de cada punto se necesitarían 3 coordenadas $(x_A, y_A, z_A), (x_B, y_B, z_B), (x_C, y_C, z_C)$, lo que hace un total de nueve, pero como existen 3 ecuaciones de rigidez sólo hay seis coordenadas independientes. Si quisiéramos determinar la posición de un cuarto punto D , tendríamos 3 nuevas incógnitas (x_D, y_D, z_D) pero también 3 nuevas condiciones de rigidez $r_{AD}^2 = cte, r_{BD}^2 = cte$ y $r_{CD}^2 = cte$ con lo que el número total de coordenadas independientes sigue siendo 6.

Así, conocida la posición de 3 puntos no alineados de un sólido rígido, se conoce la posición de los restantes puntos del sólido. Decimos por tanto que **el sólido rígido tiene 6 grados de libertad** o bien que el número de coordenadas independientes necesarias para definir la posición de un sólido en el espacio es de 6. Para asignar estas coordenada nótese que la posición de un sólido está completamente especificada situando un sistema de referencia S fijo al cuerpo respecto de otro sistema de coordenadas S_1 fijo en el espacio. 3 coordenadas se utilizan para situar el origen de coordenadas de S . Las otras 3 han de definir la orientación de S_1 respecto de S . Más adelante volveremos sobre esto.

Equilibrio de un Sólido Rígido (libre) La dinámica del sólido rígido establece como condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un sólido rígido:

$$\text{Equilibrio del sólido rígido} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M} = 0 \end{cases}$$

Comentarios:

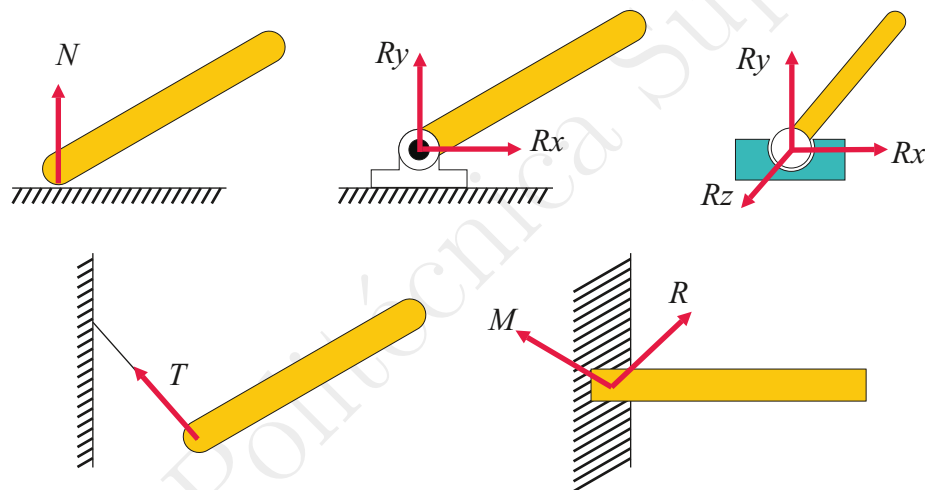
1. Como $\vec{R} = 0$, el momento no depende del origen que tomemos $\vec{M}_P = \vec{M}_O = \vec{M}$ y puede utilizarse el sistema de coordenadas que mejor convenga (inercial).
2. Las fuerzas pueden deslizarse sin que cambie \vec{R} ni \vec{M} .
3. Hay 6 ecuaciones de equilibrio ($R_x = 0 = R_y = R_z = M_x = M_y = M_z$) que se corresponden con los 6 grados de libertad del sólido rígido.
4. Podemos olvidarnos de las fuerzas interiores. Además, en general no sería fácil determinarlas. Eso es el objetivo de la Elasticidad.
5. Para cuerpos planos, el nº de grados de libertad es 3, 2 de movimiento de traslación y 1 de rotación. Consecuentemente el nº de ecuaciones de equilibrio es también 3: $R_x = 0 = R_y = M_z$.

2.4. Equilibrio de Sólidos Ligados: Principio de liberación

Es muy frecuente el caso en que existan varios sólidos enlazados o ligados. Para poder aplicar las ecuaciones de la estática a sólidos enlazados es necesario aislar cada uno de ellos suprimiendo el enlace y sustituyendo su efecto por unas fuerzas y momentos adecuados, "Principio de Liberación". Estas fuerzas se denominan fuerzas de ligadura o reacciones y serán incógnitas a resolver.

2.5. Las ligaduras más habituales

- Apoyo simple: \vec{R} es normal a la tangente común; $\vec{R} \geq 0$.
- Articulación Plana: \vec{R} tiene 2 componentes.
- Articulación Esférica: \vec{R} tiene 3 componentes.
- Cable: R tiene 1 componente, tensión, además de ser paralela al hilo es siempre hacia afuera.
- Empotramiento: La reacción será una fuerza (3 componentes) y un momento (3 componentes)



Comentarios:

- Las reacciones son desconocidas y deberán determinarse con las ecuaciones de equilibrio.
- El nº de ecuaciones de equilibrio es igual al número de grados de libertad.
- Llamando grado de estaticidad al número de componentes de las reacciones a determinar, si:

Movilidad	G. Estat. < G. Libertad	Estáticamente determinado
Inmovilidad	G. Estat. = G. Libertad	
total	G. Estat. > G. Libertad	Estát. Indeterminado

- Si el sistema está formado por sólidos rígidos enlazados, cada subsistema que aisle tendrá a $\vec{R} = 0$ y $\vec{M} = 0$ como condición necesaria (en general no suficiente) de equilibrio. Sin embargo, el número de ecuaciones de equilibrio independientes seguirá siendo igual al número de sólidos por el número de grados de libertad.

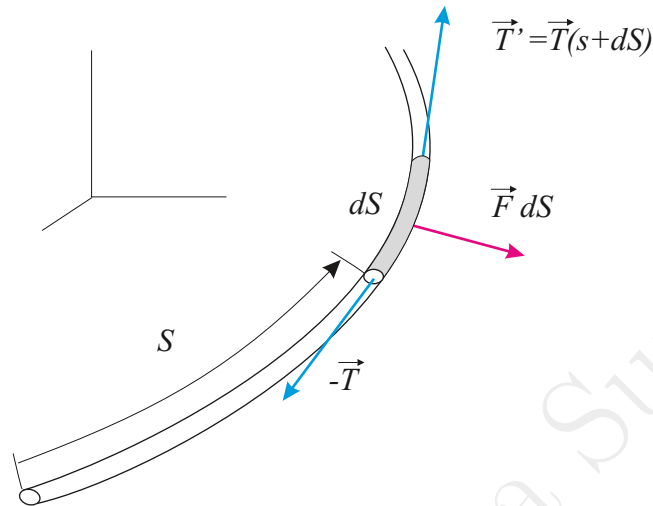
2.6. Equilibrio de cables

Los cables son sólidos deformables con una sección mucho menor que su longitud. Cuando sobre ellos actúa una fuerza, alcanzan el equilibrio produciendo una tensión muy grande y flexionándose.

Se llama hilo o cable ideal al que no ofrece resistencia a la flexión y no sufre alargamiento alguno (inextensible). La única fuerza interna es la tensión que es siempre normal a la sección y por tanto en la dirección tangente a la curva que adopta el hilo. Esta tensión varía en intensidad a lo largo del hilo y será necesario determinarla a la vez que se obtiene la ecuación de la curva que adopta el hilo.

Ecuación de equilibrio Consideremos un elemento de longitud de arco dS y sea \vec{F} la fuerza externa por unidad de longitud que actúa sobre ese elemento. En el equilibrio la tensión en los extremos se equilibra con la fuerza exterior: $\vec{T}' + \vec{F} dS - \vec{T} = 0$ y como $\vec{T}' = \vec{T}(S + dS) = \vec{T}(S) + d\vec{T}$, la ecuación de equilibrio queda

$$d\vec{T} + \vec{F} dS = 0$$



Caso de fuerzas paralelas Si todas las fuerzas \vec{F} son paralelas a una dirección fija \hat{u} , $\vec{F} \times \hat{u} = 0$ y multiplicando vectorialmente la ecuación de equilibrio por el vector unitario se tiene,

$$0 = \hat{u} \times (d\vec{T} + \vec{F} dS) = \hat{u} \times d\vec{T} = d(\hat{u} \times \vec{T})$$

por lo que $\hat{u} \times \vec{T} = \vec{cte}$ lo que indica que la tensión y el vector unitario \hat{u} son coplanarios y ese mismo plano contiene la curva que adopta el hilo.

Sea Oxy el plano que contiene al hilo y Oy la dirección de la fuerza, $\vec{F} = F\hat{j}$, las componentes de la ecuación de equilibrio quedan:

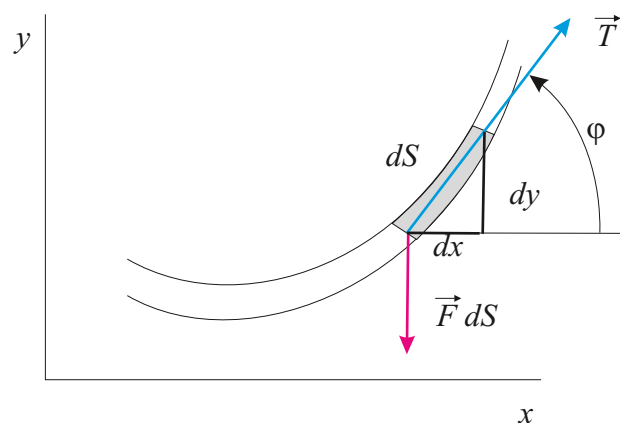
$$\begin{aligned}dT_x &= 0 \\dT_y + F dS &= 0\end{aligned}$$

De la primera se obtiene que la componente de la tensión en la dirección perpendicular a la fuerza no cambia, $T_x = cte = T_0$. Para la segunda ecuación utilizamos que la pendiente de la curva es la derivada, $y' = dy/dx = \tan \varphi$ y puesto que la tensión es tangente a la curva, $\tan \varphi = T_y/T_x$. Despejando T_y tenemos

$$T_y = T_x y' = T_0 y'$$

que conduce a

$$0 = \frac{d(T_0 y') + F dS}{dx} = T_0 y'' + F \frac{dS}{dx} = T_0 y'' + F \sqrt{1 + (y')^2}$$





Hilo bajo su propio peso: catenaria En este caso la fuerza es el peso del hilo $\vec{F}dS = -qdS\hat{j}$, donde q es el peso por unidad de longitud del hilo. La ecuación de equilibrio queda

$$T_0 \frac{dy'}{dx} - q\sqrt{1+(y')^2} = 0 \Rightarrow \int \frac{dy'}{\sqrt{1+(y')^2}} = \int \frac{q}{T_0} dx \Rightarrow \operatorname{arcsenh}(y') = \frac{q}{T_0}x + C_1$$

integrando nuevamente se obtiene

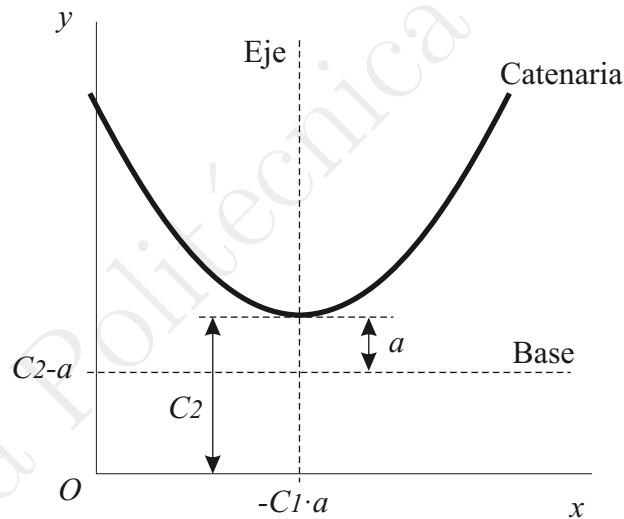
$$y = \frac{T_0}{q} \cosh\left(\frac{q}{T_0}x + C_1\right) + C_2$$

que es la ecuación de la catenaria.

Para simplificar la ecuación de la curva se suele cambiar el origen de las coordenadas de manera que el eje de ordenadas pase por el punto de pendiente nula y este se encuentre a una altura $a = T_0/q$ del eje de abscisas. Se dice que la catenaria está referida a su eje y a su base y la ecuación queda como

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

La constante $a = T_0/q$ que tiene dimensiones de longitud se conoce por parámetro de la catenaria.



La tensión se obtiene de la derivada de la curva $T = T_0\sqrt{1+(y')^2} = qy$, estando y medida desde la base de la catenaria.

De forma similar se obtiene la longitud de arco, $S = \int \sqrt{1+(y')^2} dx = a \operatorname{senh}(x/a)$ medida desde el punto de pendiente nula.

3. Rozamiento

- 3.1 Tipos de rozamiento.
- 3.2 Aplicaciones del rozamiento a las máquinas.

3.1. Tipos de rozamiento

Las fuerzas de rozamiento aparecen cuando dos cuerpos entran en contacto y se oponen siempre a su movimiento relativo. Se suelen clasificar en dos tipos:

Rozamiento seco cuando las superficies de los dos sólidos entran en contacto directo sin que exista ningún elemento lubricante en medio.

Rozamiento fluido cuando en un fluido existen capas que se mueven a diferente velocidad. Este rozamiento esta caracterizado por la viscosidad del fluido y juega un papel importante en todas las máquinas que poseen elementos lubricados.

En este tema nos centraremos en el caso del rozamiento seco y su influencia sobre las condiciones de equilibrio. El rozamiento fluido necesita ser tratado dentro de la mecánica de fluidos y trasciende los objetivos de esta asignatura.

Para describir el rozamiento seco se utilizan unas leyes fenomenológicas (experimentales) aproximadas, formuladas por Coulomb en 1781.

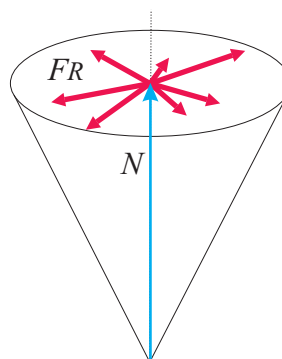
Rozamiento por deslizamiento

La fuerza de rozamiento se opone al movimiento y cumple: $\vec{F}_R = 0$ está contenida en el plano tangente común y su dirección es la opuesta al movimiento.

- 1) La intensidad de la fuerza de rozamiento, F_R , varía entre 0 y un valor límite $0 \leq F_R \leq F_{\text{lím}}$.
- 2) El valor de $F_{\text{lím}}$ no depende de las dimensiones de los cuerpos y es igual a $F_{\text{lím}} = \mu \cdot N$, siendo μ : Coeficiente de rozamiento, adimensional, depende de los materiales y de la rugosidad
 N : Reacción normal al plano tangente.

Angulo de rozamiento: $\phi = \arctan(\mu)$ es el ángulo máximo que se desvía la fuerza de contacto de la normal.

Cono de rozamiento. El vector resultante de la fuerza de contacto (fuerza normal más fuerza rozamiento) tiene el extremo en la superficie de un cono cuyo eje es la dirección normal y cuya semiapertura es el ángulo de rozamiento ϕ . Este cono encierra todos los valores posibles del módulo y de la dirección de la fuerza de contacto.

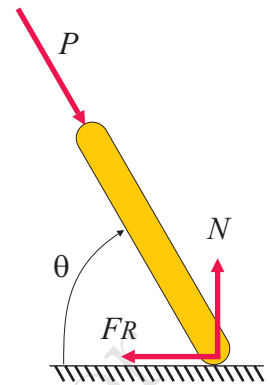


Ejemplo: Apoyo inclinado un ángulo θ y sometido a una carga P .

$$\begin{aligned} F_R &= P \operatorname{sen} \theta \\ N &= P \operatorname{cos} \theta \\ \tan \theta &= \frac{F_R}{N} \end{aligned}$$

El valor máximo de θ será ϕ

$$\tan \theta = \frac{F_R}{N} \leq \frac{F_{\text{lím}}}{N} = \mu \Rightarrow \theta \leq \phi$$



Rozamiento por rodadura

Solo nos interesa el caso particular de una rueda de radio r pesada moviéndose sobre un plano.

Si aplicamos una fuerza F horizontal y a la altura del centro, la rueda no se moverá hasta que F supere un cierto valor límite.

Si ponemos F_R y N sobre la recta soporte de P . La rueda giraría para cualquier valor de F

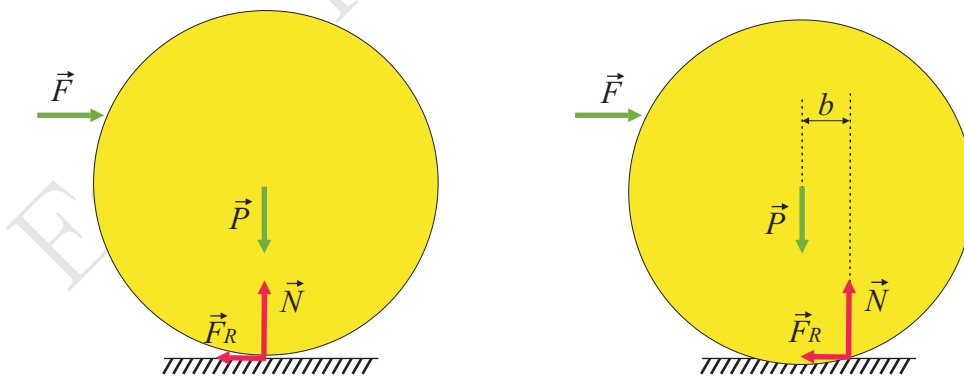
$$\begin{aligned} F + F_R &= 0 \\ \vec{P} + \vec{N} &= 0 \end{aligned}$$

pero $M = r \cdot F \neq 0$ no equilibrio
y $M_O = r \cdot F - b \cdot P = 0$

$$F_R = F = b \cdot \frac{P}{r} = b \cdot \frac{N}{r}$$

b : dimensiones de longitud. Depende del material, rugosidad, elasticidad...

$$0 \leq F_R \leq F_{\text{lím}} = b \cdot \frac{N}{h}$$



3.2. Aplicaciones del rozamiento a las máquinas

En el funcionamiento de diversas máquinas intervienen algunas aplicaciones interesantes del rozamiento. Así mientras que en muchas máquinas el rozamiento es un efecto indeseable que produce pérdidas de eficiencia, vibraciones, disipación de calor, desgastes, etc., existen otros casos en los que el rozamiento es vital para su funcionamiento, por ejemplo, frenos, embragues, correas de transmisión, cuñas, etc. Analizaremos algunos de estas aplicaciones del rozamiento.

Cuñas

Son una de las máquinas más sencillas y se emplean para realizar pequeños ajustes de la posición de un cuerpo o como medio para aplicar grandes fuerzas. Su funcionamiento se basa en las leyes del rozamiento.

Cuando el movimiento es inminente, la reacción resultante en cada lado de la cuña estará inclinada respecto de la normal un ángulo igual al ángulo del rozamiento. La componente de la reacción resultante a lo largo de la superficie de la cuña será la fuerza de rozamiento y su sentido el que se oponga al movimiento.

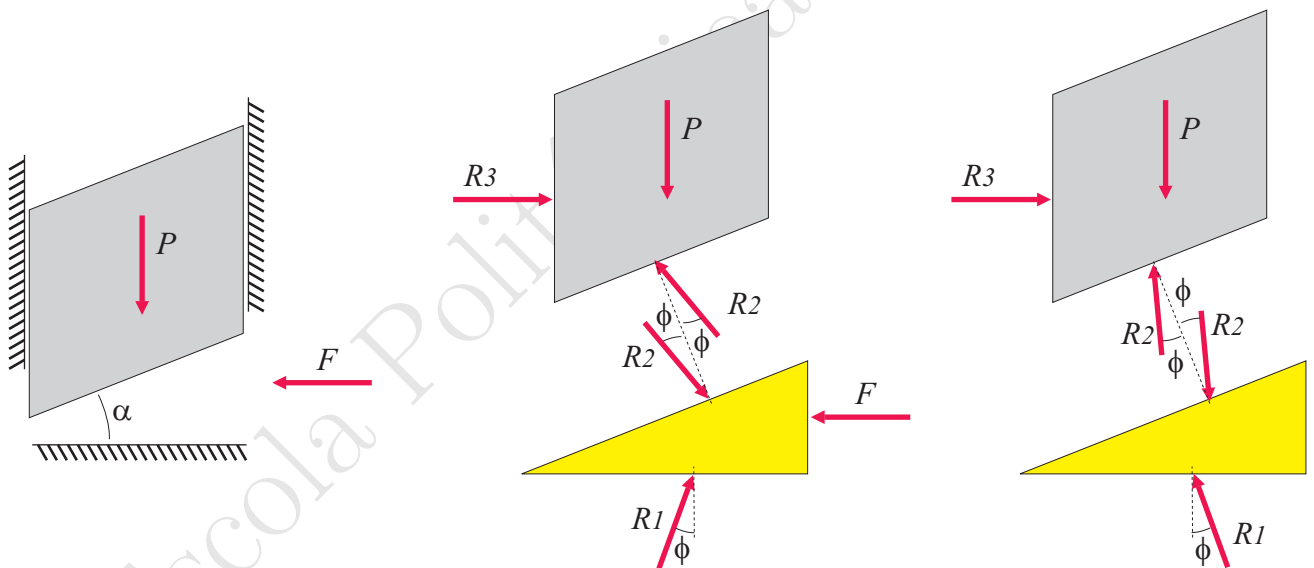
Así, en el ejemplo de la figura el peso del bloque P se equilibra con la fuerza F aplicada a la cuña. La fuerza necesaria para iniciar el movimiento de ascensión del bloque se obtiene del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} P &= R_2 \cos(\alpha + \phi) \\ R_3 &= R_2 \operatorname{sen}(\alpha + \phi) \\ R_1 \cos \phi &= R_2 \cos(\alpha + \phi) \\ F &= R_2 \operatorname{sen}(\alpha + \phi) + R_1 \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$F = R_1 \operatorname{sen} \phi + R_2 \operatorname{sen}(\phi + \alpha) = mg[\tan \phi + \tan(\phi + \alpha)] > P \tan \alpha$$

de forma que el valor de F se ve aumentado por el rozamiento.



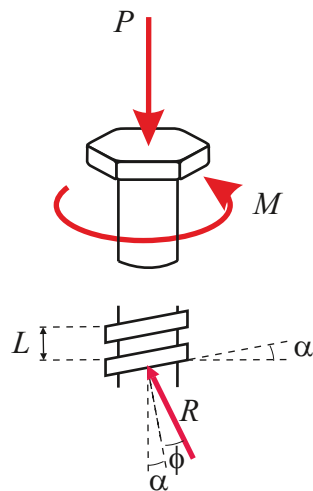
Sin embargo, el rozamiento hace que el bloque se mantenga en su posición aún cuando no se aplica ninguna fuerza, en este caso el sistema se transforma en

$$\begin{aligned} P &= R_2 \cos(\alpha - \phi) \\ R_3 &= R_2 \operatorname{sen}(\alpha - \phi) \\ R_1 \cos \phi &= R_2 \cos(\alpha - \phi) \\ 0 &= R_2 \operatorname{sen}(\alpha - \phi) + R_1 \operatorname{sen} \phi \end{aligned}$$

por lo que no existirá movimiento con tal que $\alpha < \phi$, en cuyo caso se dice que la cuña es irreversible.

Tornillos

Los tornillos se usan para fijaciones o para transmitir potencia y su funcionamiento es similar al de las cuñas ya que pueden considerarse como una cuña plana enrollada sobre un cilindro.



Consideremos en caso más sencillo en el que hilo o filete es cuadrado. Sea P la carga que deseamos levantar, M el momento aplicado al eje del tornillo, r su radio y L el paso de rosca. La fuerza se distribuye a lo largo del filete de forma que la reacción resultante dR formará como máximo un ángulo ϕ con cada porción del filete y si este está inclinado un ángulo $\alpha = \arctan(L/2\pi r)$, el momento respecto del eje vertical del tornillo será

$$M = r \operatorname{sen}(\alpha + \phi) \int dR$$

y la suma de fuerza verticales

$$P = \cos(\alpha + \phi) \int dR$$

por lo que

$$M = P r \tan(\alpha + \phi)$$

vemos que el rozamiento hace crecer el momento que hace falta aplicar para elevar la carga P con el tornillo. Por otro lado, igual que en caso de las cuñas, impide el movimiento del tornillo sin necesidad de aplicar ningún par con tal que $\alpha < \phi$. En este caso para hacer bajar la carga habrá de aplicarse un par

$$M = P r \tan(\alpha - \phi)$$

Si $\alpha > \phi$ el momento que ha de aplicarse para mantener el tornillo sin movimiento es

$$M = P r \tan(\phi - \alpha)$$

Correas y cables

El rozamiento también tiene su efecto sobre correas, cuerdas y cables apoyados en poleas que se usan en una gran variedad de aplicaciones. Estudiaremos aquí el caso más sencillo de un cable apoyado sobre un cilindro de radio r sobre el que existe rozamiento. Supondremos que sobre los extremos del cable se aplican dos fuerzas diferentes T_1 y T_2 tales que el movimiento es inminente. Tomamos un elemento diferencial de longitud de la correa y le aplicamos la ecuación de equilibrio del hilo ideal,

$$d\vec{T} + \vec{F}dS = 0$$

y separando las componentes tangencial y normal tenemos

$$\begin{aligned} dT - F_R dS &= 0 \\ \frac{T}{r} dS - N dS &= 0 \end{aligned}$$

que junto con la condición de movimiento inminente $F_R = \mu N$ lleva a

$$dT = \mu T d\theta$$



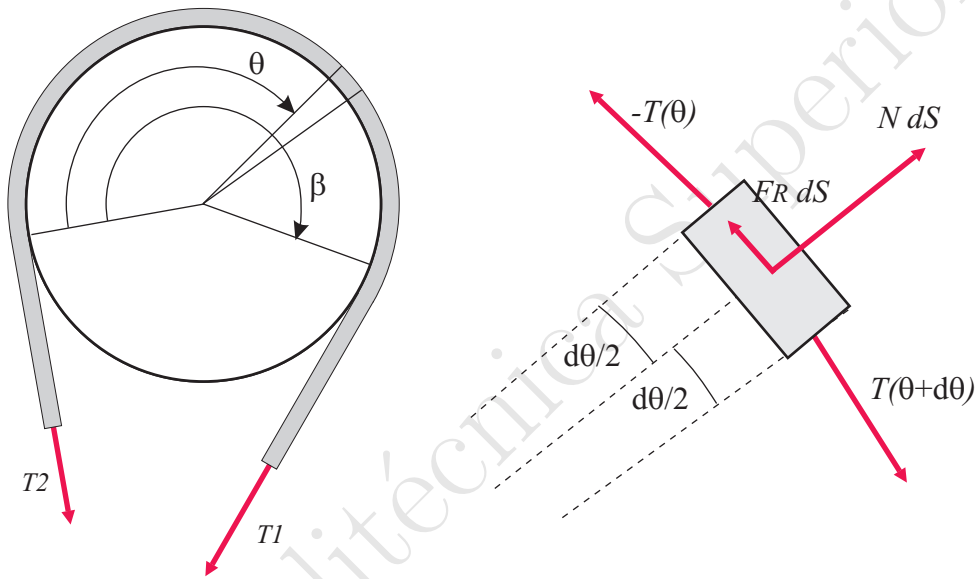
que se integra facilmente

$$\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \mu \int_0^\beta d\theta$$

por lo que se obtiene

$$T_1 = T_2 e^{\mu\beta}$$

Como se obtiene una ley exponencial, puede obtenerse una gran diferencia de tensiones haciendo que argumento de la exponencial sea grande lo cual se puede conseguir haciendo que el cable de varias vueltas alrededor del cilindro. Si se enrolla una cuerda en un tambor dando n vueltas el valor del ángulo es $\beta = 2n\pi$ y puede utilizarse para frenar un cuerpo haciendo un esfuerzo pequeño.





4. Fuerzas distribuidas

- 4.1 Centros de masa.
- 4.2 Tensor de inercia.
- 4.3 Teorema de Steiner o de los ejes paralelos.
- 4.4 Diagonalización del tensor de inercia.
- 4.5 Simetrías en las distribuciones de masas.
- 4.6 Elipsoide de inercia

Introducción

El objetivo de este tema es la determinación de las magnitudes que caracterizan la dinámica de un sistema de masa distribuida: **centro de masas** y **tensor de inercia**. Se analizarán dos tipos de sistemas:

- Sistemas discretos: Formados por una colección de masas puntuales $\{(m_\alpha, \vec{r}_\alpha); \alpha = 1, 2, \dots\}$
- Sistemas continuos: Especificados por la función escalar densidad $\rho = \rho(\vec{r}) = \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ con dimensiones $[\rho] = ML^{-3}$. Así, a cada volumen elemental dV le corresponde una masa $dm = \rho \cdot dV$. Para cuerpos en los que una de las dimensiones es despreciable (superficies) se define una densidad superficial de masa $\sigma = \sigma(\vec{r})$, con $[\sigma] = ML^{-2}$ de manera que $dm = \sigma \cdot dA$. Si el cuerpo solamente tiene una dimensión apreciable (curva), se define una densidad lineal de masa $\lambda = \lambda(\vec{r})$, $[\lambda] = ML^{-1}$ de manera que la masa del elemento de arco dS es $dm = \lambda \cdot dS$.

4.1. Centro de masas

El centro de masas G es el punto del espacio cuyo vector de posición viene dado por:

$$\vec{r}_G = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha}}{\sum_{\alpha} m_{\alpha}} = \frac{\sum_{\alpha} m_{\alpha} \cdot \vec{r}_{\alpha}}{\mu}$$

siendo μ la masa total del sistema. De acuerdo con esta definición el centro de masas se determina como el promedio, ponderado por las masas de cada partícula, de los vectores de posición de las partículas que constituyen el sistema.

Para un sistema continuo se sustituye la suma por una integral y la masa del elemento diferencial de volumen ($dm = \rho dV$), de superficie ($dm = \sigma dA$) o de línea ($dm = \lambda d\ell$) de manera que:

$$\vec{r}_G = \frac{\iiint \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{\iiint \rho(\vec{r}) dV} = \frac{\iint \vec{r} \sigma(\vec{r}) dA}{\iint \sigma(\vec{r}) dA} = \frac{\int \vec{r} \lambda(\vec{r}) d\ell}{\int \lambda(\vec{r}) d\ell}$$

Propiedades:

1. Para un cuerpo homogéneo, densidad constante, el centro de masa coincide con el centro geométrico.
2. Para un sistema compuesto por $k = 1, \dots, N$ subsistemas el centro de masas se determina como

$$\vec{r}_G = \frac{1}{\mu} \sum_k \mu_k \vec{r}_G(k)$$

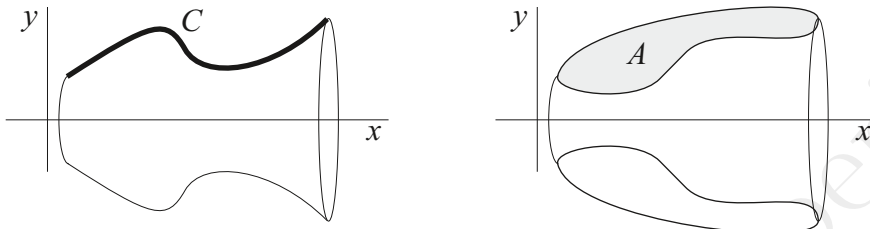
siendo $\mu = \sum_{k=1}^N \mu_k$

Esta expresión es válida para huecos considerándolos como subsistemas de masa negativa.

3. La distribución de momentos generado por la fuerza gravitatoria distribuida sobre los elementos de masa de un sistema es equivalente a su resultante, el peso, colocada en el centro de masas.

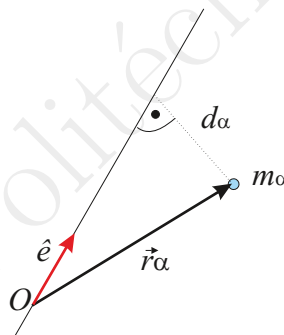
4. **Teoremas de Pappus-Guldin:** Sirven para determinar la posición del centro de una curva/superficie cuando se conoce el área/volumen engendrado al realizar una revolución completa alrededor de un eje

- Para una curva, $y_G = \frac{A}{2\pi L}$, siendo L la longitud de la curva y A la superficie generada en una revolución alrededor del eje x .
- Para una superficie, $y_G = \frac{Vol}{2\pi A}$ siendo A el área de la superficie y Vol el volumen engendrado en la revolución alrededor del eje x .



4.2. Tensor de Inercia

Se define el **momento de inercia respecto de un eje e** como la suma del producto de las masas por su distancia al eje al cuadrado, $I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$. Sus dimensiones son $M \cdot L^2$. A partir del momento de inercia puede definirse también el radio de giro para el eje e como $R_e = \sqrt{\frac{I_e}{\mu}}$ con dimensiones de longitud.



Si se toma el origen O en algún punto del eje e , la distancia de cada partícula al eje sería $d_{\alpha} = |\vec{r}_{\alpha} \times \hat{e}|$ y podría escribirse

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \hat{e})^2 = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha}^2 - (\vec{r}_{\alpha} \cdot \hat{e})^2]$$

Desarrollando los términos de la expresión anterior

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\alpha} \cdot \hat{e} &= \sum_i r_{\alpha i} e_i \\ (\vec{r}_{\alpha} \cdot \hat{e})^2 &= \left(\sum_i r_{\alpha i} \cdot e_i \right) \left(\sum_j r_{\alpha j} \cdot e_j \right) = \sum_i \sum_j r_{\alpha i} r_{\alpha j} e_i e_j \\ \hat{e}^2 &= \sum_i e_i e_j = \sum_i \sum_j \delta_{ij} e_i e_j \end{aligned}$$

y separando todo aquello que depende del eje e , tenemos:

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left\{ \vec{r}_{\alpha}^2 \left(\sum_i \sum_j \delta_{ij} e_i e_j \right) - \left(\sum_i \sum_j r_{\alpha i} r_{\alpha j} \right) e_i e_j \right\}$$

que escrito en forma más compacta queda:

$$I_e = \sum_i \sum_j I_{ij} e_i e_j$$

donde las I_{ij} son las 9 componentes de un tensor de 2º orden, denominado **tensor de inercia**

$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 \delta_{ij} - r_{\alpha i} r_{\alpha j})$$

En una base cartesiana, $\hat{e}(e_x, e_y, e_z)$ y $\vec{r}_{\alpha}(r_x, r_y, r_z)$ el momento de inercia queda

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [e_x^2 (r_y^2 + r_z^2) + e_y^2 (r_x^2 + r_z^2) + e_z^2 (r_x^2 + r_y^2)] - \sum_{\alpha} m_{\alpha} [2e_x e_y r_x r_y + 2e_x e_z r_x r_z + 2e_y e_z r_y r_z]$$

y escrito en forma matricial :

$$I_e = (e_x, e_y, e_z) \begin{pmatrix} I_{xx} & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_{yy} & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal del tensor de inercia son los **momentos de inercia** para los ejes cartesianos $Oxyz$. Los elementos de fuera de la diagonal se conocen como **productos de inercia** y son el producto de la masa por la distancia a dos de los planos cartesianos:

- Momento de inercia para el eje Ox

$$I_{xx} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 \cdot 1 - x_{\alpha} x_{\alpha}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) = I_x$$

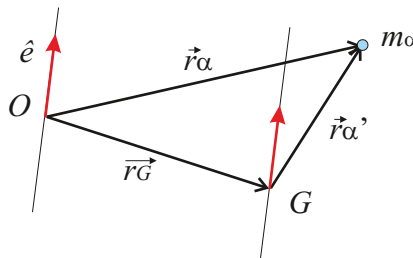
- Producto de inercia de los planos Oyz , Oxz

$$I_{xy} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 \cdot 0 - x_{\alpha} x_{\alpha}) = - \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} = -P_{xy}$$

- El tensor de inercia es un tensor simétrico: Se cumple que $I_{ij} = I_{ji}$. Por lo tanto, $I_{xz} = -P_{xz} = I_{zx}$, $I_{yx} = I_{xy} = -P_{xy}$ y las 6 cantidades $I_x, I_y, I_z, P_{xy}, P_{xz}, P_{yz}$ determinan el valor de todos los momentos y productos de inercia del sistema.

4.3. Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

Las componentes del tensor de inercia dependen del punto O elegido como origen. El teorema de Steiner nos da la relación entre estas componentes respecto de dos ejes paralelos, uno que pasa por el punto O y otro que pasa por el centro de masas G .



En un sistema de partículas, $\vec{r}_{\alpha} = \vec{r}_G + \vec{r}'_{\alpha}$ y el tensor de inercia en O puede escribirse:

$$\begin{aligned} I_{ij}^O &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha}^2 \delta_{ij} - r_{\alpha i} r_{\alpha j}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(\vec{r}_G + \vec{r}'_{\alpha})^2 \delta_{ij} - (r_{Gi} + r'_{\alpha i})(r_{Gj} + r'_{\alpha j})] \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(\vec{r}_G^2 + \vec{r}'_{\alpha}{}^2 + 2\vec{r}_G \vec{r}'_{\alpha}) \delta_{ij} - (r_{Gi} r_{Gj} + r'_{\alpha i} r'_{\alpha j} + r_{Gi} r'_{\alpha j} + r_{Gj} r'_{\alpha i})] \\ &= \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) (\vec{r}_G^2 \delta_{ij} - r_{Gi} r_{Gj}) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}'_{\alpha}{}^2 \delta_{ij} - r'_{\alpha i} r'_{\alpha j}] + 2\vec{r}_G \delta_{ij} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} - r_{Gi} \sum_{\alpha} m_{\alpha} r'_{\alpha j} - r_{Gj} \sum_{\alpha} m_{\alpha} r'_{\alpha i} \end{aligned}$$

Dado que $\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} - \mu \vec{r}_G = 0$, por definición de G , las componentes del tensor de inercia cambian según:

$$I_{ij}^O = I_{ij}^G + \mu (\vec{r}_G^2 \delta_{ij} - r_{Gi} r_{Gj})$$

es decir, tensor de inercia en O es el tensor de inercia en G más el tensor de inercia que tendría en O la masa total del sistema situada en G .

- Para los momentos de inercia se tiene:

$$I_x^O = I_{xx}^O = I_{xx}^G + \mu (y_G^2 + z_G^2) = I_x^G + \mu \cdot d^2$$

siendo d la distancia entre los ejes. Nótese que d en general no coincide con la distancia entre los puntos O y G . Además, como $d^2 > 0$, salvo que los ejes coincidan, $I_O > I_G$ y como consecuencia, para una dirección fija \hat{u} , el valor mínimo del momento de inercia se obtiene cuando el eje pasa por el centro de masas.

- Análogamente para los productos de inercia:

$$P_{xy}^O = -I_{xy}^O = -[I_{xy}^G + \mu (-x_G \cdot y_G)] = P_{xy}^G + \mu x_G \cdot y_G$$

4.4. Diagonalización del tensor de inercia

Para un origen O dado, las componentes del tensor de inercia dependen de la orientación del sistema de referencia. Puede demostrarse que mediante una rotación siempre es posible encontrar una orientación de la base en la que el tensor sea diagonal. El cambio en las componentes del tensor de inercia vendrá dado por la matriz de la transformación A , de la forma $I' = AIA^t$, o bien $I'_{ij} = \sum_k \sum_l a_{ik} a_{jl} I_{kl}$. De manera que si A es la matriz de rotación que diagonaliza al tensor

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

tenemos:

$$I' = AIA^t = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Los tres vectores $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ definen 3 direcciones ortogonales que se llaman **direcciones principales** de inercia. Los momentos de inercia según esas direcciones, (I_1, I_2, I_3) , se llaman **momentos principales** de inercia. Puede demostrarse que por ser el tensor de inercia simétrico, los tres momentos principales son reales.

invariantes del tensor de inercia Todo tensor de 2º orden tiene dos invariantes (no dependen de la orientación del sistema de referencia):

- Determinante: $|I_{ij}| = I_1 \cdot I_2 \cdot I_3$
- Traza: $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = I_1 + I_2 + I_3$

Nótese que $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [(y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) + (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) + (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2)] = 2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}^2 = 2I_O$, es decir:

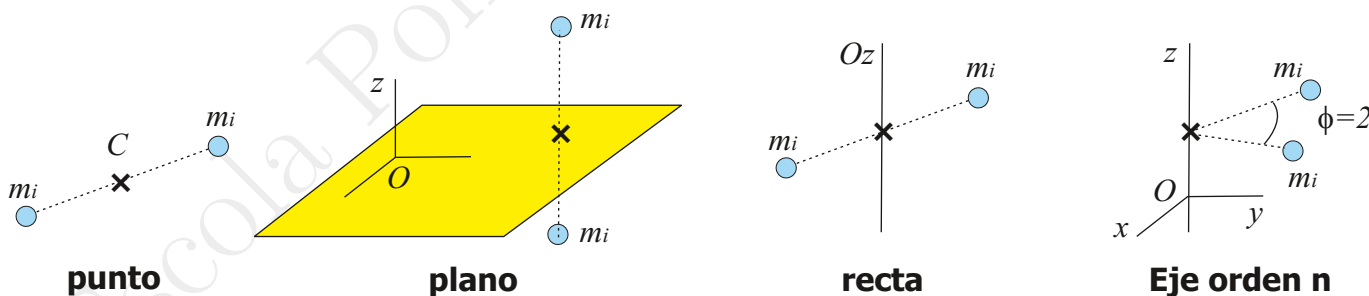
$$I_1 + I_2 + I_3 = 2I_O$$

siendo I_O el momento de inercia respecto del punto O .

4.5. Simetrías en las distribuciones de masas

En sistemas con simetrías las direcciones principales están relacionadas con los ejes y planos de simetría. Veremos solamente los casos más sencillos que facilitan la determinación de la posición del centro de masa y de las componentes del tensor de inercia.

- 1. Simetría respecto de un punto C:** Por cada m situada en \vec{r} existe otra $m' = m$ situada en $\vec{r}' = \vec{r} - 2(\vec{r} - \vec{R})$, o lo que es lo mismo $\vec{r}' - \vec{R} = -(\vec{r} - \vec{R})$
 - El centro de masas coincide con el centro de simetría: $\vec{r}_G = \vec{R}$
- 2. Simetría respecto de un plano:**
 - El centro de masas se encuentra en el plano y coincide con el centro de masas de la distribución proyectada.
 - El plano de simetría contiene a 2 de las direcciones principales, la tercera es la normal al plano.
- 3. Eje de simetría de orden n :** La distribución se repite girando ángulos de $\frac{2\pi}{n}$, es decir $\varphi = \frac{2\pi}{n}, n = 2, 3, \dots$. Si se trata de un eje de revolución $\varphi \rightarrow 0, n = \infty$.
 - El c.d.m. se encuentra en el eje de simetría y coincide con el de la distribución proyectada, $\frac{2\pi}{n}$
 - El eje de simetría es eje principal.
 - Si $n \geq 3$, cualquier dirección perpendicular al eje es principal y además todas tienen el mismo momento principal, $I_1 = I_2 \neq I_3$
- 4. Cuerpo homogéneo:** ($\rho = cte$). El centro de masas y los ejes principales guardan la misma simetría que la forma del cuerpo.



4.6. Elipsoide de inercia

Se define como el lugar geométrico de los puntos $P(x, y, z)$ cuya distancia al origen O es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del momento de inercia para la dirección \vec{OP} , es decir,

$$\vec{OP} = \frac{cte}{\sqrt{I_e}} \cdot \hat{e}$$

Haciendo $(\vec{OP})^2 \cdot I_e = cte$ vemos que estos puntos están sobre una superficie cuádrica dada por la ecuación:

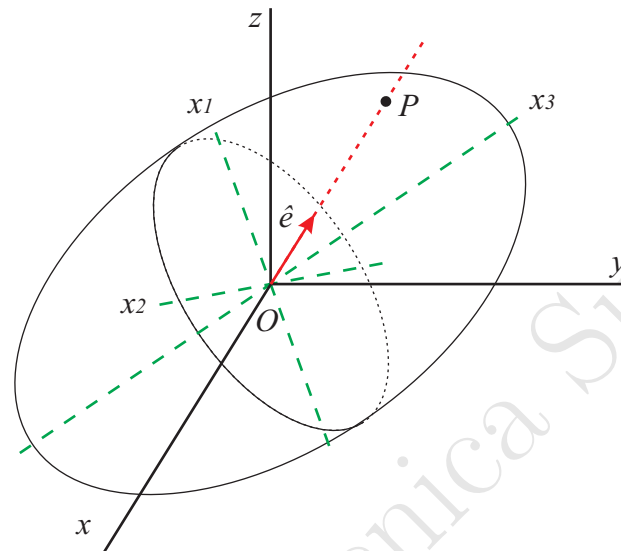
$$I_{xx} \cdot x^2 + I_{yy} \cdot y^2 + I_{zz} \cdot z^2 + 2[I_{xy} \cdot xy + I_{xz} \cdot xz + I_{yz} \cdot yz] = cte^2$$

Como I_e está acotado, $|\vec{OP}|$ también lo estará y por lo tanto la superficie corresponderá a un elipsoide, denominado **elipsoide de inercia**. Los ejes de este elipsoide serán las direcciones principales de inercia y por tanto los semiejes del elipsoide serán inversamente proporcionales a las raíces de los momentos principales de inercia. La ecuación del elipsoide referido a los ejes principales queda

$$I_1 \cdot x_1^2 + I_2 \cdot x_2^2 + I_3 \cdot x_3^2 = cte^2$$

o bien

$$\left(\frac{x_1}{cte/\sqrt{I_1}} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{cte/\sqrt{I_2}} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{cte/\sqrt{I_3}} \right)^2 = 1$$



Escuela Politécnica Superior



5. Trabajo virtual y energía potencial

- 5.1 Principio del trabajo virtual. Aplicación a la estática.
- 5.2 Coordenadas generalizadas.
- 5.3 Energía potencial y criterios de estabilidad del equilibrio.

Introducción

Hasta ahora hemos analizado el equilibrio de un sistema ligado aislándolo y escribiendo las ecuaciones vectoriales de equilibrio para cada componente como si fuera libre. Este método se suele utilizar cuando la posición de equilibrio es conocida y se quiere determinar el valor de alguna fuerza que se desconoce. Sin embargo, en muchas situaciones nos encontramos con sólidos ligados cuyas partes pueden moverse unas respecto de las otras de manera que son posibles varias configuraciones de equilibrio. En estos casos el método vectorial, aunque válido, no suele ser el más adecuado para resolver el problema. Un método alternativo basado una magnitud escalar, el trabajo, es más útil; proporciona una visión más profunda del comportamiento de los sistemas mecánicos y permite además analizar la estabilidad de los sistemas en equilibrio. Este método se denomina **método del trabajo virtual**.

5.1. Principio del trabajo virtual. Aplicación a la estática.

Definimos en primer lugar algunos conceptos:

- Desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_\alpha$: Es un desplazamiento infinitesimal de la partícula α compatible con las ligaduras. El término virtual se entiende como ficticio, ya que si el sistema está en equilibrio no está permitido ningún movimiento.
- Trabajo virtual δW : Es el trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento virtual, $\delta \vec{r}_\alpha$.

Principio del trabajo virtual ¹

Un sistema está en equilibrio cuando, para cualquier desplazamiento virtual, el trabajo realizado por las fuerzas que actúan es nulo:

$$\text{EQUILIBRIO} \Leftrightarrow \delta W = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = 0 \quad \forall \delta \vec{r}_{\alpha}$$

5.2. Coordenadas generalizadas.

Para un sistema con ligaduras los desplazamientos de sus partículas no son independientes y por tanto las coordenadas utilizadas para definir la posición del sistema tampoco lo son. Sea S el número de grados de libertad de un sistema, definimos entonces:

Coordenadas generalizadas : Conjunto de variables $\{q_1, \dots, q_S\}$ independientes entre sí, que definen unívocamente la posición del sistema, i. e.,

$$\vec{r}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha}(q_1 \dots q_S)$$

Fuerza generalizada : El desplazamiento virtual y el trabajo virtual se expresan en función de las coordenadas generalizadas como

$$\delta \vec{r}_{\alpha} = \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \delta q_j$$

y

¹Se puede tomar como un principio si se considera la estática de forma aislada si no, el equilibrio no es más que una solución particular de movimiento.

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} \sum_{j=1}^S \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \delta q_j$$

y así, denominamos fuerza generalizada Q_j asociada a la coordenada generalizada q_j a:

$$Q_j = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j}$$

DE manera que, en función de las coordenadas y fuerzas generalizadas, el trabajo virtual puede escribirse:

$$\delta W = \sum_{j=1}^S Q_j \delta q_j$$

y dado que los desplazamientos de las coordenadas generalizadas son independientes, el principio del trabajo virtual queda:

$$\text{EQUILIBRIO} \Leftrightarrow \delta W = 0, \forall \delta q_j \Leftrightarrow Q_j = 0, \forall j$$

5.3. Energía potencial y criterios de estabilidad del equilibrio.

Decimos que un sistema de partículas es conservativo si la fuerza que actúa sobre cada una de las partículas es conservativa: $\forall \alpha, \vec{F}_{\alpha} = -\vec{\nabla}_{\alpha} V$, siendo V una función escalar que r depende únicamente de las posiciones de las partículas, $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{\alpha}, \dots)$, el potencial o energía potencial del sistema.

El trabajo en un sistema conservativo es :

$$dW = \sum_{\alpha=1}^N -\vec{\nabla}_{\alpha} V \cdot d\vec{r}_{\alpha} = -\sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_{\alpha}} dx_{\alpha} + \frac{\partial V}{\partial y_{\alpha}} dy_{\alpha} + \frac{\partial V}{\partial z_{\alpha}} dz_{\alpha} \right) = -dV$$

y dado que las fuerzas generalizadas se pueden escribir en función del potencial como:

$$Q_j = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial \vec{r}_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

las posiciones de equilibrio corresponderán a los valores estacionarios de V . De manera que la condición necesaria y suficiente para que un sistema conservativo esté en equilibrio es:

$$\text{EQUILIBRIO} \Leftrightarrow \delta W = 0, \forall \delta \vec{r}_{\alpha} \Leftrightarrow Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \forall j$$

Además, el potencial permite analizar la **estabilidad de las posiciones de equilibrio**. El concepto de estabilidad consiste en garantizar si ante pequeñas perturbaciones respecto de la posición de equilibrio se mantiene el movimiento próximo a dicha configuración o, si por el contrario, se aleja indefinidamente de la misma.

- Las posiciones de equilibrio correspondientes a un mínimo de V son posiciones de equilibrio estable.
- Las posiciones correspondientes a un máximo o punto estacionario de V son posiciones de equilibrio inestable.



6. Cinemática del punto

- 6.1 Derivada de un vector en una base móvil.
- 6.2 Triedro intrínseco. Fórmulas de Frenet.
- 6.3 Velocidad y aceleración. Componentes intrínsecas.

6.1. Derivada de un vector en una base móvil.

Sea $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ una base ortonormal orientada a derechas que cambia con el tiempo t , y \vec{v} un vector cualquiera,

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \hat{e}_i$$

La derivada de la base proyectada sobre la propia base forman los elementos $B_{ij} = \frac{d\hat{e}_i}{dt} \cdot \hat{e}_j$ de una matriz antisimétrica. Renombrando los elementos de esta matriz de acuerdo con

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

se tiene que $\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\Omega} \times \hat{e}_i$
Entonces,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dv_i}{dt} \hat{e}_i + \vec{\Omega} \times \vec{v}$$

que se conoce por *Fórmula de Boure*².

6.2. Triedro intrínseco. Fórmulas de Frenet.

Consideremos una curva de parámetro t ,

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$$

La derivada de la curva $\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ es un vector tangente a la curva. Así, la **recta tangente** en el punto $\vec{r}(t_0)$ es:

$$\vec{P} = \vec{r}(t_0) + \lambda \dot{\vec{r}}(t_0)$$

El **plano normal** en el punto $\vec{r}(t_0)$:

$$(\vec{P} - \vec{r}(t_0)) \cdot \dot{\vec{r}}(t_0) = 0$$

El **plano osculador** en el punto $\vec{r}(t_0)$ es el límite de los planos que contienen la tangente en $\vec{r}(t_0)$ y otro punto de la curva $\vec{r}(t_1)$ a medida que $t_1 \rightarrow t_0$,

$$(\vec{P} - \vec{r}(t_0)) \cdot (\dot{\vec{r}}(t_0) \times \ddot{\vec{r}}(t_0)) = 0$$

Recta normal principal es la intersección del plano normal y el osculador.

Recta binormal es la recta perpendicular a la tangente y a la normal principal.

Plano rectificante es el que contiene la tangente y la binormal.

Longitud de arco medida desde $\vec{r}(t_0)$ y en el sentido creciente de t :

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| dt$$

²También se conoce por teorema de Coriolis

6.2.1. Triedro intrínseco

Vector unitario tangente

$$\hat{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{r}'$$

Vector unitario normal

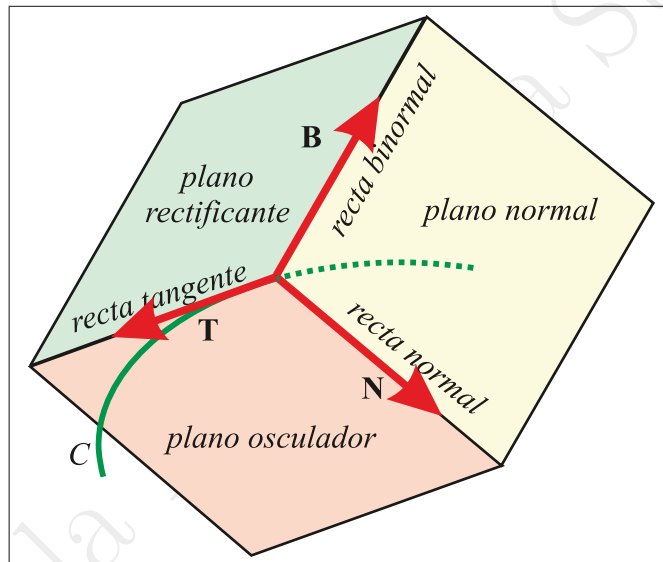
$$\hat{N} = \frac{\hat{T}'}{\|\hat{T}'\|}$$

Vector unitario binormal

$$\hat{B} = \hat{T} \times \hat{N}$$

Triedro intrínseco en cada punto regular de la curva ($\vec{r}' \neq 0, \vec{r}'' \neq 0$) puede definirse un triedro $\{\hat{T}, \hat{N}, \hat{B}\}$ ortonormal y orientado a derechas que se llama triedro intrínseco o de Frenet.

Los vectores del triedro intrínseco en un punto de la curva determinan las tres rectas y los tres planos.



6.2.2. Curvatura y torsión

Curvatura

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|$$

donde $\Delta \varphi$ es el ángulo formado por las tangentes en dos puntos de la curva separados Δs .

Se cumple,

$$\kappa = \left\| \frac{d\hat{T}}{ds} \right\| \geq 0$$

Torsión (sin signo)

$$\tau^* = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \psi}{\Delta s}$$

donde $\Delta \psi$ es el ángulo formado por los planos osculadores en dos puntos de la curva separados Δs .

Se cumple,

$$\tau^* = \left\| \frac{d\hat{B}}{ds} \right\| \geq 0$$



6.2.3. Fórmulas de Frenet

1ª Fórmula de Frenet

$$\frac{d\hat{T}}{ds} = \kappa\hat{N}$$

2ª Fórmula de Frenet

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = \pm\tau^*\hat{N}$$

Torsión (con signo)

$$\tau = -\frac{d\hat{B}}{ds} \cdot \hat{N}$$

y entonces,

$$\frac{d\hat{B}}{ds} = -\tau\hat{N}$$

3ª Fórmula de Frenet

$$\frac{d\hat{N}}{ds} = -\kappa\hat{T} + \tau\hat{B}$$

Vector de Darboux

$$\vec{D} = \kappa\hat{B} + \tau\hat{T}$$

El vector de Darboux determina la variación de los vectores del triedro intrínseco respecto del arco,

$$\frac{d\hat{u}}{ds} = \vec{D} \times \hat{u}$$

siendo \hat{u} igual a \hat{T} , \hat{N} ó \hat{B} .

6.3. Velocidad y aceleración. Componentes intrínsecas.

Vector de posición. El vector de posición de una partícula en el sistema de referencia $Oxyz$ viene dado por

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (6.2)$$

donde $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ son las coordenadas cartesianas del punto.

Las dimensiones son de longitud $[\vec{r}] = [x] = [y] = [z] = L$.

Trayectoria. Es la curva descrita por el extremo del vector \vec{r} en el transcurso del tiempo.

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array} \right\} t \in (\infty, +\infty) \quad (6.3)$$

sería la ecuación paramétrica de la curva.

Una misma trayectoria puede recorrerse de muy diversas formas, para especificar el movimiento habrá que conocer también como se recorre la trayectoria.

6.3.1. Velocidad y aceleración. Definiciones y unidades.

Velocidad: es el cambio del vector de posición respecto del tiempo,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (6.4)$$

En coordenadas cartesianas (no así en polares) las componentes de la velocidad coinciden con las derivadas de las componentes del vector de posición:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \quad v_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(t)}{dt} \quad (6.5)$$

Las dimensiones son $[\vec{v}] = [v_x] = [v_y] = [v_z] = \text{LT}^{-1}$ y la unidad (SI) es el “metro por segundo” cuyo símbolo es m/s.

El vector velocidad \vec{v} es tangente a la trayectoria ya que en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ la cuerda se confunde con la tangente.

El módulo de la velocidad $v = |\vec{v}|$ es la derivada del arco respecto del tiempo ya que en el límite $\Delta t \rightarrow 0$ la cuerda se confunde con el arco, $|\Delta \vec{r}| = \Delta s$:

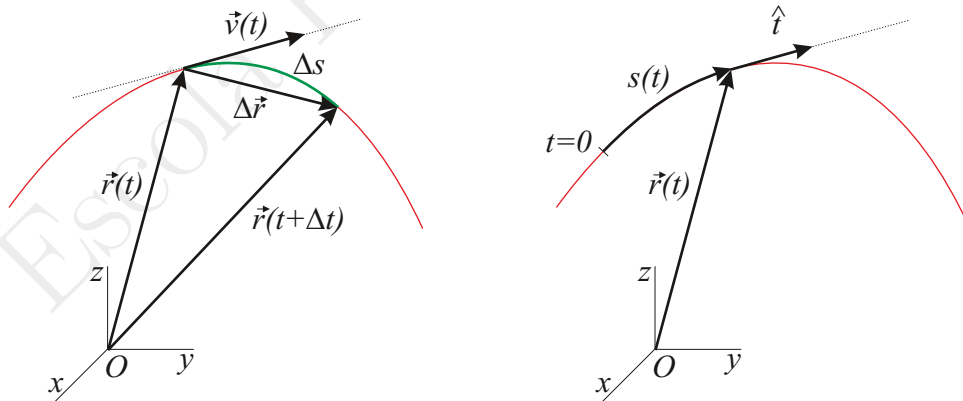
$$v = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| = \frac{ds(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (6.6)$$

Integrando respecto del tiempo se obtiene la longitud de arco,

$$s(t) = s(0) + \int_0^t |\vec{v}| dt \quad (6.7)$$

y se conoce como *ley horaria*.

El movimiento de una partícula queda totalmente especificado conocida la **trayectoria** y la **ley horaria**.



Aceleración: es el cambio del vector de velocidad respecto del tiempo,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \quad (6.8)$$

De nuevo, las componentes cartesianas de la aceleración coinciden con las derivadas de las componentes del vector de velocidad.

$$a_x = \frac{dv_x(t)}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y(t)}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z(t)}{dt} \quad (6.9)$$

Las dimensiones son $[\vec{a}] = [a_x] = [a_y] = [a_z] = \text{LT}^{-2}$ y la unidad (SI) es el “metro por segundo al cuadrado” cuyo símbolo es m/s².

**6.3.2. Componentes tangencial y normal de la aceleración.**

Dividiendo la velocidad por su módulo se obtiene el *vector unitario tangente* a la trayectoria:

$$\hat{u}_T = \frac{\vec{v}}{v} \quad (6.10)$$

que tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad.

Si derivamos la expresión $\vec{v} = v \hat{u}_T$ se tiene,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + v \frac{d\hat{u}_T}{dt} \quad (6.11)$$

donde aparecen dos componentes perpendiculares que se conocen por *componentes intrínsecas de la aceleración*, la primera esta asociada al cambio del módulo de la velocidad y la segunda al cambio de su dirección.

Componente tangencial de la aceleración: es la componente de la aceleración paralela al vector de velocidad,

$$a_t = \vec{a} \cdot \hat{u}_T = \frac{dv}{dt} \quad (6.12)$$

coincide con la derivada del módulo de la velocidad.

El otro sumando se conoce por componente normal ya que es perpendicular a la tangente. Para demostrarlo derivamos el cuadrado del vector unitario tangente, $\hat{u}_T^2 = \hat{u}_T \cdot \hat{u}_T = 1$,

$$0 = \frac{d[\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T]}{dt} = 2\hat{u}_T \cdot \frac{d\hat{u}_T}{dt} \Rightarrow \hat{u}_T \perp \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

Además, para separar la dependencia de la forma de la trayectoria de la rapidez con que se recorre hacemos el siguiente cambio,

$$\frac{d\hat{u}_T}{dt} = \frac{d\hat{u}_T(s(t))}{dt} = \frac{d\hat{u}_T}{ds} \frac{ds}{dt} = v \frac{d\hat{u}_T}{ds}$$

La derivada $\frac{d\hat{u}_T}{ds}$ define la dirección normal y su módulo es la inversa del radio de curvatura:

$$\hat{u}_N = \frac{d\hat{u}_T/ds}{|d\hat{u}_T/ds|}$$

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\hat{u}_T}{ds} \right|$$

Entonces, la **Componente normal de la aceleración** es,

$$a_n = \vec{a} \cdot \hat{u}_N = v^2 \left| \frac{d\hat{u}_T}{ds} \right| = \frac{v^2}{\rho} \quad (6.13)$$

Finalmente,

$$\vec{a} = a_t \hat{u}_T + a_n \hat{u}_N = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T + \frac{v^2}{\rho} \hat{u}_N \quad (6.14)$$

A modo de conclusión indicaremos que $v = ds/dt$ y $a_t = dv/dt$ dependen de la ley horaria $s(t)$ mientras que \hat{u}_T , \hat{u}_N y ρ dependen de la forma de la trayectoria. En la aceleración normal se mezclan las dos dependencias, $a_n = v^2/\rho$.



7. Cinemática del sólido rígido

- 7.1 Sólido rígido. Condición cinemática de rigidez
- 7.2 Movimientos de traslación y rotación
- 7.3 Distribución helicoidal de velocidades. Teorema de Chasles
- 7.4 Grupo cinemático. Invariantes
- 7.5 Eje instantáneo de rotación. Velocidad de deslizamiento mínimo. Axoides
- 7.6 Distribución de aceleraciones

Introducción

En este capítulo consideraremos las relaciones cinemáticas que describen el movimiento de los cuerpos rígidos y que asimismo son la base para el estudio de todas las máquinas y mecanismos.

7.1. Sólido rígido. Condición cinemática de rigidez

Ya hemos visto que analíticamente, la condición de rigidez de un sólido puede expresarse como

$$[\vec{r}_A - \vec{r}_B]^2 = \vec{r}_{AB}^2 = cte \quad \forall A, B \in \text{cuerpo}$$

derivando respecto del tiempo la expresión anterior:

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_{AB})^2 = 0 = 2 \cdot \vec{r}_{AB} \cdot \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt} = 2 \cdot \vec{r}_{AB} (\vec{v}_A - \vec{v}_B)$$

y dividiendo por el módulo de \vec{r}_{AB} queda:

$$\vec{v}_A \cdot \hat{r}_{AB} = \vec{v}_B \cdot \hat{r}_{AB}$$

En cada instante, las velocidades de dos puntos cualesquiera del sólido tienen proyecciones iguales sobre la recta que los une. Esta es la llamada condición cinemática de rigidez o teorema de las velocidades proyectadas. Una consecuencia de este teorema es que la velocidad de cualquier punto del sólido está determinada si se conocen las velocidades de 3 puntos no alineados (basta tener en cuenta que un vector está determinado si se conocen sus proyecciones sobre 3 rectas no paralelas).

7.2. Movimiento de traslación y rotación.

Movimiento de traslación: Un sólido rígido tiene un movimiento de traslación respecto de un sistema de referencia S si en cada instante todas sus puntos tienen igual velocidad no nula respecto de S . Se denomina velocidad de traslación a la velocidad común de todos los puntos. Además, en el movimiento de traslación todos los puntos del sólido tienen la misma aceleración instantánea respecto del mismo sistema de referencia S . Sean A y B dos puntos cualesquiera

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A \quad \forall A, B$$

y por tanto:

$$\frac{d}{dt} (\overrightarrow{AB}) = 0 \quad \forall A, B$$

La posición relativa de dos partículas cualesquiera del sólido permanece invariable en el transcurso del movimiento; por tanto todas las trayectorias son paralelas (sin embargo la traslación no tiene porque corresponder necesariamente a un movimiento rectilíneo).

Movimiento de Rotación: Un sólido rígido realiza un movimiento de rotación si en cada instante existe una recta de puntos con velocidad nula, esta recta es el eje de rotación.

Como las distancias entre los puntos del sólido permanecen constantes; tomando como origen del sistema de referencia un punto O sobre el eje, tendríamos que para cualquier punto P , $|\overrightarrow{OP}| = cte$. El vector \overrightarrow{OP} no cambia de módulo pero sí de orientación, por tanto, su velocidad será

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{OP}$$

siendo $\vec{\Omega}$ el vector asociado al cambio de orientación de un sistema de referencia que se mueve con el sólido. Por otra parte P describe una trayectoria circular con centro en el eje de rotación y contenida en un plano perpendicular al eje, de manera que su velocidad también viene dada por $v_P = R \cdot \frac{d\varphi}{dt} = R \cdot \omega$ con $R = |\vec{OP}| \cdot \text{sen}\theta$. De manera que la velocidad de P también es:

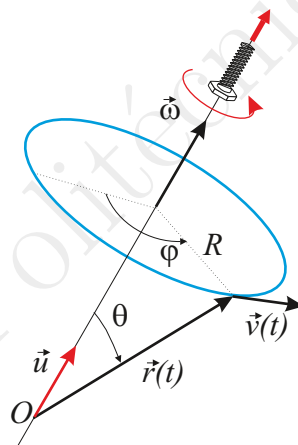
$$v_P = \omega \cdot |\vec{OP}| \cdot \text{sen}\theta$$

Definimos entonces el vector velocidad de rotación $\vec{\omega}$ con las siguientes características:

- Módulo: La velocidad angular $\frac{d\varphi}{dt}$
- Dirección: La del eje de rotación
- Sentido: Según la ley del tornillo

y así podemos escribir la velocidad del punto P del sólido en el movimiento de rotación como:

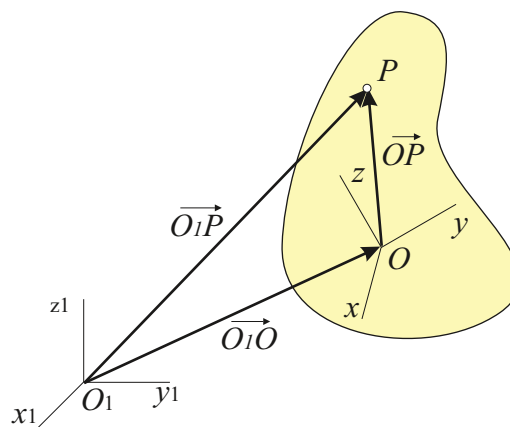
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{OP}$$



7.3. Distribución helicoidal de velocidades. Teorema de Chasles

Consideremos un sistema de referencia S ligado al sólido y otro sistema de referencia en el espacio S_1 . Sea P un punto del sólido, su posición en el espacio S_1 vendrá dada por:

$$\vec{O_1P} = \vec{O_1O} + \vec{OP}$$





Derivando respecto del tiempo y teniendo en cuenta el cambio de orientación de S respecto de S_1 (Fórmula de Boure) tendremos:

$$\vec{v}_P = \frac{d\vec{O}_1\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{O}_1\vec{O}}{dt} + \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{d\vec{O}_1\vec{O}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

de donde se obtiene la ley de distribución de velocidades en el sólido rígido:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$$

Propiedades:

- Se trata de una distribución helicoidal. Tiene la misma forma que la ley de distribución de momentos en un sistema de vectores deslizantes y por tanto todas las propiedades de la distribución de momentos son aplicables a las velocidades en un sólido rígido sin más que cambiar el vector momento \vec{M} por el vector velocidad \vec{v} y la resultante \vec{R} por la velocidad de rotación $\vec{\omega}$.
- La velocidad no cambia en puntos situados sobre rectas paralelas a $\vec{\omega}$.
- **Movimiento general del sólido. Teorema de Chasles:** El movimiento general del sólido es una traslación (\vec{v}_O) más una rotación alrededor de O ($\vec{\omega} \times \vec{OP}$).

7.4. Grupo cinemático. Invariantes

Las variables que caracterizan el movimiento general del sólido son $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$, a este par se le denomina grupo cinemático en O. El grupo cinemático no es invariante dado que depende del punto considerado. Se buscan magnitudes que caractericen el movimiento con independencia del punto de referencia elegido, es decir, magnitudes invariantes a cualquier grupo cinemático. Estas son:

1. Primer invariante o invariante vectorial: Es el vector $\vec{\omega}$, común a todos los grupos cinemáticos.

Sean $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$ y $(\vec{v}_{O'}, \vec{\omega}')$ los grupos cinemáticos en O y O' respectivamente. Para cualquier punto P, $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$ y también $\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega}' \times \vec{O'P}$. Dado que $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{OO'}$, se tiene que

$$\vec{\omega} \times \vec{OP} = \vec{\omega}' \times \vec{O'P} \quad \forall O, P$$

Por tanto la velocidad de rotación es la misma para todos los puntos del sólido; puede hablarse entonces de la velocidad de rotación del sólido

2. Segundo invariante o invariante escalar.

Proyectando la velocidad de un punto P cualquiera del sólido, \vec{v}_P sobre $\vec{\omega}$:

$$\vec{v}_P \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times \vec{OP}) \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} \quad \forall O, P$$

En un instante dado, la proyección de la velocidad de cualquier punto sobre la recta soporte de $\vec{\omega}$ es la misma para todos los puntos del sólido. Es el segundo invariante.

Propiedades

- Podemos descomponer la velocidad de cualquier punto en una componente paralela y otra perpendicular a $\vec{\omega}$: $\vec{v}_P = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$, $\forall P$, donde la componente \vec{v}_{\parallel} no cambia pero sí lo hace \vec{v}_{\perp} .
- Si existe un punto con $\vec{v}_{\perp} = 0$, todos los que se encuentran en una recta paralela a $\vec{\omega}$ pasando por ese punto tendrán $\vec{v}_{\perp} = 0$, es decir, tendrán una velocidad paralela a $\vec{\omega}$.

7.5. Eje instantáneo de rotación

Llamamos eje instantáneo de rotación, EIR, al lugar geométrico de los puntos del sólido con velocidad paralela a $\vec{\omega}$. Sea $P(x, y, z)$ un punto del EIR, su velocidad será $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} \parallel \vec{\omega}$, con $\vec{v}_O(v_x, v_y, v_z)$ y $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. La ecuación del eje instantáneo de rotación queda:

$$\frac{v_x + \omega_y z - \omega_z y}{\omega_x} = \frac{v_y + \omega_z x - \omega_x z}{\omega_y} = \frac{v_z + \omega_x y - \omega_y x}{\omega_z}$$

- El eje instantáneo de rotación es equivalente al eje central de un sistema de vectores deslizantes.
- Se define la velocidad de deslizamiento mínimo v_d como la proyección de la velocidad de cualquier punto en la dirección del eje instantáneo de rotación:

$$v_d = \frac{\vec{v}_O \cdot \vec{\omega}}{\omega}$$

- La velocidad de los puntos del EIR es la velocidad de deslizamiento mínimo v_d
- La velocidad de deslizamiento mínimo corresponde al valor mínimo de la velocidad de los puntos de un sólido rígido:

$$v_P = |\vec{v}_P| = \sqrt{v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2} = \sqrt{v_d^2 + v_{\perp}^2} \geq v_d$$

- Si existe algún punto del sólido con velocidad nula, este punto pertenece al eje instantáneo de rotación.
- Determinación de EIR a partir del grupo cinemático $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$:

Si $P(x, y, z)$ pertenece al EIR, entonces $\vec{v}_P \parallel \vec{\omega}$ con $\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$. De manera que:

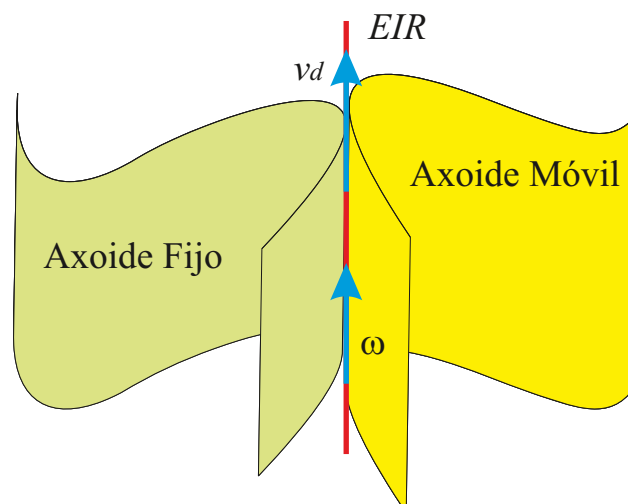
$$\vec{\omega} \times \vec{v}_P = 0 = \vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = \vec{\omega} \times \vec{v}_O + \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{OP}) - \omega^2 \overrightarrow{OP}$$

Por tanto:

$$P \in \text{EIR} \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_O}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}, \quad \forall \lambda$$

7.6. Axoides

La expresión que hemos dado en el apartado anterior localiza al EIR en cada instante pues tanto \vec{v}_O como $\vec{\omega}$ pueden cambiar en el transcurso del tiempo. En consecuencia el eje instantáneo de rotación cambiará en general de posición a lo largo del tiempo debido al movimiento del sólido, engendrando una superficie reglada que denominamos **axoide**. Habrá infinitos axoides, tantos como sistemas de referencia, pero nos fijaremos únicamente en los obtenidos en el sistema de referencia fijo y en el sistema de referencia solidario con el cuerpo, que denominaremos **axoide fijo** y **axoide móvil**, respectivamente. Estas dos superficies son tangentes en cada instante, la línea de tangencia es el eje instantáneo de rotación.





Se puede describir el movimiento del sólido como la rodadura del axoide móvil sobre el axoide fijo. Si $v_d = 0$ la rodadura será sin deslizamiento, si $v_d \neq 0$ el axoide móvil además de rodar, deslizará sobre el EIR con velocidad v_d (esta representación del movimiento del sólido es debida a Poncelet).

7.7. Distribución de aceleraciones

La aceleración de un punto P del sólido se obtiene derivando la expresión de la velocidad:

$$\vec{a}_P = \frac{d}{dt} \vec{v}_P = \frac{d}{dt} (\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}) = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega} \times \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}$$

como

$$\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP}$$

la distribución de aceleraciones en un sólido rígido queda:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP})$$

El término $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP})$ es la aceleración centrípeta y está dirigida hacia el eje de rotación.



8. COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

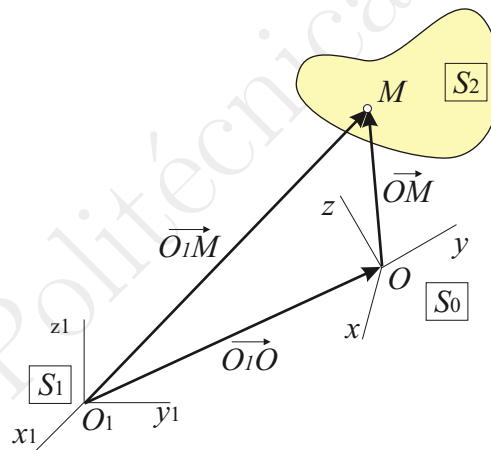
- 8.1 Composición de velocidades.
- 8.2 Composición de rotaciones.
- 8.3 Composición de aceleraciones.
- 8.4 Composiciones de aceleraciones angulares.
- 8.5 Movimientos inversos.
- 8.6 Movimiento de dos sólidos en contacto

Introducción

El objetivo de este tema es obtener el movimiento de un cuerpo S_2 respecto de un sistema de referencia S_1 cuando se conoce el movimiento del cuerpo en otro sistema de referencia S_0 y el movimiento de S_0 respecto de S_1 .

8.1. Composición de velocidades

Vamos a determinar en primer lugar la manera de componer las velocidades. Consideremos para ello dos sistemas de referencia $S_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ y $S_0(O, x, y, z)$ tales que el movimiento de S_0 respecto de S_1 es conocido, y sea un cuerpo S_2 en movimiento también conocido respecto de S_0 .



Para cualquier punto M del cuerpo S_2 tenemos:

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM}$$

y su velocidad en el sistema de referencia S_1 se obtendrá derivando las componentes de $\overrightarrow{O_1M}$ ³:

$$\vec{v}_{21}^M = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} \right)_{S_1} + \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{S_1}$$

Dado que el vector \overrightarrow{OM} está expresado en componentes de un sistema de referencia S_0 con rotación $\vec{\omega}_{01}$ respecto de S_1 , su derivada vendrá dada por:

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{S_0} + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, la velocidad del punto M de S_2 respecto del sistema de referencia S_1 se obtiene componiendo las velocidades de la siguiente forma:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{20}^M + \vec{v}_{01}^O + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}$$

Analizando cada uno de los términos anteriores tenemos:

³ \vec{v}_{21}^M denota la velocidad del punto M de S_2 respecto de S_1

- Velocidad relativa: Se denomina velocidad relativa de M a su velocidad respecto del sistema de referencia móvil S_0 , es decir $\vec{v}_{rel}^M = \vec{v}_{20}^M$
- Velocidad de arrastre: Es la velocidad que tendría M si S_2 estuviese unido rígidamente al sistema móvil S_0 y se moviese arrastrado por el. Por tanto, $\vec{v}_{arras}^M = \vec{v}_{01}^O + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM} = \vec{v}_{01}^M$

Podemos expresar entonces la ley de composición de velocidades de la siguiente forma:

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{20}^M + \vec{v}_{01}^M$$

En el contexto que estamos estudiando se designa como movimiento absoluto el movimiento del cuerpo respecto del sistema de referencia que tomemos como fijo, S_1 , movimiento relativo el movimiento del sólido respecto del sistema móvil S_0 y movimiento de arrastre al que tendría cualquier punto del sólido S_2 si este estuviera rígidamente unido al sistema móvil S_0 y se moviera por tanto arrastrado por el. De esta forma podemos decir que la velocidad absoluta del punto M es la suma de su velocidad relativa y su velocidad de arrastre.

8.2. Composición de rotaciones

El objetivo es determinar la rotación $\vec{\omega}_{21}$ del cuerpo S_2 respecto del sistema de referencia fijo S_1 conocidas las rotaciones de S_2 respecto de S_0 , $\vec{\omega}_{20}$, y la rotación de S_0 respecto de S_1 , $\vec{\omega}_{01}$.

Sean M y N dos puntos cualesquiera del sólido S_2 . La velocidad absoluta de N es $\vec{v}_{21}^N = \vec{v}_{21}^M + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{MN}$, la velocidad relativa $\vec{v}_{20}^N = \vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{MN}$ y la velocidad de arrastre $\vec{v}_{01}^N = \vec{v}_{01}^M + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{MN}$. De la ley de composición de velocidades tenemos:

$$\vec{v}_{21}^M + \vec{\omega}_{21} \times \overrightarrow{MN} = \vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{20} \times \overrightarrow{MN} + \vec{v}_{01}^M + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{MN}, \quad \forall M, N \in S_2$$

Por tanto, la ley de composición de rotaciones queda:

$$\vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01}$$

8.3. Composición de aceleraciones

Derivando respecto del tiempo la expresión de la velocidad, $\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{01}^O + \vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}$, y teniendo en cuenta que tanto \vec{v}_{20}^M como \overrightarrow{OM} son vectores cuyas componentes están expresadas en un sistema de referencia móvil:

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M + \vec{a}_{01}^O + \dot{\vec{\omega}}_{01} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \times [\vec{v}_{20}^M + \vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM}]$$

Llamando \vec{a}_{01}^M a la aceleración que tendría M si S_2 estuviese rígidamente unido a S_0 y se moviese arrastrado por el, es decir, $\vec{a}_{01}^M = \vec{a}_{01}^O + \dot{\vec{\omega}}_{01} \times \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}_{01} \times (\vec{\omega}_{01} \times \overrightarrow{OM})$, tenemos:

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{20}^M + \vec{a}_{01}^M + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M$$

donde

- La aceleración absoluta de M es \vec{a}_{21}^M .
- La aceleración relativa de M es \vec{a}_{20}^M .
- La aceleración de arrastre es \vec{a}_{01}^M .
- El término $2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M$ es la aceleración de Coriolis, debida al efecto combinado de la rotación del sistema móvil, $\vec{\omega}_{01}$ y la velocidad de M en el sistema móvil, \vec{v}_{20}^M .

Podemos escribir por tanto la ley de composición de aceleraciones como:

$$\vec{a}_{abs}^M = \vec{a}_{relat}^M + \vec{a}_{arrastre}^M + \vec{a}_{Coriolis}^M$$



8.4. Composición de aceleraciones angulares

Derivando la ley de composición de rotaciones:

$$\vec{\alpha}_{21} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{21}}{dt} \right)_{S_1} = \left(\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt} \right)_{S_1} + \left(\frac{d\vec{\omega}_{01}}{dt} \right)_{S_1}$$

siendo

$$\left(\frac{d\vec{\omega}_{20}}{dt} \right)_{S_1} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20}$$

Entonces las aceleraciones angulares se componen:

$$\vec{\alpha}_{21} = \vec{\alpha}_{20} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{20}$$

Si $\vec{\omega}_{01}$ y $\vec{\omega}_{20}$ son paralelos, las aceleraciones angulares se suman directamente.

8.5. Movimientos inversos

Dados dos sólidos S_1 y S_0 y conocido el movimiento de S_0 respecto de S_1 se presenta a veces la necesidad de hallar el movimiento de S_1 respecto de S_0 , que se denomina inverso del primero. Para ello observando que la composición de movimientos $S_1/S_0/S_1$ es el reposo tenemos:

- Velocidades: $\vec{v}_{11}^M = \vec{v}_{10}^M + \vec{v}_{01}^M = 0$, por tanto:

$$\vec{v}_{10}^M = -\vec{v}_{01}^M$$

- Rotaciones: $\vec{\omega}_{11} = \vec{\omega}_{10} + \vec{\omega}_{01} = 0$

$$\vec{\omega}_{10} = -\vec{\omega}_{01}$$

- Aceleraciones: $\vec{a}_{11}^M = \vec{a}_{10}^M + \vec{a}_{01}^M + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{10}^M = 0$

$$\vec{a}_{10}^M = -\vec{a}_{01}^M - 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{10}^M$$

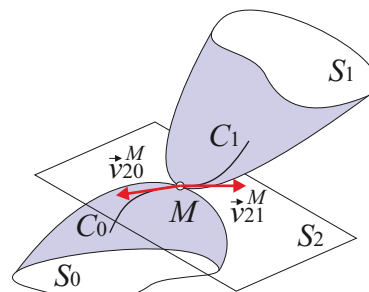
Las aceleraciones en los movimientos inversos solamente son iguales y de signo contrario para los puntos situados en el eje instantáneo de rotación.

- Aceleraciones angulares: $\vec{\alpha}_{11} = \vec{\alpha}_{10} + \vec{\alpha}_{01} + \vec{\omega}_{01} \times \vec{\omega}_{10} = 0$ y como $\vec{\omega}_{01} = -\vec{\omega}_{10}$, tenemos que:

$$\vec{\alpha}_{10} = -\vec{\alpha}_{01}$$

8.6. Movimiento de dos sólidos en contacto

Sean S_0 y S_1 dos sólidos que se mueven manteniendo un único punto de contacto M . Sea S_2 un sistema de referencia ligado al plano tangente común a los dos sólidos en M . Durante el movimiento de los dos sólidos M describe trayectorias C_0 y C_1 en S_0 y S_1 respectivamente, con velocidades \vec{v}_{20}^M y \vec{v}_{21}^M tangentes a C_0 y C_1 y por tanto contenidas en el plano tangente.

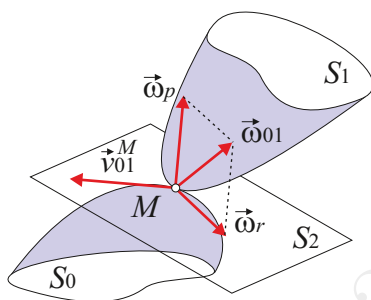


De la composición de movimientos tenemos

$$\vec{v}_{21}^M = \vec{v}_{20}^M + \vec{v}_{01}^M$$

lo que nos indica que \vec{v}_{01}^M , la velocidad relativa entre ambos sólidos en el punto de contacto M queda también contenida en el plano tangente común. A esta velocidad la denominamos velocidad de deslizamiento de S_0 sobre S_1 . Otra forma de expresar la condición anterior (condición de que los dos sólidos permanezcan en contacto en el punto M) es $\vec{v}_{01}^M \cdot \hat{n} = 0$ siendo \hat{n} el vector unitario normal al plano tangente común.

Si expresamos las velocidades de S_0 respecto de S_1 a través de la velocidad del punto de contacto y la velocidad de rotación $\vec{\omega}_{01}$, $((\vec{v}_{01}^M, \vec{\omega}_{01})$ grupo cinemático en M) se suele descomponer esta última en dos componentes ω_p y ω_r una en la dirección normal y otra contenida en el plano tangente.



- Rotación de pivotamiento: $\omega_p = |\vec{\omega} \cdot \hat{n}|$
- Rotación de rodadura: $\omega_r = |\vec{\omega} \times \hat{n}|$

Si los sólidos **ruedan sin deslizar**, la velocidad del punto de contacto será la misma vista desde el sólido S_1 que vista desde S_0 , es decir $\vec{v}_{20}^M = \vec{v}_{21}^M$ y por lo tanto la velocidad de deslizamiento será nula, $\vec{v}_{01}^M = 0$.

9. Movimiento Plano

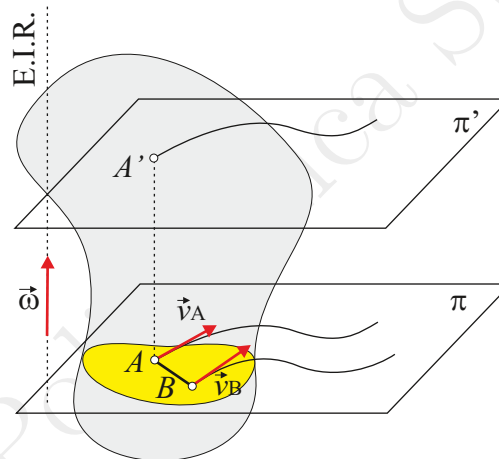
- 9.1 Definición y propiedades.
- 9.2 Centro instantáneo, base y ruleta
- 9.3 Distribución de velocidades
- 9.4 Velocidad de sucesión del centro instantáneo de rotación.
- 9.5 Distribución de aceleraciones

Introducción

Estudiaremos aquí un caso particular de movimiento del sólido rígido de gran interés por su riqueza de aplicaciones, sobre todo en el diseño de máquinas y mecanismos.

9.1. Definición y propiedades

Un sólido rígido realiza un movimiento plano si todos sus puntos se mueven describiendo trayectorias contenidas en planos fijos paralelos entre si. Cualquiera de ellos recibe el nombre de plano del movimiento.



Propiedades:

- Todos los puntos del sólido pertenecientes a un determinado plano π del movimiento tiene velocidades contenidas en dicho plano.
- $\vec{\omega}$ es siempre normal al plano del movimiento. Basta tomar dos puntos A y B del plano π , $\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{\omega} \times \overline{AB}$ y dado que \vec{v}_B y \vec{v}_A están contenidos en el plano, $\vec{\omega} \times \overline{AB}$ también lo estará y por tanto $\vec{\omega}$ ha de ser normal al plano π . En el movimiento plano $\vec{\omega}$ y el EIR mantienen su dirección, la única variación de $\vec{\omega}$ se produce en su módulo; podemos tratarlo entonces como un escalar con signo.
- La velocidad de deslizamiento mínimo es nula, $v_d = 0$, dado que $\vec{v}_A \perp \vec{\omega}, \forall A$; por tanto, el movimiento plano es una rotación pura.
- Todos los planos del movimiento tienen la misma distribución de velocidades $\vec{v}_{A'} = \vec{v}_A$ porque $\overline{AA'} \parallel \vec{\omega}$. Es suficiente, por tanto, estudiar el movimiento en uno de los planos, por ejemplo el plano π , que denominaremos plano director.

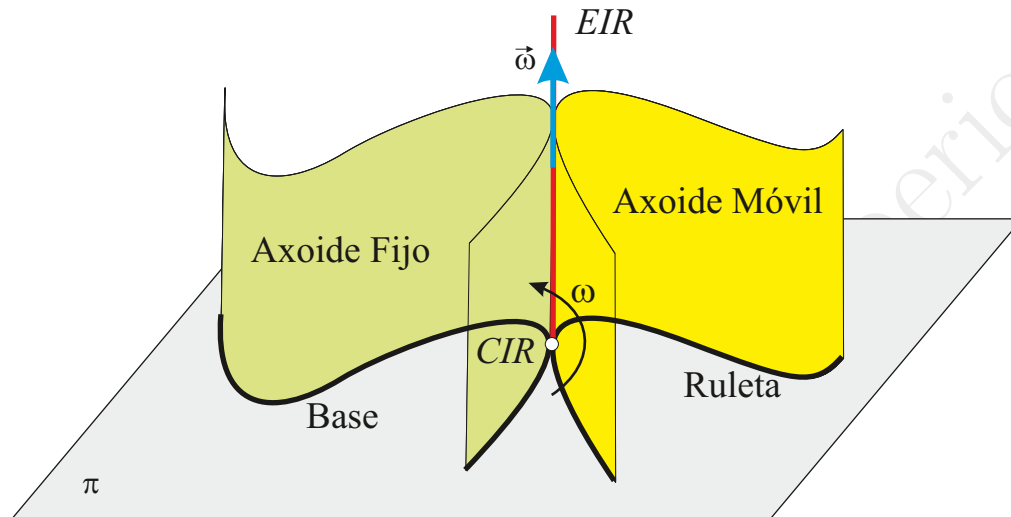
9.2. Centro instantáneo de rotación. Base y ruleta.

En el movimiento plano los axoides son superficies engendradas por rectas normales al plano π . Además la velocidad de deslizamiento mínimo es nula, $v_d = 0$, por tanto el axoide móvil rueda sin deslizar sobre el axoide fijo. Definimos:

- **Base o polar fija.** Curva intersección del axoide fijo con el plano π .

- **Ruleta o polar móvil.** Curva intersección del axoide móvil con el plano π
- **Centro instantáneo de rotación (CIR).** Punto donde el EIR intersecta al plano π . Es el punto de contacto entre la base y la ruleta.

Dado que $v_d = 0$, el CIR es el único punto del plano con velocidad nula, puede describirse el movimiento plano como una rotación pura alrededor del CIR. Las distintas posiciones del CIR a lo largo del tiempo son, respecto del sistema fijo la base y respecto del móvil la ruleta. La ruleta rueda sin deslizar sobre la base.

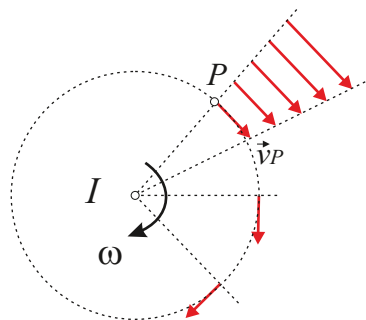


9.3. Distribución de velocidades.

Llamando I al centro instantáneo de rotación, $\vec{v}_I = 0$, y la distribución de velocidades desde el CIR queda:

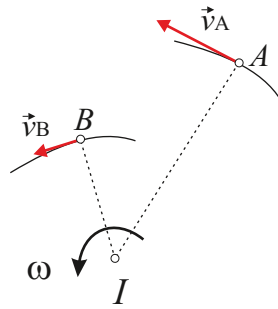
$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{IP}$$

- La dirección de \vec{v}_P es normal a \vec{IP}
- El módulo de \vec{v}_P es $v_P = \omega \cdot IP$, es decir, aumenta proporcionalmente con la distancia al CIR.
- Los puntos con la misma velocidad v_P están sobre circunferencias de radio $\frac{v_P}{\omega}$.



Consecuencias:

- El movimiento está determinado si se conoce la posición del CIR y el valor de ω
- Si en un instante dado se conocen las tangentes a las trayectorias de dos puntos, se conocerá la posición del CIR, basta trazar las perpendiculares a dichas tangentes; el punto de corte será el CIR.
- Si además se conoce la velocidad de uno de los puntos, A , el movimiento está totalmente determinado, $\omega = \frac{v_A}{IA}$



9.4. Velocidad de sucesión del CIR

Hemos visto que la velocidad del CIR es nula por definición, $\vec{v}_I = 0$; sin embargo durante el movimiento del sólido el CIR cambia de posición con el tiempo. Definimos entonces la **velocidad de sucesión del CIR** como la derivada respecto del tiempo de las sucesivas posiciones del CIR vistas desde el sistema fijo:

$$\vec{v}_S = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}_I(t + \Delta t) - \vec{r}_I(t)}{\Delta t}$$

Téngase en cuenta que \vec{v}_I es la velocidad del punto del sólido que en un instante dado es el CIR, y es por tanto nula, mientras que \vec{v}_S no se corresponde con la velocidad de ningún punto del sólido, sino que es la velocidad con que se transmite "la propiedad de ser el centro instantáneo de rotación" de unos puntos a otros.

- Dirección de \vec{v}_S : La tangente común a base y ruleta.
- Sentido de \vec{v}_S : Viene determinado por el sentido de $\vec{\omega}$, es decir, por el sentido en que la ruleta rueda sobre la base.
- Módulo de \vec{v}_S : Está relacionado con ω y las posiciones de los centros de curvatura de base y ruleta, C_B y C_R , respectivamente⁴:

$$\frac{v_s}{\omega} = \frac{IC_B IC_R}{C_B C_R}$$

9.5. Distribución de aceleraciones

La aceleración de un punto P cualquiera del sólido es $\vec{a}_P = \vec{a}_O + \alpha \times \vec{OP} - \omega^2 \vec{OP}$. En el movimiento plano nos interesa obtener la distribución de velocidades desde el CIR, para ello es derivamos la expresión de la velocidad $\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{IP}$:

$$\vec{a}_P = \alpha \times \vec{IP} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{IP}}{dt}$$

Siendo:

$$\frac{d\vec{IP}}{dt} = \frac{d\vec{OP}}{dt} - \frac{d\vec{OI}}{dt} = \vec{v}_P - \vec{v}_s$$

de manera que $\vec{a}_P = \alpha \times \vec{IP} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{IP}) - \vec{\omega} \times \vec{v}_s$ y podemos escribir la distribución de aceleraciones desde el CIR como:

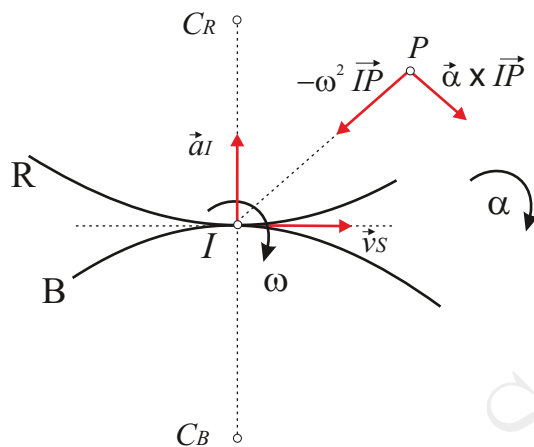
$$\vec{a}_P = \alpha \times \vec{IP} - \omega^2 \vec{IP} - \vec{\omega} \times \vec{v}_s$$

Analizando cada uno de los términos tenemos:

- $\alpha \times \vec{IP}$ es normal a \vec{IP} y por tanto paralela a \vec{v}_P . Es la componente tangencial de la aceleración en el movimiento de P relativo al CIR. Su módulo es proporcional a la distancia del punto P al CIR.

⁴Fórmula de Euler-Savary

- $-\omega^2 \vec{IP}$ es normal a la trayectoria de P y dirigida al CIR. Es la componente normal del movimiento de P respecto de I . Su módulo es proporcional a la distancia entre P y el CIR.
- $-\vec{\omega} \times \vec{v}_s$ es igual para todos los puntos del sólido. Es la aceleración del centro instantáneo de rotación, es decir, $\vec{a}_I = \frac{d\vec{v}_I}{dt} = -\vec{\omega} \times \vec{v}_s$.



10. Dinámica del punto material sometido a enlaces

- 10.1 Punto ligado a una curva
10.2 Punto ligado a una superficie

Introducción. Enlaces más importantes

En este capítulo estudiaremos algunos casos de la dinámica del punto sometido a enlaces; no se pretende un análisis exhaustivo de todos los casos posibles sino más bien presentar algunos de los conceptos que entrañan y sacar algunas consecuencias ilustrativas. Nos basaremos en los conceptos desarrollados en las asignaturas de física sobre la dinámica de la partícula libre y el principio de liberación desarrollado en la estática. Más adelante veremos cómo se puede abordar el problema mediante las ecuaciones de Lagrange.

En un sistema de referencia inercial la segunda ley de Newton unida a la aplicación del principio de liberación (sustituyendo los enlaces por las reacciones) la ecuación del movimiento de una partícula ligada quedaría:

$$\vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}^{\text{ap}} + \vec{R} \quad (10.15)$$

siendo \vec{F}^{ap} la fuerza aplicada y \vec{R} la reacción entre la partícula y la curva. La reacción en principio es una incógnita y debe obtenerse de la ecuación anterior y de la ecuación de la curva $\vec{r} = \vec{r}(S)$ que supondremos que está fija. Si la curva estuviese en movimiento aplicaríamos las ecuaciones del movimiento relativo a un sistema de referencia que se moviese de forma solidaria con la curva (Tema 2).

Como vimos en Estática, si no hay rozamiento, la reacción será normal al desplazamiento de la partícula y entonces el trabajo realizado será nulo. Se dice que la reacción “no trabaja” y por lo tanto el trabajo se debe solamente a la fuerza aplicada

$$W_{12} = \int_1^2 (\vec{F}^{\text{ap}} + \vec{R}) \cdot d\vec{r} = \int_1^2 \vec{F}^{\text{ap}} \cdot d\vec{r}$$

A continuación se indican los enlaces más importantes no dependientes del tiempo:

Superficie sin rozamiento :

$$\vec{R} = R \hat{n}$$

siendo \hat{n} el vector unitario normal a la superficie.

Superficie con rozamiento :

$$\vec{R} = R \hat{n} + \vec{R}_T$$

$\vec{R}_T = -F_R \hat{T}$ es la fuerza de rozamiento, que se opone al movimiento y está contenida en el plano tangente a la superficie.

Curva sin rozamiento : La curva puede verse como la intersección de dos superficies S_1 y S_2

$$\vec{R} = \lambda_1 \hat{n}_1 + \lambda_2 \hat{n}_2$$

o mejor, con el triedro intrínseco de la curva

$$\vec{R} = R_N \hat{N} + R_B \hat{B}$$

Curva con rozamiento :

$$\vec{R} = -F_R \hat{T} + R_N \hat{N} + R_B \hat{B}$$



10.1. Punto ligado a una curva sin rozamiento

El caso del punto ligado a una curva sin rozamiento es un movimiento con un grado de libertad. Dado que no hay rozamiento, la reacción no tiene componente en la dirección tangente. Proyectando la ecuación de Newton en el triedro intrínseco tendremos tres componentes:

$$\begin{aligned} m a_T &= m \frac{d^2 S}{dt^2} = F_T \\ m a_N &= m \frac{v^2}{\rho} = F_N + R_N \\ m a_B &= 0 = F_B + R_B \end{aligned}$$

la primera de ellas es la ecuación del movimiento propiamente dicha, su integración permite obtener la posición de la partícula a lo largo de la curva $S = S(t)$. Las otras dos permiten calcular el valor de la reacción \vec{R} , conocida la fuerza aplicada \vec{F} , la ecuación de la curva $\vec{r}(S)$ y el movimiento de la partícula $S = S(t)$,

$$\begin{aligned} R_N &= m \frac{v^2}{\rho} - F_N \\ R_B &= 0 = -F_B + R_B \end{aligned}$$

donde $v = dS/dt$ y $\kappa = 1/\rho = |d^2\vec{r}/dS^2|$.

Aplicación del teorema de la energía.

En lugar de resolver la ecuación diferencial (eq. 10.15) para obtener $S = S(t)$, podría utilizarse el teorema de la energía,

$$dW = dT$$

donde $T = \frac{1}{2}mv^2$ es la energía cinética. Como la reacción no trabaja, $dW = \vec{F}^{ap} \cdot d\vec{r}$, y por integración se obtiene

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int F_T dS + C_1$$

La constante C_1 es la energía E que permite obtener la velocidad a partir de la integral del trabajo,

$$v = \frac{dS}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left[E + \int F_T dS \right]}$$

que integrada de nuevo nos proporciona la solución al movimiento,

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dS}{\sqrt{E + \int F_T dS}} + C_2$$

Vemos como la energía E juega el papel de integral primera y nos ha permitido reducir la solución de la ecuación diferencial de segundo orden a una integral. Este aspecto se verá más claramente y con mayor generalidad en la formulación lagrangiana.

Potencial de fuerzas.

La integral del trabajo tiene una expresión especialmente sencilla para las fuerzas denominadas conservativas. Una fuerza \vec{F} es conservativa cuando su trabajo no depende del camino recorrido, solo depende de la posición inicial y final. Si la fuerza es conservativa se cumple $\vec{F} = -\nabla V$ con $V = V(\vec{r})$ la función potencial. En este caso, $dW = -dV$ y $W_{12} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$ lo que conduce al teorema de conservación de la energía,

$$E = T + V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m \left(\frac{dS}{dt} \right)^2 + V(\vec{r}) = cte$$



y despejando t , tenemos

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dS}{\sqrt{E - V(S)}} + C_2$$

y por tanto $S(t)$. La energía E que es una constante del movimiento nos ha permitido reducir el problema a una integral.

10.2. Punto ligado a una superficie sin rozamiento

En ausencia de rozamiento la reacción tiene la dirección de la normal a la superficie. Así, la componente de la ecuación de Newton en la dirección normal a la superficie solo permite obtener la reacción y las ecuaciones del movimiento son las componentes tomadas en direcciones ortogonales del plano tangente.

Si la ecuación de la superficie viene dada en forma implícita, $f(x, y, z) = 0$, el vector normal es paralelo al gradiente,

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

y la reacción

$$R = (m\vec{a} - \vec{F}^{\text{ap}}) \cdot \hat{n}$$

Si la superficie viene expresada en coordenadas paramétricas, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, las derivadas parciales nos proporcionan dos direcciones del plano tangente,

$$\begin{aligned}\vec{r}_u &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \\ \vec{r}_v &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\end{aligned}$$

y el vector unitario normal,

$$\hat{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$$

La aceleración se obtiene suponiendo que la coordenadas u y v dependen del tiempo,

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v} \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r}_{uu} \dot{u}^2 + \vec{r}_{vv} \dot{v}^2 + 2\vec{r}_{uv} \dot{u} \dot{v} + \vec{r}_u \ddot{u} + \vec{r}_v \ddot{v}\end{aligned}$$

y las ecuaciones del movimiento son las ecuaciones diferenciales,

$$\begin{aligned}m\vec{a} \cdot \vec{r}_u &= \vec{F}^{\text{ap}} \cdot \vec{r}_u \\ m\vec{a} \cdot \vec{r}_v &= \vec{F}^{\text{ap}} \cdot \vec{r}_v\end{aligned}$$

cuya solución será $u(t)$ y $v(t)$.

Aplicación del teorema de la energía.

Al igual que en la curva sin rozamiento el trabajo lo realiza la la fuerza aplicada,

$$T_2 - T_1 = W_{12} = \int_1^2 \vec{F}^{\text{ap}} \cdot d\vec{r}$$

donde el vector desplazamiento se obtiene con las derivadas respecto de los parámetros,

$$d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$$

Potencial de fuerzas.

Si las fuerzas aplicadas son conservativas, $\vec{F} = -\nabla V$, el trabajo puede obtenerse a partir del potencial que vendrá dado por la posición de la partícula sobre la superficie,

$$T_2 - T_1 = W_{12} = \int_1^2 -dV(\vec{r}) = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

y puede relacionarse la posición y la velocidad de la partícula a través de la constante energía,

$$E = \frac{1}{2}m [\vec{r}_u \dot{u} + \vec{r}_v \dot{v}]^2 + V(\vec{r}(u, v))$$

Ecuaciones del movimiento en plano tangente.

El plano tangente a la superficie contiene todas las direcciones tangente al plano, en particular la tangente a la trayectoria que sigue la partícula \hat{T} . Así, podemos elegir un triedro formado por los vectores $\{\hat{n}, \hat{T}, \hat{u}\}$ donde $\hat{u} = \hat{n} \times \hat{T}$. En general el vector unitario normal a la superficie \hat{n} y el vector unitario normal a la trayectoria \hat{N} no son paralelos y formarán un ángulo γ dado por, $\cos \gamma = \hat{n} \cdot \hat{N}$. Entonces, proyectando sobre el triedro anterior,

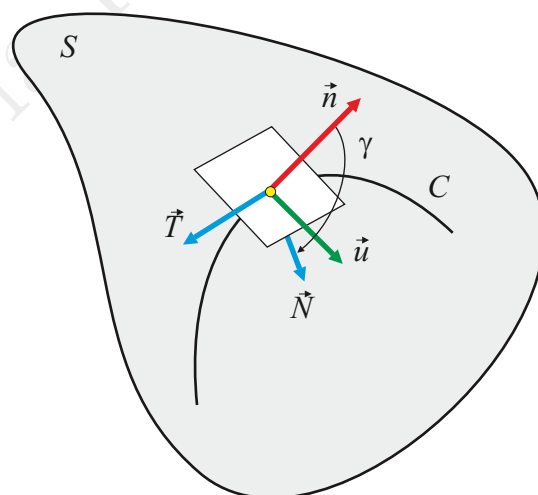
$$m \frac{v^2}{\rho} \cos \gamma = F_n + R$$

$$m \frac{dv}{dt} = F_T$$

$$m \frac{v^2}{\rho} \sin \gamma = F_u$$

la primera de las ecuaciones permite calcular la reacción R y las dos últimas son realmente las ecuaciones del movimiento. La segunda vuelve a ser el teorema de la energía (trabajo por unidad de arco). La tercera puede reescribirse como,

$$2(E - V(\vec{r})) \frac{\sin \gamma}{\rho} = F_u$$



Esta última ecuación permite obtener una conclusión importante ya que en ausencia de fuerzas, $\vec{F} = 0$, aplicadas el movimiento de la partícula requiere, $\sin \gamma = 0$, por lo que la trayectoria es una *geodésica*⁵. Además la fuerza tangencial también es cero y al no existir trabajo el módulo de la velocidad se mantiene constante, $\|\vec{v}\| = cte$.

Veremos en los ejercicios cómo, al igual que el caso anterior, se pueden utilizar las constantes del movimiento para resolver este problema.

⁵Las geodésicas de una superficie son las curvas cuyo vector unitario normal es paralelo al vector normal a la superficie, $\hat{N} \parallel \hat{n}$. Tienen la propiedad de ser la curva de longitud mínima que une dos puntos sobre la superficie.



11. Movimiento relativo del punto material

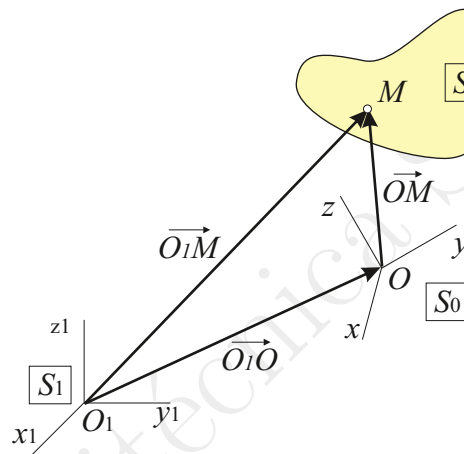
11.1 Fuerzas de inercia

11.2 Movimiento en la superficie de la Tierra

Introducción

En este tema estudiaremos la dinámica del punto en un sistema de referencia no inercial y lo aplicaremos al caso de una partícula moviéndose sobre la superficie de la Tierra, para analizar aspectos tales como la gravedad aparente o el efecto Coriolis. Nos basaremos en las expresiones de la composición de movimientos obtenidas en los temas de cinemática.

11.1. Fuerzas de inercia



Vimos en cinemática que si conocemos el movimiento de un cuerpo S_2 respecto de un sistema de referencia S_0 que a su vez se mueve respecto de otro sistema de referencia S_1 , la aceleración de un punto M cualquiera de S_2 será la suma de la aceleración relativa \vec{a}_{20}^M , el término de arrastre \vec{a}_{01}^M y el término de Coriolis:

$$\vec{a}_{21}^M = \vec{a}_{20}^M + \vec{a}_{01}^M + 2\vec{\omega}_{01} \times \vec{v}_{20}^M$$

que para aligerar escribiremos

$$\vec{a}' = \vec{a} + \vec{a}_{\text{arr}} + \vec{a}_{\text{Cor}}$$

ya que lo que nos interesa es escribir las ecuaciones en el sistema S_0 .

Si el sistema S_1 es inercial, se cumple la ecuación de Newton $\vec{F} = m \vec{a}'$ pero en la ecuación del movimiento en S_0 habrá dos términos extra:

$$m \vec{a} = \vec{F} - m \vec{a}_{\text{arr}} - m \vec{a}_{\text{Cor}}$$

estos términos extra los denominamos fuerzas de inercia, puesto que no se trata de verdaderas fuerzas. Así, $\vec{F}_{\text{arr}} = -m \vec{a}_{\text{arr}}$ es la fuerza de arrastre, y $\vec{F}_{\text{Cor}} = -m \vec{a}_{\text{Cor}}$ la fuerza de Coriolis.

11.2. Movimiento en la superficie de la Tierra

Estudiaremos el caso de una partícula moviéndose en la superficie de la Tierra. S_1 será un sistema inercial con origen en C , el centro de masas de la Tierra. S_0 ($Oxyz$) es un sistema de referencia fijo en la superficie de la Tierra y por tanto es arrastrado por el movimiento de rotación terrestre. El eje Oz está sobre la recta CO y dirigido hacia el exterior; Ox lo tomamos horizontal en dirección Este (tangente al paralelo) y Oy horizontal en dirección Norte (tangente al meridiano).

La velocidad de rotación terrestre $\vec{\Omega}$ puede considerarse constante con un valor $\Omega = \|\vec{\Omega}\| = 7,292 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ y su dirección en el sistema de referencia S_0 es

$$\frac{\vec{\Omega}}{\Omega} = \cos \lambda \hat{j} + \sin \lambda \hat{k}$$

donde λ es la latitud, $-\frac{\pi}{2} \leq \lambda \leq \frac{\pi}{2}$.

Teniendo en cuenta que $\|\vec{R}\| \approx 6371 \text{ km} \gg \|\vec{r}\|$, en la aceleración de arrastre el único término importante es la aceleración del origen,

$$\vec{a}_{\text{arr}} = \vec{a}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \approx \vec{a}_O$$

y dado que O es un punto del sólido S_1 ,

$$\vec{a}_O = \vec{a}_C + \vec{\Omega} \times \vec{R} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

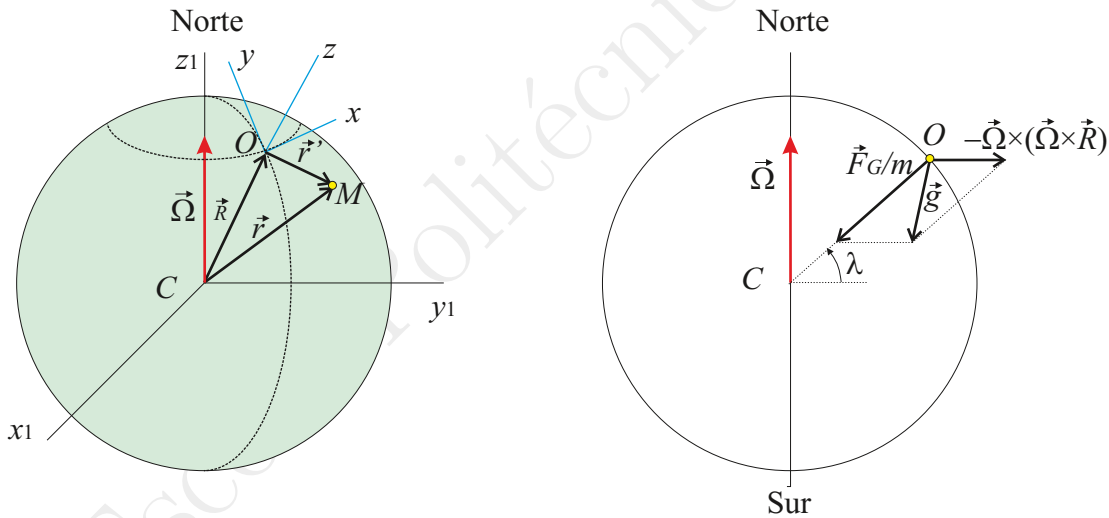
De manera que

$$\vec{a}_{\text{arr}} \approx \vec{a}_O = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

y la fuerza de arrastre será

$$\vec{F}_{\text{arr}} = -m \vec{a}_{\text{arr}} = -m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

cuyo módulo es constante en cada latitud, $F_{\text{arr}} = m \Omega^2 R \cos \lambda$, y tiene la dirección perpendicular al eje de rotación alejándose de él: es la *fuerza centrífuga*.



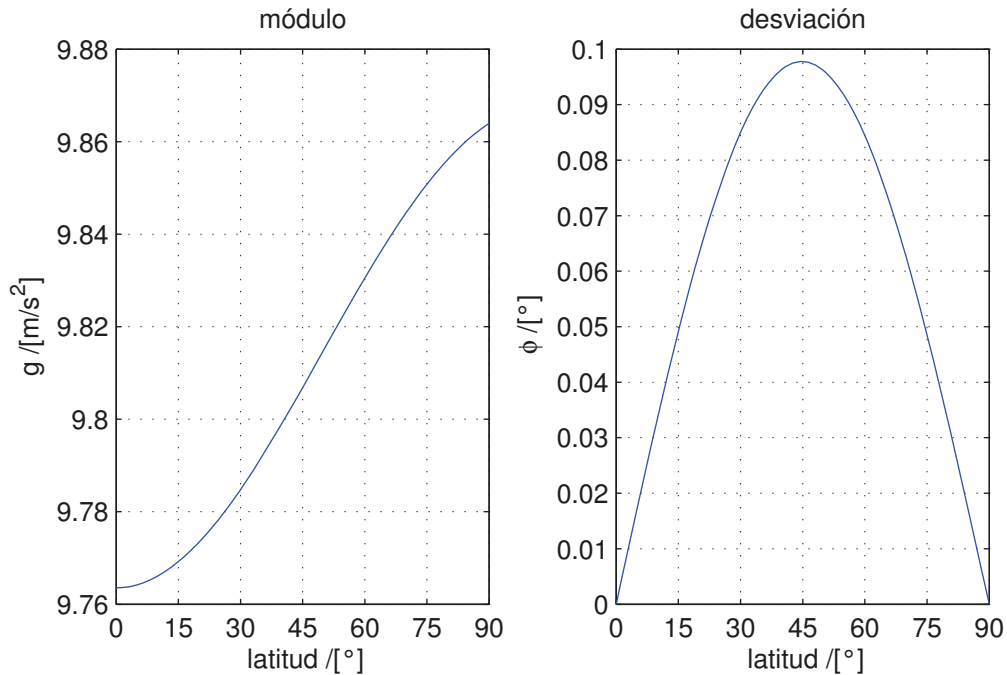
Una partícula en reposo sobre la superficie de la Tierra estaría sometida a la fuerza gravitacional, $m \vec{g}' = -G \frac{Mm}{R^2} \hat{R}$, (dirigida hacia el centro de la Tierra) y la fuerza de arrastre (alejándose del eje de rotación). La combinación de esas dos fuerza sería lo que sentimos como fuerza peso y el peso por unidad de masa se denomina *gravedad aparente*,

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_G + \vec{F}_{\text{arr}}}{m} = \vec{g}' - \vec{a}_O = -G \frac{M}{R^2} \hat{R} - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})$$

El módulo de la gravedad aparente y su desviación ϕ respecto de la fuerza gravitacional varía con la latitud ya que la fuerza de arrastre es nula en los polos y máxima en el Ecuador. La diferencia entre la gravedad aparente y la puramente gravitacional es muy pequeña:

$$\|\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R})\| = \Omega^2 R \cos \lambda < \Omega^2 R = 0,03388 \text{ m/s}^2$$

aproximadamente un 0,33 % del valor de $\|\vec{g}'\|$. La desviación máxima de la dirección se produce para $\lambda \approx 45^\circ$ y corresponde aproximadamente a una décima de grado de arco.



Ecuaciones del movimiento en la superficie terrestre, fuerza de Coriolis

La fuerza de Coriolis sólo aparece cuando la partícula tiene una la velocidad no nula en el sistema de referencia no inercial S_0 , es decir cuando la partícula está en movimiento sobre la superficie de la Tierra,

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = -m \vec{a}_{\text{Cor}} = -2m \vec{\Omega} \times \vec{v}$$

La fuerza de Coriolis no realiza trabajo ya que, $\vec{F}_{\text{Cor}} \perp \vec{v}$, y por tanto no cambia la energía cinética, sólo cambia la trayectoria de la partícula.

Teniendo en cuenta la fuerza de Coriolis y haciendo la aproximación de que la gravedad aparente tiene la dirección Oz , la ecuación del movimiento de un punto sometido únicamente a su peso sobre la superficie de la Tierra es:

$$m \vec{a} = -m g \hat{k} - 2m \Omega (\cos \lambda \hat{j} + \sin \lambda \hat{k}) \times (\dot{x} \hat{i} + \dot{y} \hat{j} + \dot{z} \hat{k})$$

separando las componentes,

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega (\dot{y} \sin \lambda - \dot{z} \cos \lambda) \\ \ddot{y} = -2\Omega \dot{x} \sin \lambda \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega \dot{x} \cos \lambda \end{cases}$$

Nótese que como la fuerza de Coriolis no trabaja la energía permanece constante,

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + m g z = cte$$

Efecto de la fuerza de Coriolis sobre el movimiento de un punto sobre la superficie de la Tierra.

Las ecuaciones diferenciales anteriores pueden integrarse de forma exacta pero se obtienen expresiones con varios términos de las que no es fácil extraer conclusiones. Para extraer estas conclusiones deben desarrollarse las soluciones en series de potencias de Ωt . Alternativamente pueden obtenerse esas expresiones introduciendo correcciones en órdenes sucesivos de Ωt . Lo aplicaremos a los dos casos más sencillos.

Desviación en la caída libre. Primero resolvemos las ecuaciones a orden 0 en Ω ,

$$\begin{cases} \ddot{x}_0 = 0 \\ \ddot{y}_0 = 0 \\ \ddot{z}_0 = -g \end{cases}$$

que partiendo del reposo a una altura h nos proporciona la solución de orden cero,

$$\begin{cases} x_0(t) = 0 \\ y_0(t) = 0 \\ z_0(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Con esta solución calculamos las velocidades para determinar la solución de primer orden,

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 2\Omega g t \cos \lambda \\ \ddot{y}_1 = 0 \\ \ddot{z}_1 = -g \end{cases}$$

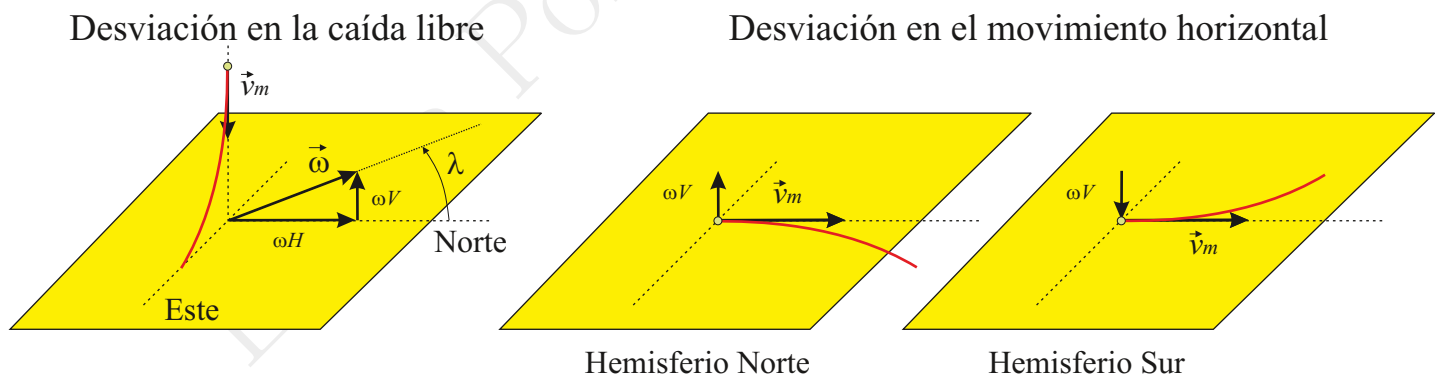
que conduce a la solución

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{1}{3} \Omega g t^3 \cos \lambda \\ y_1(t) = 0 \\ z_1(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

que nos indica que el primer efecto de la rotación terrestre sobre la caída libre es en la dirección positiva del eje x , es decir, hacia el Este. Nótese que la dependencia con la latitud es un coseno por lo que la desviación es la misma en los dos hemisferios. Si se sustituye el tiempo en que tarda en llegar al suelo, $t = \sqrt{2h/g}$, la desviación en ese momento puede escribirse como

$$\Delta x = \frac{1}{3} \Omega \cos \lambda \sqrt{\frac{8h^3}{g}}$$

que para una altura de $h = 100$ m resulta $\Delta x = 1,5$ cm.



Desviación en el movimiento horizontal. Si la partícula se mueve en un plano horizontal sin rozamiento la velocidad permanece constante y la fuerza de *Coriolis* actúa en la dirección normal de la trayectoria dando lugar a una circunferencia de radio r ,

$$m \frac{v^2}{r} = \|\vec{F}_{\text{Cor}}\| = 2m \Omega_V v = 2m \Omega v \sin \lambda$$

de donde

$$r = \frac{v}{2\Omega \sin \lambda}$$

Para determinar el sentido de la desviación consideramos que la partícula parte del origen en la dirección del meridiano hacia el Norte, $\vec{v}(0) = v \hat{j}$ por lo que las ecuaciones a primer orden serían,

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = 2\Omega v \sin \lambda \\ \ddot{y}_1 = 0 \end{cases}$$



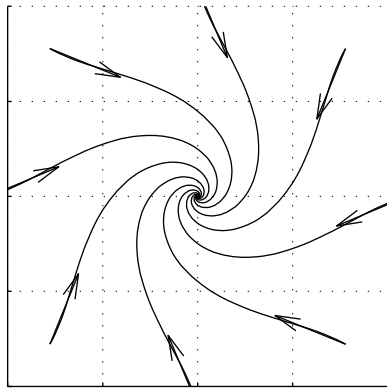
que conducen a la solución,

$$\begin{cases} x_1(t) = \Omega g t^2 \operatorname{sen} \lambda \\ y_1(t) = v t \end{cases}$$

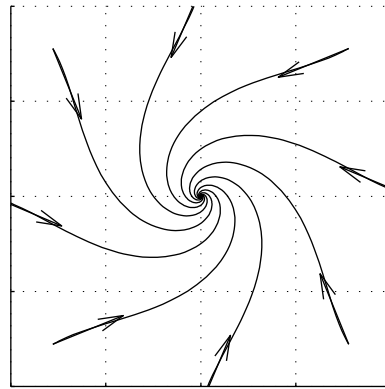
de manera que la desviación es positiva (hacia la derecha) en el hemisferio Norte y negativa (hacia la izquierda) en el hemisferio Sur. El valor de la desviación es pequeña, así, para el caso de un proyectil disparado horizontalmente con $v = 1000$ m/s al cabo de 1 s se desvía 5 cm.

Esa desviación puede hacerse grande si el tiempo transcurrido es de horas o días en lugar de segundo como, por ejemplo, en el caso de las masas de aire de la atmósfera, haciendo que el movimiento de aire hacia el interior de las borrascas se desvíe proporcionado un giro en sentido horario en el hemisferio Norte y antihorario en el hemisferio Sur, es el llamado *efecto geostrófico*.

Efecto Geostrófico: Hemisferio Norte



Efecto Geostrófico: Hemisferio Sur



12. Dinámica del sólido rígido

12.1 Movimiento con un eje fijo.

12.2 Movimiento con un punto fijo. Ecuaciones de Euler.

12.1. Movimiento con un eje fijo.

Un sólido rígido con un eje fijo solamente tiene un grado de libertad, el giro alrededor del eje. La coordenada generalizada será el ángulo tomado en el plano normal al eje de giro $q = \varphi$. Desde el punto de vista cinemático es un caso particular de movimiento plano en el que el E.I.R es fijo y coincide con el eje de rotación,

$$\vec{\omega} = \omega \hat{e} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{e}$$

Ecuaciones del movimiento. Tomando como origen un punto O del eje de giro,

$$\vec{v}_\alpha = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$$

y la energía cinética sería

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} I_e \omega^2 = \frac{1}{2} I_e \dot{\varphi}^2$$

donde

$$I_e = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\hat{e} \times \vec{r}_{\alpha})^2 = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

es el momento de inercia para el eje de rotación. La ecuación de Euler-Lagrange para la coordenada φ ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = I_e \ddot{\varphi} = Q_{\varphi}$$

y recordando que la fuerza generalizada asociada con el giro alrededor del eje es el par o momento de las fuerzas respecto del eje, $Q_{\varphi} = M_e$ y entonces,

$$I_e \frac{d\omega}{dt} = M_e$$

donde el par de las fuerzas aplicadas al eje es $M_e = \hat{e} \cdot \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}$ y en el caso de que las fuerzas sean conservativas $M_e = Q_{\varphi} = -\partial V / \partial \varphi$.

La ecuación del movimiento también puede obtenerse utilizando el principio de liberación (sustituyendo ligaduras por reacciones) y aplicando luego las ecuaciones del movimiento del sólido rígido libre (movimiento de traslación de centro de masas y rotación alrededor de un punto O del eje fijo),

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}^{\text{ext}} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \vec{M}_O^{\text{ext}} \end{aligned} \right\}$$

donde dentro de las fuerzas y momentos externos están incluidas las reacciones en el eje. Al igual que hicimos en el caso del movimiento del punto ligado la verdadera ecuación del movimiento es la "componente" según la dirección en la que se realiza el movimiento. En el caso del sólido rígido la ecuación de la cantidad de movimiento está asociada con la traslación del centro de masas y la del momento cinético con la rotación alrededor del centro de masas o de un punto fijo. En este caso el único grado de libertad está asociado con la rotación según el eje fijo por lo que la ecuación que determina el movimiento es la componente según ese eje de la derivada del momento cinético

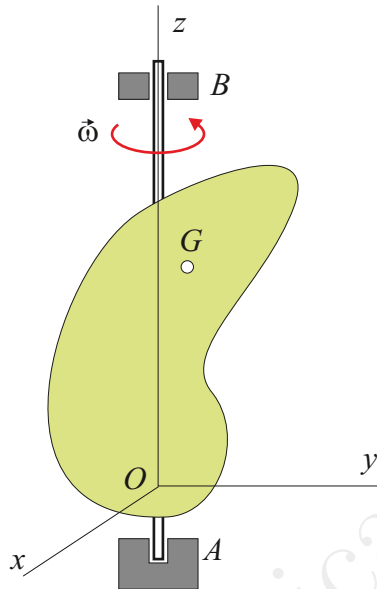
$$\hat{e} \cdot \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \hat{e} \cdot \vec{M}_O^{\text{ext}} = M_e^{\text{ext}}$$

y como el vector unitario según el eje no cambia,

$$\hat{e} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{l}_O \vec{\omega} = \frac{d}{dt} \hat{e} \cdot \mathbf{l}_O \hat{e} \omega = \frac{d}{dt} I_e \omega = I_e \frac{d\omega}{dt}$$

obtenemos la misma ecuación del movimiento, $M_e^{\text{ext}} = I_e \dot{\omega}$.

Reacciones en el eje. Determinaremos las reacciones en los apoyos para el caso de un sólido rígido con un eje fijo alrededor del cual gira con rotación uniforme y en ausencia de fuerzas. Tomamos un sistema cartesiano $Oxyz$ solidario con el sólido y en el que Oz coincide con el eje de giro. En ese caso, $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ con $\omega = cte.$



Para el movimiento centro de masas, G , la velocidad $\vec{v}_G = \vec{\omega} \times \vec{r}_G$ y la aceleración se obtiene de la fórmula de Boure

$$\vec{a}_G = \left(\frac{d\vec{v}_G}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{v}_G = 0 + \vec{\omega} \times \vec{v}_G = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)$$

y entonces

$$m \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) = \vec{R}_A + \vec{R}_B$$

donde \vec{R}_A y \vec{R}_B son las reacciones en los apoyos.

Para el movimiento de rotación,

$$\dot{\vec{L}}_O = \vec{M}_O^{\text{ext}} = \vec{OA} \times \vec{R}_A + \vec{OB} \times \vec{R}_B$$

utilizando de nuevo la fórmula de Boure

$$\dot{\vec{L}}_O = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = \mathbf{I}_O \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = 0 + \vec{\omega} \times \vec{L}_O$$

En este caso

$$\dot{\vec{L}}_O = \omega \hat{k} \times (I_{xz}^O \hat{i} + I_{yz}^O \hat{j} + I_{zz}^O \hat{k}) \omega = -I_{yz}^O \omega^2 \hat{i} + I_{xz}^O \omega^2 \hat{j}$$

que no tiene componente según el eje de giro (ya que ω es constante). Por tanto se tiene un sistema con 5 ecuaciones y 6 incógnitas (las componentes de las reacciones),

$$-m \omega^2 x_G = A_x + B_x \quad (12.16)$$

$$-m \omega^2 y_G = A_y + B_y \quad (12.17)$$

$$0 = A_z + B_z \quad (12.18)$$

$$-I_{yz}^O \omega^2 = -\overline{OA} A_y + \overline{OB} B_y \quad (12.19)$$

$$-I_{xz}^O \omega^2 = +\overline{OA} A_x - \overline{OB} B_x \quad (12.20)$$

que permiten determinar las componentes de las reacciones perpendiculares al eje y solamente la suma de las reacciones a lo largo del eje.

Nota. No se ha incluido la fuerza peso.

Equilibrado Estático y Dinámico. Se dice que un sistema con eje fijo está equilibrado cuando no se producen reacciones en los apoyos (diferentes de las del peso). Las reacciones responden a dos efectos diferentes, por una lado a la aceleración del centro de masas y por otro a la derivada del momento cinético. Para conseguir anular el primer efecto es condición necesaria y suficiente que el centro de masas pertenezca al eje de rotación,

$$\text{Equilibrado Estático} \Leftrightarrow x_G = y_G = 0 \Leftrightarrow G \in \text{Eje de rotación}$$

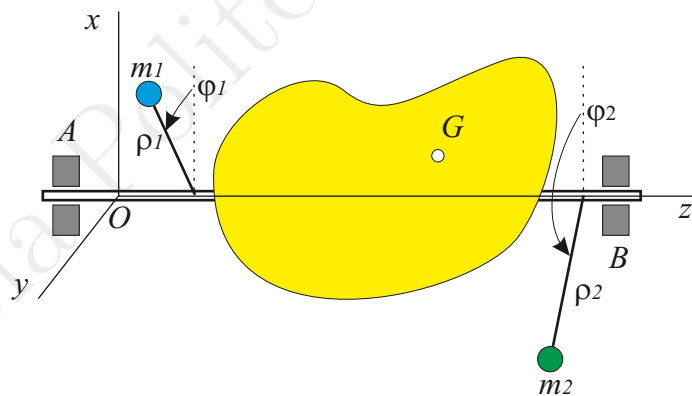
El segundo efecto se anula si el eje de giro es dirección principal de inercia de manera que $\vec{L}_0 \parallel \vec{\omega}$ y se anula la derivada,

$$\text{Equilibrado Dinámico} \Leftrightarrow I_{yz}^O = I_{xz}^O = 0 \Leftrightarrow \text{Eje de rotación es dirección principal}$$

Los nombres de estático y dinámico se deben a que en el primer caso se puede utilizar la fuerza peso para detectar si el sistema está equilibrado colocando el eje de giro horizontal y comprobando que el peso no provoca ningún movimiento con independencia de la postura en la que se encuentre el cuerpo. Para determinar si está equilibrado dinámicamente hay que recurrir a provocar el giro y detectar los esfuerzos sobre los apoyos.

El equilibrado de ejes es importante desde el punto de vista práctico porque permite minimizar el desgaste y la producción de ruido y vibraciones en estos sistemas. Como se trata de hacer cero 4 ecuaciones, añadiendo una única masa (3 grados de libertad) en general no podrá conseguirse. Con dos masas (6 grados de libertad) existen en principio infinitas posibilidades que se pueden reducir imponiendo ciertas condiciones a las posiciones en las que se colocan las masas.

Así, por ejemplo, se pueden fijar los valores de la coordenada z y la distancia al eje ρ de las masas, dejando libres los valores de las masas y los valores del ángulo acimutal φ .



Entonces,

$$\left. \begin{aligned} m x_G + m_1 \rho_1 \cos \varphi_1 + m_2 \rho_2 \cos \varphi_2 &= 0 \\ m y_G + m_1 \rho_1 \sin \varphi_1 + m_2 \rho_2 \sin \varphi_2 &= 0 \\ I_{xz}^O - m_1 z_1 \rho_1 \cos \varphi_1 - m_2 z_2 \rho_2 \cos \varphi_2 &= 0 \\ I_{yz}^O - m_1 z_1 \rho_1 \sin \varphi_1 - m_2 z_2 \rho_2 \sin \varphi_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es

$$\left\{ \begin{aligned} \tan \varphi_1 &= \frac{z_2 m y_G + I_{yz}^O}{z_2 m x_G + I_{xz}^O} \\ \tan \varphi_2 &= \frac{z_1 m y_G + I_{yz}^O}{z_1 m x_G + I_{xz}^O} \\ m_1 &= \frac{z_2 m x_G + I_{xz}^O}{(z_1 - z_2) \rho_1 \cos \varphi_1} \\ m_2 &= \frac{z_1 m x_G + I_{xz}^O}{(z_2 - z_1) \rho_2 \cos \varphi_2} \end{aligned} \right.$$

12.2. Movimiento con un punto fijo. Ecuaciones de Euler.

El movimiento del sólido rígido con un punto fijo es un caso particular en el que existe un punto O cuya velocidad permanece nula. En este caso el sólido tiene todos los grados de libertad asociados con la rotación y ninguno asociado con la traslación por ello representa el movimiento general de rotación de un sistema indeformable. El movimiento general del sólido podría descomponerse en un movimiento de traslación del centro de masas y una rotación alrededor de ese punto G que sería formalmente idéntica al movimiento alrededor del punto fijo O (todas las ecuaciones siguen siendo válidas cambiando O por G).

El movimiento con un punto fijo también se conoce por *movimiento esférico* ya que al permanecer constante la distancia de cualquier punto P al punto fijo O hace que la trayectoria de este esta contenida en una esfera de radio \overline{OP} con centro en O . Al igual que en el movimiento plano, se puede reducir el movimiento del sólido al de los puntos de esa superficie esférica.

Ecuaciones del Movimiento

Las ecuaciones del movimiento serían las asociadas a la rotación alrededor de O ,

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}} \quad (12.21)$$

siendo el momento cinético

$$\vec{L}_O = \mathbf{I}_O \vec{\omega}$$

un vector que en general no es paralelo a $\vec{\omega}$.

Si elegimos un sistema cartesiano inercial con origen en el punto fijo, $Oxyz$, el momento cinético sería

$$\vec{L}_O = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

y al derivar esta expresión debe tenerse en cuenta que las componentes del tensor de inercia varían con el tiempo ya que la orientación del cuerpo respecto del sistema de ejes fijo en el espacio también cambia. Eso hace que la situación sea muy diferente al del caso del movimiento plano donde la ecuación de rotación era muy sencilla y tenía la misma forma que las movimiento de traslación del centro de masas.

La ecuación 12.21 permite determinar $\vec{\omega}(t)$. A partir de $\vec{\omega}$ es posible determinar por integración la posición del sólido utilizando, por ejemplo, los ángulos de Euler. Debe notarse sin embargo que, a diferencia con el caso del movimiento plano, el vector rotación $\vec{\omega}$ no es en general la derivada de ningún otro vector,

$$\vec{\omega} \neq \frac{d}{dt} \vec{\Lambda}$$

Para demostrarlo basta suponer que si existe el vector $\vec{\Lambda}$ debería poder expresarse en función de los ángulos de Euler ya que estos determinan la orientación del sólido, $\vec{\Lambda}(\psi, \theta, \varphi)$. Para demostrar que tal vector no existe basta con derivar cualquiera de sus componentes y comparar con las derivadas de $\vec{\omega}$,

$$\omega_x = \frac{d}{dt} \Lambda_x \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta = \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \varphi} \dot{\varphi}$$

que claramente no puede darse, basta comprobar que la derivada cruzada no coincide

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \theta} = \cos \psi \\ \frac{\partial \Lambda_x}{\partial \varphi} = \sin \psi \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 \Lambda_x}{\partial \varphi \partial \theta} \neq \frac{\partial^2 \Lambda_x}{\partial \theta \partial \varphi}$$

El hecho de que el vector $\vec{\omega}$ no sea un función integrable hace que le llame *vector rotación* para distinguirlo de la velocidad angular que es siempre la derivada de un ángulo respecto del tiempo.



En el movimiento esférico todas las magnitudes dinámicas del sólido se pueden expresar en función de $\vec{\omega}$, así, la cantidad de movimiento

$$\vec{p} = m \vec{v}_G = m \vec{\omega} \times \vec{r}_G$$

la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} m (\vec{\omega} \times \vec{r}_G)^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}_G \vec{\omega}$$

o desde el punto fijo

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}_O \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O$$

El desplazamiento infinitesimal sería, $d\vec{r}_\alpha = \vec{v}_\alpha dt = \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha dt$, por lo que el trabajo quedaría,

$$dW = dT = \vec{M}_O^{\text{ext}} \cdot \vec{\omega} dt$$

Ecuaciones de Euler.

Sea $Oxyz$ un sistema de referencia fijo (inercial) que llamaremos *espacio* y consideremos otro sistema de referencia $Ox_1x_2x_3$ que se mueva con el sólido y cuyos ejes coincidan con las direcciones principales, le llamaremos *cuerpo*. En este sistema de referencia el tensor de inercia es diagonal y sus componentes no cambian con el tiempo

$$[I_O] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

En este sistema de referencia el momento cinético se expresa como:

$$\vec{L}_O = I_1 \omega_1 \hat{u}_1 + I_2 \omega_2 \hat{u}_2 + I_3 \omega_3 \hat{u}_3$$

y su derivada viene dada por

$$\left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\text{fijo}} = \left(\frac{d\vec{L}_O}{dt} \right)_{\text{móvil}} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O$$

que igualada al momento de las fuerzas da lugar a un sistema de tres ecuaciones diferenciales

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3 \end{aligned} \right\}$$

Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones de Euler* y permiten determinar la evolución temporal de $\vec{\omega}$ respecto de los ejes móviles conocidas las componentes M_1 , M_2 y M_3 de los momentos aplicados.

Reacción en el punto fijo.

La reacción en el vínculo se determina con la ecuación de la cantidad de movimiento,

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = m \vec{v}_G = m \frac{d}{dt} [\vec{\omega} \times \vec{r}_G] = m \left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_G + \vec{\omega} \times \vec{v}_G \right]$$

y entonces

$$\vec{R}_O = m \left[\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_G + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_G) \right] - \vec{F}^{\text{ap}}$$

donde \vec{F}^{ap} es la resultante de las fuerzas aplicadas desde el exterior del sólido.

Integración de las ecuaciones de Euler en ausencia de pares.

Comenzamos resolviendo el caso más sencillo, $\vec{M}_O = \vec{0}$, es decir, movimiento en ausencia de pares que también se conoce por movimiento por inercia, ya que sería el movimiento que haría el sólido aislado en ausencia de fuerzas aplicadas. Las ecuaciones de Euler quedan,

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

y existen dos constantes del movimiento

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= c\vec{t}e \\ T &= cte \end{aligned}$$

que nos van a permitir expresar dos de las componentes de $\vec{\omega}$ en función de la tercera, reduciendo de este modo la resolución de las ecuaciones de Euler a una integral.

Hay que tener en cuenta, sin embargo, que si $\vec{L}_O = c\vec{t}e$, lo serán cada una de sus componentes en el sistema fijo L_x, L_y, L_z , no así sus componentes en el sistema móvil L_1, L_2, L_3 . Dado que $\vec{L}_O \cdot \vec{L}_O$ es un escalar y no depende de la orientación de la base, tomamos como constantes

$$\begin{aligned} L^2 &= I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 \\ 2T &= I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 \end{aligned}$$

Caso con el elipsoide de inercia esférico.

El elipsoide de inercia es una esfera si los tres momentos principales son iguales, $I_1 = I_2 = I_3$. En este caso el momento cinético y la rotación son siempre paralelos y la conservación del momento cinético lleva a que la rotación también es constante. El movimiento será por tanto una rotación uniforme $\omega = cte$ alrededor de una dirección fija.

Caso con el elipsoide de inercia de revolución.

Suponiendo que el eje de simetría del elipsoide sea el eje 3, entonces, $I_1 = I_2 \neq I_3$ y las ecuaciones de Euler quedan

$$\left. \begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_1) \omega_2 \omega_3 &= 0 \\ I_1 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

La tercera ecuación nos dice que la componente 3 de la rotación permanece constante, $\omega_3 = cte$. Las otras dos forman un sistema que puede resolverse fácilmente si se escriben en la forma

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

donde $\Omega = \omega_3(I_3 - I_1)/I_1$ es una constante. Derivando la primera y sustituyendo en ella la segunda,

$$\ddot{\omega}_1 + \Omega^2 \omega_1 = 0$$

que es la ecuación de una oscilación armónica, $\omega_1(t) = A \cos(\Omega t + \delta)$. Despejando ω_2 de la primera ecuación del sistema se tiene $\omega_2(t) = -\omega_1/\Omega = A \sin(\Omega t + \delta)$. Finalmente,

$$\vec{\omega}(t) = A [\cos(\Omega t + \delta) \hat{u}_1 + \sin(\Omega t + \delta) \hat{u}_2] + \omega_3 \hat{u}_3$$

es un vector de módulo constante que gira alrededor del eje Ox_3 con velocidad angular constante Ω .

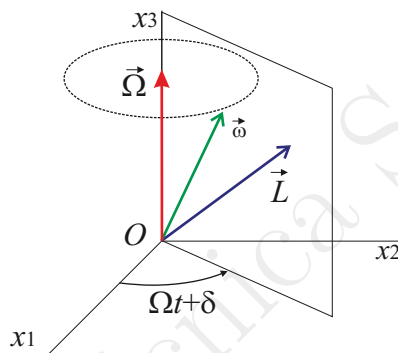
Para describir el movimiento del cuerpo nos fijamos en que el movimiento del sistema $Ox_1x_2x_3$ es el mismo que el del cuerpo; el EIR es la recta que pasa por el punto fijo O y tiene la dirección de $\vec{\omega}$; eligiendo

el eje Oz del sistema fijo en el espacio según la dirección \vec{L}_O , que en ese sistema permanece constante, el movimiento del momento cinético en el sistema móvil nos permitirá obtener el del cuerpo en el sistema fijo en el espacio.

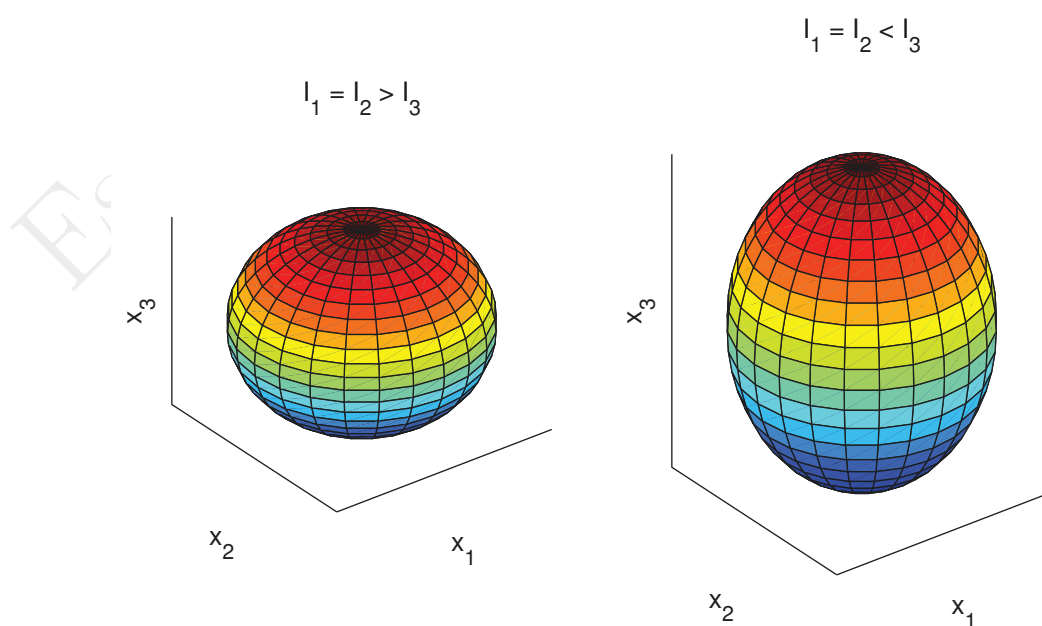
En el sistema cuerpo tenemos,

$$\vec{L}_O = I_1 A [\cos(\Omega t + \delta) \hat{u}_1 + \text{sen}(\Omega t + \delta) \hat{u}_2] + I_3 \omega_3 \hat{u}_3$$

que realiza el mismo movimiento que la rotación alrededor del eje Ox_3 , manteniéndose en un mismo plano $\hat{u}_3, \vec{\omega}$ y \vec{L}_O . Al mantenerse además constantes los ángulos que forma el EIR con el eje Ox_3 y con el eje Oz los axoides móvil y fijo son dos conos de revolución con vértice en O .

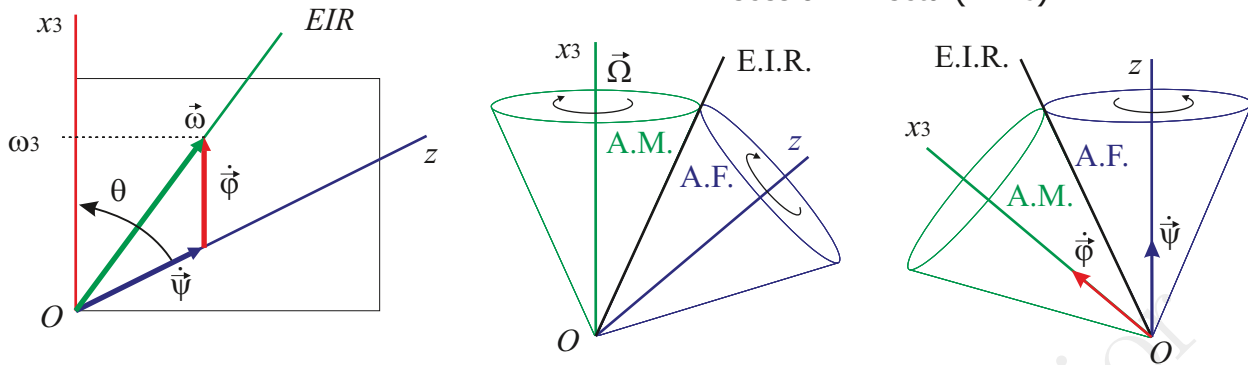


Se dan dos situaciones que están relacionadas con la forma del elipsoide de inercia: si $I_1 = I_2 > I_3$ el elipsoide es achatado o con forma de naranja y si $I_1 = I_2 < I_3$ el elipsoide es alargado o con forma de pepino.



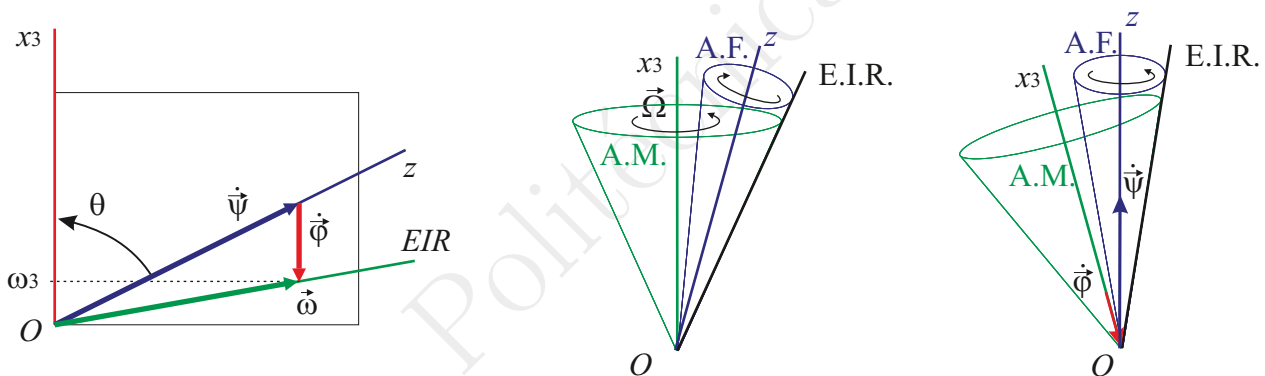
Si $I_1 > I_3$ la rotación está en medio de Ox_3 y Oz y los axoides ruedan sin deslizar uno por el exterior del otro. La velocidad angular Ω tiene el signo contrario de ω_3 y al pasar al sistema fijo el movimiento de $\vec{\omega}$ y de Ox_3 se invierte y acaba teniendo el mismo sentido que ω_3 , se denomina *precesión directa*.

Precesión Directa ($I_1 > I_3$)



Si por el contrario $I_1 < I_3$ es Oz el que está en medio de Ox_3 y $\vec{\omega}$, en el sistema del cuerpo el axoide fijo rueda por el interior del fijo. Cambiando al sistema espacio es el axoide móvil el que rueda por el exterior del fijo en sentido contrario a Ω y por tanto en sentido contrario a ω_3 , se denomina *precesión retrógrada*.

Precesión Retrograda ($I_1 < I_3$)



Ángulos de Euler. Para determinar el movimiento final del cuerpo obtendremos los ángulos de Euler. El ángulo de nutación es el que forman Ox_3 y Oz y puede determinarse fácilmente con la tercera componente del momento cinético,

$$L_3 = I_3 \omega_3 = L \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos \left(\frac{I_3 \omega_3}{L} \right) = cte$$

La componente 1 nos permite obtener la rotación de precesión ya que $\dot{\theta} = 0$,

$$L_1 = I_1 \omega_1 = I_1 \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi = L \sin \theta \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = \frac{L}{I_1} = cte \quad \Rightarrow \quad \psi = \psi(0) + \frac{L}{I_1} t$$

La rotación propia también es constante y se obtiene de la componente 3,

$$L_3 = I_3 \omega_3 = I_3 (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta) = L \cos \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \left(\frac{L}{I_3} - \dot{\psi} \right) \cos \theta = \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_3 = cte$$

que es igual pero opuesta a la precesión del EIR vista en el sistema móvil, $\dot{\varphi} = -\dot{\psi}$.

Estabilidad de la rotación alrededor de los ejes principales.

Si la rotación coincide con una de las direcciones principales, el momento cinético y la rotación son paralelas y la conservación del momento cinético lleva a que la rotación se mantiene constante y por eso a los ejes principales se les llama también *ejes permanentes*. Si hacemos que $\vec{\omega}$ se separe ligeramente de una de las direcciones principales puede ocurrir que la rotación se mantenga próxima a la dirección principal o que inicie un movimiento en el que se aleja rápidamente de la dirección inicial, en el primer caso diremos que la rotación permanente es estable y en el segundo que es inestable.

Este resultado se puede obtener con las ecuaciones de Euler considerando que en las proximidades de un eje principal la componente de la rotación según ese eje va a ser mucho mayor que las otras dos. Así, considerando un sólido tal que $I_1 > I_2 > I_3$, para el eje 1, $\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$ y entonces,

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 0 & \Rightarrow \omega_1 \approx \text{cte} \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 0 & \Rightarrow \dot{\omega}_2 + \frac{(I_1 - I_3) \omega_1}{I_2} \omega_3 = 0 \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 0 & \Rightarrow \dot{\omega}_3 - \frac{(I_1 - I_2) \omega_1}{I_3} \omega_2 = 0 \end{cases}$$

las dos últimas pueden escribirse en la misma forma,

$$\ddot{\omega}_k + C \omega_k = 0 \quad k = 2, 3$$

donde la constante C

$$C = \frac{(I_1 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_2 I_3} \omega_1^2 > 0$$

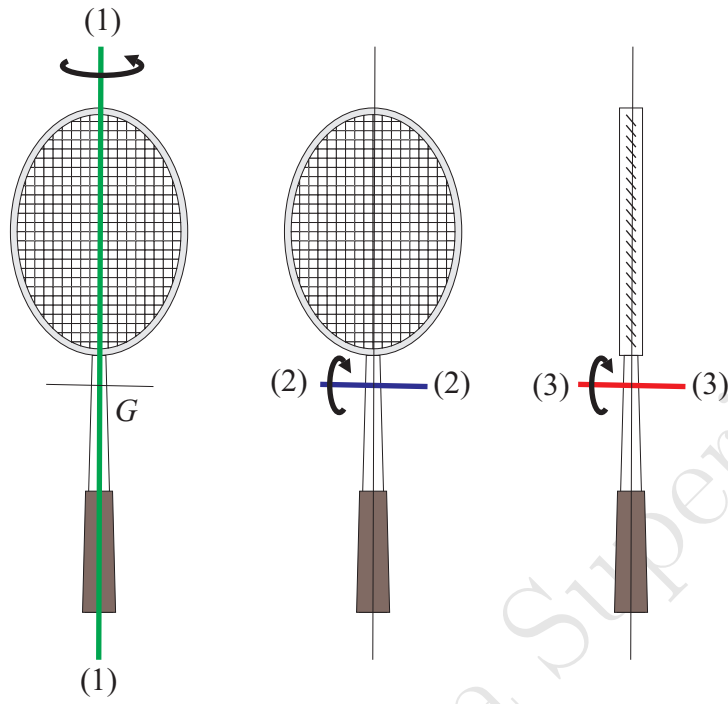
es en este caso positiva lo que nos indica que la solución de las componentes 2 y 3 son armónicas y se mantendrán siempre en valores pequeños.

En cambio, para el eje mediano, 2, el mismo procedimiento nos llevaría a una constante B negativa,

$$B = \frac{(I_2 - I_3)(I_2 - I_1)}{I_1 I_3} \omega_2^2 < 0$$

y la solución sería una combinación de exponenciales crecientes y decrecientes con lo que la rotación terminaría alejándose del eje 2, demostrando que la rotación alrededor del eje mediano es inestable.

Este resultado se conoce por el teorema de la raqueta de tenis (Antonio Rañada, Dinámica Clásica, p. 458) y demuestra el hecho de que una raqueta de tenis puede hacerse girar fácilmente a lo largo del eje del mango (1) o en el plano de la pala (3) pero muy difícilmente alrededor del eje (2) normal a los dos anteriores. Los valores aproximados de los momentos principales son $I_1 \approx 0,15 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$, $I_2 \approx 1,49 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$ e $I_3 \approx I_1 + I_2$.



Escuela Politécnica Superior



13. Introducción a la dinámica analítica

- 13.1 Ligaduras en sistemas físicos. Definición, propiedades y clasificación.
- 13.2 Condiciones de equilibrio y ecuaciones del movimiento en coordenadas generalizadas.
- 13.3 Principio de D'Alembert.
- 13.4 Ecuación general de la dinámica para un sistema con ligaduras sin rozamiento.
- 13.5 Fuerzas, trabajo y energía en coordenadas generalizadas.

Introducción

Hasta ahora hemos basado el estudio de la dinámica en magnitudes vectoriales, sin embargo es posible seguir un enfoque diferente en el cual las magnitudes fundamentales son escalares y las ecuaciones fundamentales se obtienen mediante un proceso sistemático de derivación de tales funciones; a este planteamiento se le conoce como *mecánica analítica*.

La mecánica vectorial y la mecánica analítica son métodos distintos de resolución de los problemas dinámicos, pero no teorías diferentes de la mecánica por lo que deben conducir a los mismos resultados. Por otra parte la mecánica analítica admite varias formulaciones, en este curso nos centraremos básicamente en la *formulación lagrangiana*.

Una cuestión que se suele plantear es la conveniencia de utilizar la formulación vectorial o la analítica para obtener las ecuaciones del movimiento. No existe una regla fija, con la posible excepción de los sistemas dinámicos con ligaduras, donde la formulación analítica muestra su potencia.

13.1. Ligaduras en sistemas físicos. Definición, propiedades y clasificación.

Ya hemos visto que las ligaduras restringen los movimientos de un sistema. Matemáticamente se expresan como una relación funcional entre las posiciones y velocidades de los puntos del sistema y el parámetro tiempo. Existen diversos criterios para clasificar las ligaduras, aquí consideraremos:

- Ligaduras holónomas y no holónomas: Son aquellas que conducen a problemas que pueden resolverse formalmente; existe solución general completa. En el caso de ligaduras no holónomas no existe un método general.

Son *holónomas* las ligaduras geométricas, es decir aquellas que pueden expresarse mediante una relación funcional de las posiciones de las partículas (y posiblemente el tiempo) de la forma $f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = 0$. Un ejemplo de ligadura geométrica es el sólido rígido, $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 - c_{ij}^2 = 0$. El caso de una partícula que se mueve ligada a una curva o una superficie es otro ejemplo de ligadura geométrica, donde las ecuaciones de la curva o de la superficie actúan como ecuaciones de ligadura. Sin embargo el problema de una partícula que se mueve por el exterior de la superficie de una esfera de radio a , donde la ligadura se expresaría como una desigualdad, $\vec{r}^2 - a^2 \geq 0$, sería un caso de ligadura no holónoma.

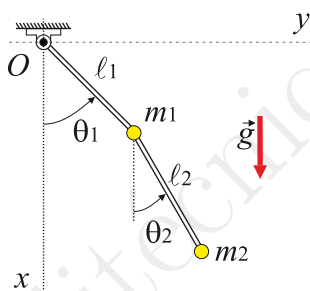
Las ligaduras cinemáticas, que se expresan como una relación funcional de las velocidades y del tiempo, $f(\dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0$, son en general no holónomas; sin embargo aquellas que por integración conducen a una ligadura geométrica (cinemáticas integrables) son también ligaduras holónomas. Un ejemplo de ligadura cinemática integrable sería el caso de un círculo que rueda sin deslizar sobre una recta, la ligadura sería que la velocidad del punto de contacto A es nula, $v_A = v_C - \omega r = 0$ que puede integrarse dando lugar a una relación entre la coordenada del centro del círculo C y el ángulo girado ϕ , $x_C = r\phi + cte$.

- Esclerónomas y reónomas: Se clasifican así atendiendo a su dependencia temporal. Si en la ecuación de ligadura aparece explícitamente el tiempo la denominaremos *reónoma* y en caso contrario *esclerónoma*.

13.2. Condiciones de equilibrio y ecuaciones del movimiento en coordenadas generalizadas.

Para un sistema con ligaduras los desplazamientos de sus partículas no son independientes y por tanto las coordenadas utilizadas para definir la posición del sistema tampoco lo son. Cuando todas las ligaduras son holónomas (sistemas holónomos) la dependencia que existe entre las posiciones de los diferentes puntos del sistema puede evitarse eligiendo unas nuevas coordenadas que sean independientes entre sí. Definimos entonces:

Coordenadas generalizadas: Conjunto de variables $\{q_1, \dots, q_s\}$ independientes entre sí, que definen unívocamente la posición del sistema, i. e., $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_s, t)$, siendo s el número de grados de libertad (movimientos independientes) del sistema y α un índice que recorre el número de partículas N . Para un sistema dado, la elección de las coordenadas generalizadas no es única. Así, por ejemplo, en el caso del péndulo doble existen dos ligaduras: $x_1^2 + y_1^2 = \ell_1^2$ y $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \ell_2^2$, y cuatro coordenadas cartesianas por lo que podrían elegirse 2 coordenadas independientes de múltiples formas y en diversas combinaciones siendo todas ellas válidas. En este caso lo más cómodo es tomar los dos ángulos indicados en la figura.



Vamos a escribir el principio del trabajo virtual en términos de las coordenadas generalizadas. Los desplazamientos virtuales (instantáneos y compatibles con las ligaduras) se expresarán

$$\delta \vec{r}_\alpha = \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j$$

y por tanto el trabajo virtual será:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j$$

Denominamos fuerza generalizada Q_j , asociada a la coordenada generalizada q_j a:

$$Q_j = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

Nótese que, en general Q_j no tiene dimensiones de fuerza pero el producto $Q_j \delta q_j$ siempre tiene dimensiones de trabajo o energía ML^2T^{-2} .

En función de las coordenadas y fuerzas generalizadas, el trabajo virtual puede escribirse

$$\delta W = \sum_j Q_j \delta q_j$$

y dado que los desplazamientos de las coordenadas generalizadas son independientes, el principio del trabajo virtual quedaría:

$$\text{EQUILIBRIO} \Leftrightarrow \delta W = 0, \forall \delta q_j \Leftrightarrow Q_j = 0, \forall j$$



En sistemas conservativos, $\forall \alpha$, $\vec{F}_\alpha = -\vec{\nabla}_\alpha V$, siendo $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_\alpha, \dots)$ la energía potencial del sistema, el trabajo es:

$$dW = \sum_{\alpha} -\vec{\nabla}_\alpha V \cdot d\vec{r}_\alpha = - \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha} dx_\alpha + \frac{\partial V}{\partial y_\alpha} dy_\alpha + \frac{\partial V}{\partial z_\alpha} dz_\alpha \right) = -dV$$

y dado que las fuerzas generalizadas se pueden escribir en función del potencial como:

$$Q_j = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}$$

la condición necesaria y suficiente para que un sistema conservativo esté en equilibrio es:

$$EQUILIBRIO \Leftrightarrow \delta W = 0, \forall \delta \vec{r}_\alpha \Leftrightarrow Q_j = - \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0, \forall j$$

13.3. Principio de D'Alembert.

El principio de D'Alembert es la extensión del principio del trabajo virtual a la dinámica. Para un sistema de N partículas, el trabajo necesario para llevar el sistema de 1 a 2 es

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{r}_\alpha$$

donde \vec{F}_α es la suma de las fuerzas aplicadas y las fuerzas de ligadura aplicadas a la partícula α , $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^{\text{apli}} + \vec{R}_\alpha$

Hemos visto que la condición necesaria y suficiente de equilibrio es

$$\delta W = \sum_{\alpha} \left(\vec{F}_\alpha^{\text{apli}} + \vec{R}_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0, \forall \delta \vec{r}_\alpha$$

pero en gran número de casos, enlaces perfectos, el segundo sumando es nulo; las fuerzas de ligadura no contribuyen al trabajo virtual y por lo tanto, la ecuación de equilibrio queda

$$\sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha^{\text{apli}} \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0, \forall \delta \vec{r}_\alpha$$

Análogamente la segunda ley de Newton para un sistema de partículas $\vec{F}_\alpha = \dot{\vec{p}}_\alpha$ puede transformarse, tomando el trabajo, de manera que no intervengan las fuerzas de ligadura, en el Principio de D'Alembert:

$$\sum_{\alpha=1}^N \left(\vec{F}_\alpha - \dot{\vec{p}}_\alpha \right) \cdot \delta \vec{r}_\alpha = 0, \forall \delta \vec{r}_\alpha \quad (13.22)$$

Según este principio, un sistema está en equilibrio dinámico bajo la acción de las fuerzas aplicadas más las fuerzas de inercia, $-\dot{\vec{p}}_\alpha$. Es un principio fundamental que proporciona una formulación completa para todos los problemas mecánicos. La ventaja de utilizar el principio de D'Alembert sobre la formulación de Newton es que tanto las fuerzas de ligadura como las fuerzas internas entre las partículas del sistema se eliminan lo cual supone una gran ventaja en sistemas con varios grados de libertad.

13.4. Ecuación general de la dinámica para un sistema con ligaduras sin rozamiento.

La ecuación 13.22 es difícil de resolver porque en general los desplazamientos virtuales no son independientes. Si el sistema es holónomo pueden elegirse un conjunto de coordenadas generalizadas y reescribir cada uno de los términos que aparecen en términos de las coordenadas y las fuerzas generalizadas:

Así, el primer término, ya hemos visto que quedaría

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{F}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{j=1}^s Q_j \cdot \delta q_j \quad (13.23)$$

Análogamente, el segundo término

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N \dot{\vec{p}}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha &= \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} (m_\alpha \vec{v}_\alpha) \cdot \sum_{j=1}^s \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^s \sum_{\alpha} \frac{d}{dt} (m_\alpha \vec{v}_\alpha) \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^s \sum_{\alpha} \left[\frac{d}{dt} \left(m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) - m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j \end{aligned} \quad (13.24)$$

Teniendo en cuenta que

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_\alpha(q_j, \dot{q}_j, t) = \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}$$

por tanto,

$$\frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

y el primer término de la ecuación 13.24 queda

$$\sum_{\alpha} \frac{d}{dt} \left(m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

siendo

$$T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_\alpha \vec{v}_\alpha^2$$

la energía cinética del sistema.

Teniendo en cuenta que las derivadas parciales cruzadas son iguales, en el otro sumando de la expresión 13.24 puede hacerse el cambio,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial t \partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_k \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t} \right] = \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial q_j}$$

Entonces, la ecuación 13.24 queda

$$\sum_{\alpha=1}^N \dot{\vec{p}}_\alpha \cdot \delta \vec{r}_\alpha = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{\alpha} m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial q_j} \right] = \sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j$$

Finalmente la ecuación 13.22 puede escribirse

$$\sum_j \left[Q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0, \forall \delta q_j \quad (13.25)$$

y dado que los δq_j son independientes entre sí, tenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \forall q_j \quad (13.26)$$

que es la ecuación del movimiento para la coordenada q_j que recibe el nombre de *ecuación de Euler-Lagrange*.



13.5. Fuerzas, trabajo y energía en coordenadas generalizadas

La fuerza generalizada Q_j , asociada a la coordenada generalizada q_j se obtiene como:

$$Q_j = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j}$$

de manera que el trabajo en un desplazamiento infinitesimal es

$$dW = \sum_{j=1}^S Q_j dq_j$$

y la potencia

$$P = \frac{dW}{dt} = \sum_{j=1}^S Q_j \dot{q}_j$$

El trabajo realizado sobre un sistema se emplea en cambiar su energía cinética, para un sistema holónomo se tiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left[\sum_j \sum_k \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j \partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j \partial t} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial t^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \sum_k A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k + \frac{1}{2} \sum_j B_j \dot{q}_j + \frac{1}{2} C \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j \partial q_k} \\ B_j &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j \partial t} \\ C &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial^2 \vec{r}_{\alpha}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Si el sistema es además esclerónomo las funciones B_j y C son cero y la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades generalizadas.

Si las fuerzas aplicadas son conservativas, el trabajo es igual a menos la variación de la energía potencial, donde

$$V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_{\alpha}, \dots) = V(q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, t)$$

y de nuevo la dependencia con el tiempo desaparece si el sistema es también esclerónomo.



14. Formulación de Lagrange

- 14.1 Ecuaciones de Lagrange.
- 14.2 Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación.
- 14.3 Aplicaciones sencillas de la formulación de Lagrange.
- 14.4 Constantes del movimiento. Teoremas de conservación
- 14.5 Principio variacional de Hamilton. Aplicación a la derivación de las ecuaciones de Lagrange.
- 14.6 Función hamiltoniana.
- 14.7 Eliminación de coordenadas cíclicas. Función de Routh.

14.1. Ecuaciones de Lagrange.

En el tema anterior hemos obtenido las ecuaciones del movimiento, *ecuaciones de Euler-Lagrange*, para cada una de las coordenadas generalizadas, q_j .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \forall j \quad (14.27)$$

Sistemas conservativos

A continuación veremos qué forma tienen estas ecuaciones en sistemas conservativos, es decir sistemas en los cuales $\forall \alpha, \vec{F}_\alpha = -\vec{\nabla}_\alpha V$, siendo $V = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_\alpha, \dots)$ la energía potencial del sistema, una función escalar que depende únicamente de las posiciones de las partículas del sistema.

En un sistema conservativo las fuerzas generalizadas pueden escribirse $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$. Si además el sistema es holónomo, las posiciones dependen de las coordenadas generalizadas y tal vez del tiempo, $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_s; t)$, pero no dependen de las velocidades \dot{q}_j ; por tanto $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$ y podremos escribir

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Haciendo $\mathcal{L} = T - V$, las ecuaciones del movimiento pueden escribirse

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1 \dots s \quad (14.28)$$

Estas ecuaciones se denominan *Ecuaciones de Lagrange* y L es la función *lagrangiana* del sistema.

Propiedades de la lagrangiana

- \mathcal{L} es una función escalar que contiene toda la información sobre la evolución temporal del sistema
- $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t)$
- Se denomina $p_j \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j}$, como momento conjugado de la coordenada q_j . En términos de los momentos conjugados las ecuaciones de Lagrange, $\dot{p}_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j$, guardan una gran similitud con la ecuación de Newton $\vec{p}_\alpha = \vec{F}_\alpha$.
- Lagrangianas que conducen a las mismas ecuaciones del movimiento:
 - $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + cte$, lagrangianas que se diferencian en una constante. (Es lo mismo que le ocurre al potencial)
 - $\mathcal{L}' = cte \mathcal{L}$, lagrangianas entre las que hay un factor constante.
 - $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + f(t)$, lagrangianas que se diferencian en una función que solo depende del tiempo.
 - $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} [f(q, t)]$, lagrangianas que se diferencian en la derivada temporal de una función que no depende de las velocidades. (Esta propiedad se conoce por invariancia Gauge).

Sistemas no conservativos

Si el sistema es holónimo pero no conservativo separaremos las fuerzas que actúan sobre cada partícula en la parte conservativa y la no conservativa, $\vec{F}_\alpha = \vec{F}_\alpha^C + \vec{F}_\alpha^{NC}$, lo que conduce a dos términos en la fuerza generalizada,

$$Q_j = Q_j^C + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + Q_j^{NC}$$

obteniéndose unas ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j^{NC} \quad j = 1 \dots s$$

donde las fuerzas conservativas se incluyen dentro de la lagrangiana y las no conservativas se introducen mediante las fuerzas generalizadas,

$$Q_j^{NC} = \sum_{\alpha} \vec{F}_\alpha^{NC} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j}$$

Sistemas no holónomos. Método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange

Si el sistema es no holónimo podemos elegir un conjunto de coordenadas $\{q_1, \dots, q_s\}$ que no serán todas independientes ya que existirán ligaduras no integrables entre ellas. En estos casos todavía puede aplicarse el principio de D'Alembert,

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0, \forall \delta q_j \quad (14.29)$$

pero los desplazamientos no serán independientes.

Existe un caso de ligaduras no holónomas para las que existe solución general, es el caso de las ligaduras lineales en las velocidades del tipo,

$$\sum_{j=1}^s a_{\ell j} \dot{q}_j + a_{\ell} = 0, \ell = 1, \dots, m \quad (14.30)$$

siendo $a_{ij} = a_{ij}(q_1, \dots, q_s, t)$ funciones de las coordenadas y del tiempo. En un desplazamiento virtual (instantáneo, $\delta t = 0$) estas ligaduras llevan a

$$\sum_{j=1}^s a_{\ell j} \delta q_j = 0, \ell = 1, \dots, m$$

de manera que multiplicando la ecuación anterior para cada ligadura por un coeficiente λ_ℓ y sumándolas todas en la ecuación 14.29 se tiene,

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j} \right] \delta q_j = 0, \forall \delta q_j$$

donde por comodidad hemos supuesto que el sistema es conservativo. Como hay s coordenadas y m ligaduras podemos considerar que las coordenadas $j = 1, \dots, s - m$ son independientes y para las m restantes elegir los valores de los coeficientes λ_ℓ de manera que sean cero los términos que multiplican a los desplazamientos de esas coordenadas. Entonces tendríamos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j}, \quad j = 1, \dots, s$$

que junto con las ecuaciones de las ligaduras (14.30) forma un sistema de $s + m$ cuyas incógnitas son las s soluciones de las coordenadas $q_j(t)$ y los m valores de los coeficientes λ_ℓ . Además, el término $\sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j}$ puede interpretarse como la fuerza generalizada asociada con la ligadura,

$$Q_j^{\text{lig}} = \sum_{\ell} \lambda_{\ell} a_{\ell j}$$

Este método puede emplearse para determinar las reacciones de las ligaduras hólomas introduciendo las que se deseen calcular como ligaduras.



14.2. Potenciales dependientes de la velocidad y función de disipación.

Las ecuaciones de Lagrange son válidas para sistemas holónomos que no son conservativos pero donde existe un *potencial generalizado* $U = U(q, \dot{q}, t)$ tal que

$$Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} \right)$$

de manera que haciendo $\mathcal{L} = T - U$ se cumplen las ecuaciones de Lagrange.

Este potencial generalizado permite tratar dentro del formalismo lagrangiano a sistemas que no son conservativos en la formulación de Newton. Ejemplos de fuerzas no conservativas que pueden obtenerse de un potencial generalizado son la fuerza electromagnética $\vec{F} = q [\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}/c]$ o la fuerza de Coriolis $\vec{F} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}$.

Función de disipación. La *función de disipación* es una función escalar similar a un potencial generalizado que permite incluir en el formalismo lagrangiano cierto tipo de fuerzas de rozamiento. Las fuerzas de rozamiento que se pueden describir por la función de disipación son las de tipo viscoso a bajas velocidades que son proporcionales a la diferencia de las velocidades de las partículas

$$\vec{F}_\alpha^{\text{NC}} = \sum_\beta \vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}}$$

donde $\vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}}$ es la fuerza de rozamiento sobre la partícula α debida a la partícula β ,

$$\vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}} = -cte (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta)$$

que puede expresarse como

$$\vec{F}_{\alpha\beta}^{\text{R}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{v}_\alpha} cte (\vec{v}_\alpha - \vec{v}_\beta)^2$$

y conduce a una forma cuadrática de las velocidades que se conoce por *función de disipación de Rayleigh*,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta} \vec{v}_\alpha \vec{v}_\beta$$

de la que se obtienen por derivación las fuerzas,

$$\vec{F}_\alpha^{\text{NC}} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \vec{v}_\alpha}$$

Si las ligaduras no dependen del tiempo, las velocidades de las partículas se obtienen a partir de las velocidades generalizadas y puede escribirse,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j f_{ij}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

donde

$$f_{ij}(q_1, \dots, q_s) = \sum_\alpha \sum_\beta C_{\alpha\beta} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\beta}{\partial q_j}$$

Las fuerzas generalizadas se obtienen como,

$$Q_j^{\text{NC}} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j}$$

y las ecuaciones del movimiento quedarían,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_j} = 0, \quad j = 1 \dots s$$

14.3. Aplicaciones sencillas de la formulación de Lagrange.

Las aplicaciones y ejemplos se harán dentro de las clases de problemas. Aquí solo resumiremos los pasos a seguir para obtener las ecuaciones del movimiento que es válido para todos los sistemas holónomos:

- 1º) Elegir las coordenadas generalizadas $\{q_1, \dots, q_s\}$, tantas como grados de libertad tiene el sistema.
- 2º) Obtener la energía cinética y las fuerzas generalizadas (o el potencial) en función de las coordenadas y sus derivadas.
- 3º) Escribir para coordenada la ecuación de Lagrange.

14.4. Constantes del movimiento. Teoremas de conservación

Constantes del movimiento

Las ecuaciones de Lagrange se pueden desarrollar como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = \sum_k \left[\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_j} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial q_k \partial \dot{q}_j} \dot{q}_k \right] + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial t \partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1 \dots s$$

que son s ecuaciones diferenciales de 2º orden que tendrán $2s$ constantes de integración. Cada una de estas constantes de integración puede verse como una función de las coordenadas y de las velocidades cuyo valor permanece constante,

$$C_i(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t) = cte, \quad i = 1 \dots 2s$$

son las llamadas *integrales primeras*. El valor de estas constantes vendrá determinado por las condiciones iniciales. Algunas de estas constantes tienen un significado físico muy claro y pueden obtenerse sin necesidad del resolver el movimiento atendiendo a las simetrías del problema y permiten conocer las características principales del movimiento. Dentro de estas hay unas que tienen un significado más profundo por estar relacionadas con propiedades fundamentales del espacio-tiempo (homogeneidad e isotropía) dando lugar a los teoremas de conservación.

Teoremas de conservación. Coordenadas cíclicas

Veremos a continuación los teoremas de conservación asociados a las propiedades de homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo. Por comodidad consideraremos un sistema holónomo y en el que existe potencial.

Homogeneidad del tiempo, conservación de la energía. En un sistema aislado, el estado del sistema no puede depender de la elección del origen de tiempos, es decir, el tiempo es homogéneo. Por tanto, la función lagrangiana no dependerá explícitamente del tiempo, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j)$, entonces,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \dot{q}_j \right] = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \right] = \frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right]$$

de manera que

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} \right] = 0$$

y se obtiene una magnitud constante

$$h = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L}$$



llamada *función energía*. Entonces el teorema de conservación de la energía queda

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \sum_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - \mathcal{L} = cte$$

Más adelante veremos que esta magnitud da lugar a la función hamiltoniana. Además, en los sistemas llamados *naturales* (holónomos, esclerónomos y conservativos) la función energía coincide con la energía mecánica del sistema $h = T + V = E$. Otra forma de saber cuando h coincide con $T + V$ es comprobando que la energía cinética es una función cuadrática de las velocidades y el potencial depende únicamente de las coordenadas generalizadas.

Coordenadas cíclicas: son las q_j para las que la lagrangiana depende de su velocidad pero no de la propia coordenada, de manera que la ecuación de Lagrange conduce a la conservación momento conjugado,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = cte$$

La conservación del momento conjugado con una coordenada cíclica puede utilizarse para ilustrar los teoremas de conservación de la cantidad movimiento y del momento cinético.

Homogeneidad del espacio, conservación de la cantidad de movimiento. El teorema de conservación de la cantidad de movimiento en la formulación lagrangiana se expresa: Si el sistema no cambia (y por tanto \mathcal{L} no cambia) al trasladarlo como un todo a lo largo de una dirección \hat{u} , la componente de la cantidad de movimiento total sobre esa dirección se conserva. Para demostrarlo vamos a considerar que existe una coordenada generalizada q_j asociada con el desplazamiento del sistema en la dirección \hat{u} , entonces

$$\vec{r}_\alpha(q_j + dq_j) = \vec{r}_\alpha(q_j) + dq_j \hat{u}$$

de manera que

$$\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \hat{u}$$

Si el sistema no cambia al hacer esa traslación, la coordenada q_j sería cíclica por lo que se conserva el momento conjugado

$$p_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} = cte = \sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_\alpha} \frac{\partial \vec{v}_\alpha}{\partial \dot{q}_j} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \vec{P}_{\text{tot}} \cdot \hat{u}$$

Nótese que la fuerza generalizada asociada con una coordenada de este tipo es la componente de la fuerza en la dirección \hat{u} ,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = -\sum_\alpha \frac{\partial V}{\partial \vec{r}_\alpha} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \cdot \hat{u}$$

Isotropía del espacio, conservación del momento cinético. El teorema de conservación del momento cinético en la formulación lagrangiana dice: si el sistema no cambia (y por tanto \mathcal{L} no cambia) al efectuar una rotación del sistema como un todo alrededor de un eje e , el momento cinético total respecto de ese eje se conserva. Ahora consideraremos que existe una coordenada generalizada q_j asociada con la rotación del sistema alrededor de un eje e , entonces tomando como origen un punto del eje,

$$\vec{r}_\alpha(q_j + dq_j) = \vec{r}_\alpha(q_j) + dq_j \hat{e} \times \vec{r}_\alpha$$

de manera que

$$\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} = \hat{e} \times \vec{r}_\alpha$$

Procediendo de forma similar al caso anterior,

$$p_j = cte = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} \cdot (\hat{e} \times \vec{r}_{\alpha}) = \hat{e} \cdot \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{v}_{\alpha}) = \hat{e} \cdot \vec{M}_{\text{tot}}$$

Análogamente la fuerza generalizada asociada con una coordenada de este tipo es el momento de la fuerza respecto del eje e ,

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} \cdot (\hat{e} \times \vec{r}_{\alpha}) = \hat{e} \cdot \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha} = \hat{e} \cdot \vec{N} = N_e$$

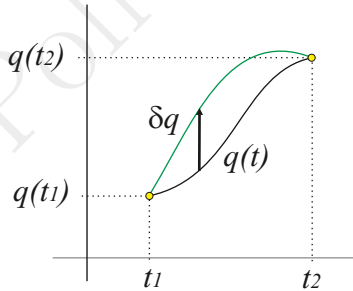
14.5. Principio variacional de Hamilton. Aplicación a la derivación de las ecuaciones de Lagrange.

Como las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtuvieron a partir de las ecuaciones de Newton pueden parecer un caso particular de estas, todo lo contrario, en realidad la formulación lagrangiana permite una mayor generalidad y es posible deducir todas las leyes de la mecánica a partir de un único principio, que sustituiría a las leyes de Newton, y que hace posible su aplicación incluso a sistemas no mecánicos.

Principio de Hamilton: Todo sistema mecánico está caracterizado por una función lagrangiana $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. El movimiento del sistema es tal que entre dos instantes de tiempo $t = t_1$ y $t = t_2$ sigue la trayectoria que hace extremal (máxima o mínima) la integral,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (14.31)$$

Es decir, de todas las trayectorias posibles entre dos estados del sistema, $q(t_1)$ y $q(t_2)$, la que se sigue es la que hace extremo la integral de la magnitud S que recibe el nombre de *acción*⁶.



Las ecuaciones de Lagrange pueden obtenerse del principio de Hamilton utilizando el *cálculo variacional*. Se trata de elegir el camino que hace extremo la integral y para ello la variación de un camino a otro debe ser cero. Considerando por simplicidad que hay una única coordenada q , si cambiamos la función $q(t)$ por $q(t) + \delta q(t)$ el cambio en la acción será,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

si δq es infinitesimal en todo el intervalo $t \in [t_1, t_2]$,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt$$

como $\delta \dot{q} = d(\delta q)/dt$, integrando por partes el segundo término,

$$\delta S = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt$$

⁶El extremo es realmente un mínimo ya que el máximo es infinito. Por ese motivo el principio de Hamilton también se conoce por principio de mínima acción



y como la posición inicial y final son fijas, $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, el primer término es cero. El camino que hace extremal la acción cumple que $\delta S = 0$, $\forall \delta q$ por lo que el integrando debe ser cero,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

que es la ecuación de Lagrange. Este cálculo puede generalizarse al caso de que existan varias coordenadas.

La integral de la acción muestra claramente el origen de la invariancia Gauge que vimos al escribir las lagrangianas que conducen a las mismas ecuaciones del movimiento, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{d}{dt} [f(q, t)]$, conducen al mismo extremo de la integral de la acción.

Aunque hemos supuesto que se trata de un sistema holónomo y conservativo, es posible extender el principio de Hamilton a sistemas no conservativos (utilizando el trabajo no conservativo en lugar del potencial) y no holónomos (método de los multiplicadores u otros).

Este tipo de principios integrales (en lugar de las ecuaciones diferenciales de las leyes de Newton) se aplican en distintas partes de la física y junto con el cálculo de variaciones tienen interés para resolver distintos problemas dentro de la ingeniería ya que son una generalización del principio del trabajo virtual.

14.6. Función hamiltoniana.

En la mecánica analítica existe una formulación alternativa a la formulación lagrangiana en la que en lugar de utilizar las coordenadas generalizadas y sus velocidades se utilizan las coordenadas y los momentos conjugados. Esto permite expresar las ecuaciones del movimiento de forma más sencilla y utilizar cambios de variables mucho más generales en los que se mezclan coordenadas y momentos conjugados. Estos cambios se utilizan para obtener constantes de movimiento con las que facilitar la integración del movimiento. También facilitan el estudio de la estabilidad y permiten profundizar y extender la mecánica clásica a otros sistemas más complejos.

Para sustituir en \mathcal{L} las velocidades \dot{q}_j por los momentos conjugados $p_j = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{q}_j$ de manera que no se pierda información debe aplicarse la *transformada de Legendre*⁷,

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \quad \rightarrow \quad \mathcal{H}(q_j, p_j, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}$$

donde $\mathcal{H}(q_j, p_j, t)$ se conoce por función *hamiltoniana* del sistema, y, al igual que la lagrangiana, contiene toda la información del sistema.

14.7. Ecuaciones de Hamilton.

Derivando $\mathcal{H}(q_j, p_j, t)$ se obtienen las ecuaciones del movimiento,

$$d\mathcal{H} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} dp_j \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt$$

por otro lado

$$d\mathcal{H} = d \left(\sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j, t) \right) = \sum_j (\dot{q}_j dp_j + p_j d\dot{q}_j) - \left\{ \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right\}$$

sustituyendo la definición de momento conjugados y las ecuaciones de Lagrange,

$$d\mathcal{H} = \sum_j [-\dot{p}_j dq_j + \dot{q}_j dp_j] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt$$

⁷Es la misma transformación que se utiliza en la termodinámica para cambiar de un potencial termodinámico a otro, por ejemplo, de la energía interna U a la entalpía, $H = U + pV$ donde $p = -\partial U / \partial V$.

y entonces,

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{cases}, \quad j = 1 \dots s \quad (14.32)$$

las dos primeras son las ecuaciones del movimiento del momento conjugado p_j y de la coordenada q_j y se denominan *ecuaciones de Hamilton* o *ecuaciones canónicas*.

Propiedades del hamiltoniano

- La derivada total de \mathcal{H} respecto del tiempo coincide con la derivada parcial,

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \sum_j \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j \right] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \sum_j [-\dot{p}_j \dot{q}_j + \dot{q}_j \dot{p}_j] + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

de modo que si \mathcal{H} no depende explícitamente del tiempo, entonces su derivada temporal es cero y se el teorema de conservación de la energía, $\mathcal{H} = cte$.

- La diferencia entre la función energía h y el hamiltoniano \mathcal{H} es que esta última tiene que expresarse en función de las coordenadas y de los momentos conjugados y no pueden aparecer las velocidades.
- Aplicando de nuevo la transformación de Legendre se recupera la función lagrangiana,

$$\mathcal{H}(q_j, p_j, t) \longrightarrow \sum_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \dot{p}_j - \mathcal{H} = \sum_j \dot{q}_j \dot{p}_j - \mathcal{H} = \mathcal{L}$$

14.8. Eliminación de coordenadas cíclicas. Función de Routh.

Como ya hemos visto, las coordenadas cíclicas conducen a una ecuación del movimiento que se expresa mediante la constancia de su momento conjugado. En la función lagrangiana no aparecen las coordenadas cíclicas pero sí sus derivadas, mientras que en la formulación hamiltoniana en lugar de las velocidades aparecerían los momentos conjugados siendo constantes los que corresponden a las coordenadas cíclicas. Así, en la formulación hamiltoniana las velocidades de las coordenadas cíclicas son sustituidas por constantes y es como si el problema tuviese menos grados de libertad. Existe también la posibilidad de aplicar la transformación solamente a las coordenadas cíclicas y dejan sin transformar las no cíclicas. La función que se obtiene de esa manera se denomina *función de Routh* y se comporta como una lagrangiana para las coordenadas no cíclicas y como una hamiltoniana para las cíclicas,

Si consideramos que las coordenadas cíclicas son q_1, \dots, q_n y las no cíclicas q_{n+1}, \dots, q_s , entonces,

$$\mathcal{R}(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s, \dot{q}_{n+1}, \dots, \dot{q}_s, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$$

y se cumple

$$\begin{aligned} \text{Coordenadas Cíclicas } (j = 1, \dots, n) : & \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = 0 \Rightarrow p_j = cte \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial p_j} = \dot{q}_j \end{cases} \\ \text{Coordenadas No Cíclicas } (j = n + 1, \dots, s) : & \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \end{cases} \quad \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0 \end{aligned}$$



además de

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

Como los momentos conjugados de las coordenadas cíclicas son constantes, un método para resolver el movimiento de un sistema consiste en combinar las coordenadas para generar coordenadas cíclicas.

Escuela Politécnica Superior

15. Trompo de Lagrange

- 15.1 Movimiento de un sólido pesado alrededor de un punto fijo. Trompo de Lagrange.
- 15.2 Ecuaciones de Lagrange.
- 15.3 Problema unidimensional equivalente.
- 15.4 Clasificación de los movimientos.
- 15.5 Función de Hamilton y función de Routh.
- 15.6 Ecuación del movimiento de nutación.
- 15.7 Condición de precesión estacionaria.

15.1. Movimiento de un sólido pesado alrededor de un punto fijo. Trompo de Lagrange

El movimiento esférico de un cuerpo sometido al par de su peso no es en general un problema integrable. Existen solamente unos casos especiales en los que puede obtenerse la solución con ayuda de ciertas constantes del movimiento asociadas a sus simetrías.

El caso que estudiaremos se conoce por *trompo de Lagrange* y consiste en un sólido con simetría de revolución que se mueve bajo el par de su propio peso alrededor de un punto fijo O , de su eje de simetría, que no coincida con G . Si G coincide con O tendríamos el movimiento por inercia ya estudiado y que se conoce también por *trompo de Euler*.

El trompo de Lagrange es también un buen ejemplo de la aplicación de las ecuaciones de la mecánica analítica y por ello las aplicaremos al máximo de manera que podamos ver su potencialidad.

Las dos hipótesis que simplifican el problema son:

1. Sólido con simetría de revolución.
 - a) El eje de simetría es principal y cualesquiera dos ejes perpendiculares también son principales y sus momentos de inercia iguales.
 - b) El centro de masas G está sobre el eje de simetría.
2. El punto fijo pertenece al eje de simetría.

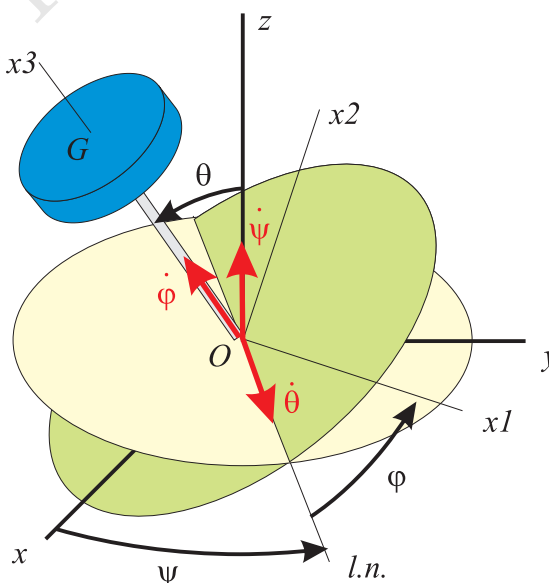


Figura 1: Trompo de Lagrange con los ángulos y las rotaciones de Euler.

Estas simetrías hacen que el sistema no cambie si lo giramos alrededor del eje de simetría del cuerpo o alrededor de la vertical. Tomando un sistema de referencia fijo, $Oxyz$ con el eje Oz vertical y un sistema móvil $Ox_1x_2x_3$ tal que Ox_3 coincida con el eje de simetría del trompo, se tiene que $I_1 = I_2 \neq I_3$.

Expresando la orientación del sólido mediante los ángulos de Euler (ψ, θ, φ) la rotación $\vec{\omega}$ en función de las rotaciones de Euler queda

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{k} + \dot{\theta} \hat{u}_n + \dot{\varphi} \hat{u}_3$$

15.2. Ecuaciones de Lagrange

Las simetría del problema para el eje Oz hace que la coordenada ψ (ángulo de precesión) sea cíclica, y lo mismo ocurre con el eje del trompo Ox_3 y la coordenada φ (ángulo de rotación propia). Para la última coordenada θ (ángulo de nutación) no hay ninguna simetría pero puede integrarse utilizando la conservación de la energía que está asociada a que el problema no depende de la elección del origen de tiempos. Obtendremos el valor de las tres constantes a partir de la función lagrangiana.

Como es un sólido con un punto fijo y la única fuerza que trabaja es el peso,

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} \vec{\omega} \mathbf{I}^O \vec{\omega} - m g z_G = \frac{1}{2} [I_1 (\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3 \omega_3^2] - m g z_G$$

utilizando como coordenadas los ángulos de Euler, y llamado $\ell = \overline{OG}$ a la distancia entre el centro de masas y el punto fijo,

$$z_G = \ell \cos \theta$$

y las componentes del vector rotación en ejes principales

$$\vec{\omega} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})$$

de manera que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 \right] - m g \ell \cos \theta$$

Vemos pues que las coordenadas ψ y φ son cíclicas y las constantes del movimiento asociadas son las componentes del momento cinético según los ejes Oz y Ox_3 respectivamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0 &\Rightarrow p_\psi = I_1 \dot{\psi} \sin^2 \theta + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) \cos \theta = cte = L_z \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 &\Rightarrow p_\varphi = I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = cte = L_3 \end{aligned}$$

La tercera constante del movimiento es del tipo energía (el lagrangiano no depende explícitamente del tiempo) que en este caso coincide con la suma de la energía cinética y el potencial porque es un sistema natural (holónomo y esclerónomo),

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow h = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L} = cte = T + V = E$$

donde

$$E = \frac{1}{2} \left[I_1 (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi})^2 \right] + m g \ell \cos \theta$$

15.3. Problema unidimensional equivalente

Las constantes del movimiento asociadas a las coordenadas cíclicas nos permiten eliminarlas de la expresión de la energía y obtener una ecuación en la que solamente aparecen la coordenada no cíclica (ángulo de nutación) y constantes. Despejando la velocidad podremos reducir el problema a una integración, veámoslo.

Para despejar la velocidades de precesión y rotación propia de las constantes L_z y L_3 nos fijamos en que $(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}) = \omega_3 = L_3 / I_3$, por tanto,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} = \dot{\psi}(\theta) \\ \dot{\varphi} &= \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta = \dot{\varphi}(\theta) \end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión de la energía

$$E = T + V = cte = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mgl \cos \theta + \frac{L_3^2}{2I_3}$$

Así, definiendo el potencial efectivo:

$$V_{ef}(\theta) = mgl \cos \theta + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta}$$

y eliminado el término constante de la energía mediante un cambio de origen,

$$E' = E - \frac{L_3^2}{2I_3} = cte = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}^2 + V_{ef}(\theta)$$

se tiene,

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{I_1}(E' - V_{ef})} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow t = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{I_1}[E' - V_{ef}(\theta)]}}$$

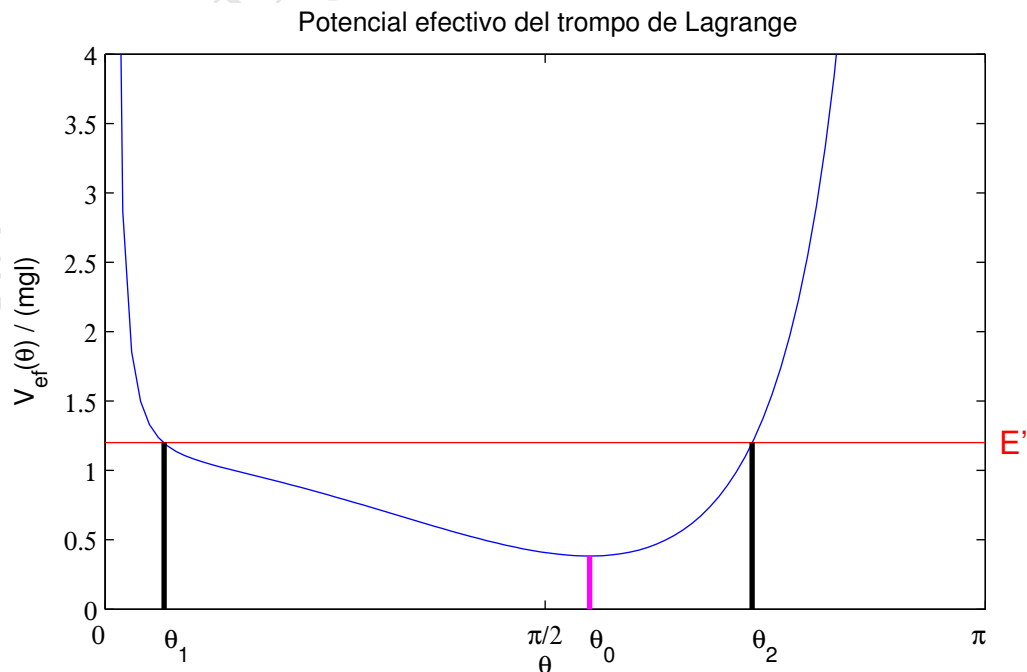
que conduce a una integral elíptica.

La solución para el movimiento de nutación $\theta = \theta(t)$ permite obtener las rotaciones de Euler $\dot{\psi}(t)$ y $\dot{\varphi}(t)$ que nuevamente integradas permiten obtener $\psi(t)$ y $\varphi(t)$ con lo que el problema dinámico estaría formalmente resuelto.

15.4. Clasificación de los movimientos

Se pueden obtener las características más relevantes del movimiento sin necesidad de realizar las integraciones, analizando el potencial efectivo.

Para $L_z \neq L_3$ el potencial efectivo tiene dos asíntotas verticales en $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ y un mínimo en $\theta = \theta_0$.



Si la energía coincide con el mínimo del potencial efectivo $E' = V_{ef}(\theta_0)$, se tiene que el ángulo de nutación es constante y con él la rotación propia y la rotación de precesión. El movimiento consiste en una precesión uniforme del eje del trompo que describe un cono circular. Este caso se conoce por *precesión estacionaria* y volveremos sobre él más adelante.

Para $E' > V_{\text{ef}}(\theta_0)$, la ecuación $E' = V_{\text{ef}}(\theta)$ tiene dos raíces θ_1 y θ_2 que limitan la inclinación del eje de simetría con la vertical,

$$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

estos puntos de retroceso se llaman *ángulos absidales*. Se tiene para la coordenada θ un movimiento unidimensional y acotado y por lo tanto periódico. Si el ángulo θ oscila, también lo hará la precesión que además puede cambiar de signo cuando

$$\theta = \theta_3 = \arccos \frac{L_z}{L_3} \quad \text{y} \quad \theta_1 \leq \theta_3 < \theta_2$$

Se suele representar el movimiento trazando la curva que describe la intersección del eje del trompo con una esfera de radio unidad centrada en el punto fijo O , como se muestra en la figura 2.

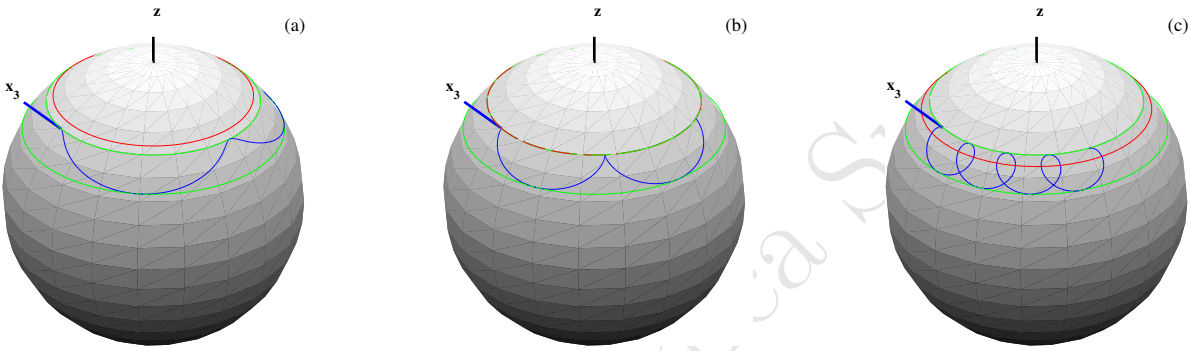


Figura 2: Representación de diferentes movimientos del trompo: (a) $\theta_3 < \theta_1$, (b) $\theta_3 = \theta_1$ y (c) $\theta_1 < \theta_3 < \theta_2$

En el caso (a) el ángulo al que se anula la precesión (línea roja) está fuera de la región en la que se realiza el movimiento (entre las líneas verdes) y por tanto la precesión nunca cambia de signo, aumenta y disminuye pero sin llegar a anularse. En el caso (b) la precesión se anula en el valor absidal menor y aparecen las cúspides. En el caso (c) el valor al que se anula la precesión está dentro de la región en la que se realiza el movimiento dando lugar a dos zonas una con precesión negativa y otra con precesión positiva. La trayectoria sobre la esfera realiza unos rizos pero con un valor neto distinto de cero lo que hace que el eje del trompo termine girando alrededor de la vertical.

15.5. Función de Hamilton y función de Routh

Para eliminar las coordenadas cíclicas podríamos haber usado tanto la función de Hamilton como la función de Routh. Así para la primera tenemos que la coordenada no cíclica,

$$p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta}$$

y entonces, para obtener la función de Hamilton tenemos que sustituir las velocidades por sus momentos conjugados en la función energía $h = T + V$,

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \\ \dot{\phi} &= \frac{L_3}{I_3} - \frac{L_z - L_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta \\ \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{I_1} \end{aligned}$$

de manera que se obtiene

$$\mathcal{H} = \frac{p_\theta^2}{2 I_1} + \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)^2}{2 I_1 \sin^2 \theta} + \frac{L_3^2}{2 I_3} + m g \ell \cos \theta = \frac{p_\theta^2}{2 I_1} + \frac{L_3^2}{2 I_3} + V_{\text{ef}}(\theta)$$



cuyo valor permanece constante, $\mathcal{H} = cte = E$, y permite integrar el movimiento.

De forma similar, la función de Routh sería,

$$\mathcal{R} = p_\psi \dot{\psi} + p_\varphi \dot{\varphi} - \mathcal{L} = I_1 \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta + I_3 \left(\dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \right)^2 - \mathcal{L} = -\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{L_3^2}{2 I_3} + V_{\text{ef}}(\theta)$$

Prescindiendo del término constante $L_3^2/(2I_3)$ que puede ser añadido al potencial efectivo, la diferencia entre la función de Hamilton y la de Routh es el signo de la energía cinética de la coordenada de nutación, positiva para la de Hamilton (como corresponde a $\mathcal{H} = T + V$) y negativa para la función de Routh (que es una lagrangiana para la coordenada no cíclica).

15.6. Ecuación del movimiento de nutación

Las ecuaciones canónicas para la coordenada no cíclica serían,

$$\begin{aligned} \dot{p}_\theta &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = -\frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta} = m g \ell \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)(L_3 - L_z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} \\ \dot{\theta} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{I_1} \end{aligned}$$

que conducirían a la ecuación del movimiento de nutación,

$$I_1 \ddot{\theta} = m g \ell \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)(L_3 - L_z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} \quad (15.33)$$

Esta misma ecuación se obtiene con la función de Routh,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \theta} = 0 = \frac{d}{dt} (-I_1 \dot{\theta}) - \frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta}$$

de donde

$$I_1 \ddot{\theta} = -\frac{dV_{\text{ef}}}{d\theta} = m g \ell \sin \theta - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta)(L_3 - L_z \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta}$$

Para estudiar el movimiento de nutación se suele hacer el cambio de variable $u \equiv \cos \theta$ (como $\theta \in [0, \pi]$, $u \in [-1, +1]$) y se definen las constantes $a = L_z/I_1$, $b = L_3/I_1$, $\alpha = 2E'/I_1$ y $\beta = 2mg\ell/I_1$ de manera que la ecuación diferencial del movimiento de nutación queda,

$$\ddot{u} (1 - u^2) + u \dot{u}^2 + \frac{\beta}{2} (1 - u^2)^2 - (b - a u)(a - b u) = 0$$

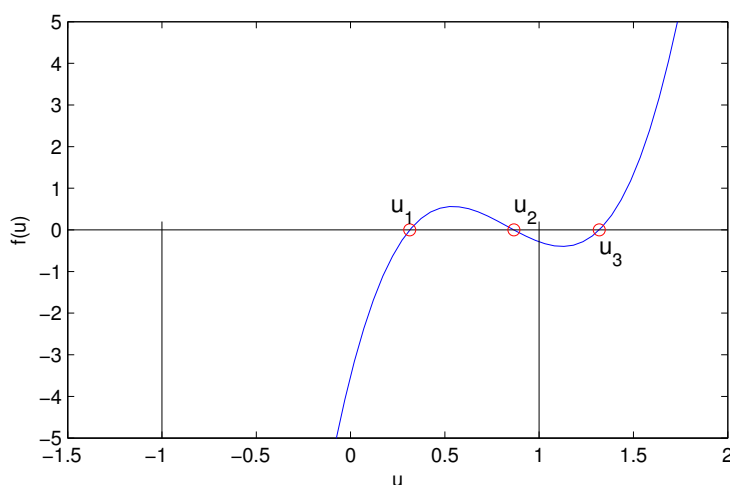
Podemos reducir un orden la ecuación diferencial si utilizamos el problema unidimensional equivalente sustituyendo el ángulo de nutación por la variable u ,

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{\text{ef}}(\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta} \frac{\dot{u}^2}{1 - u^2} + u + \frac{(a - b u)^2}{\beta (1 - u^2)}$$

que puede escribirse como $\dot{u}^2 = f(u)$ donde

$$f(u) = (\alpha - \beta u)(1 - u^2) - (a - b u)^2$$

que es un polinomio cúbico en el que una de las raíces, u_3 , es siempre mayor que +1. Las otras dos raíces son reales y definen los puntos de retroceso ($u_1 = \cos \theta_2$ y $u_2 = \cos \theta_1$).

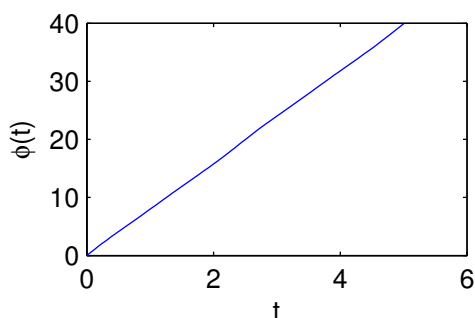
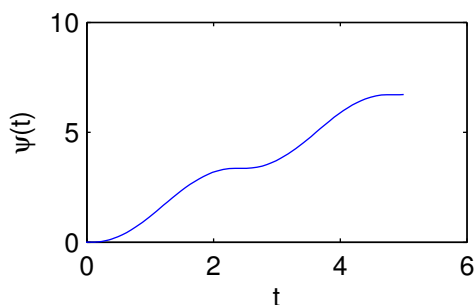
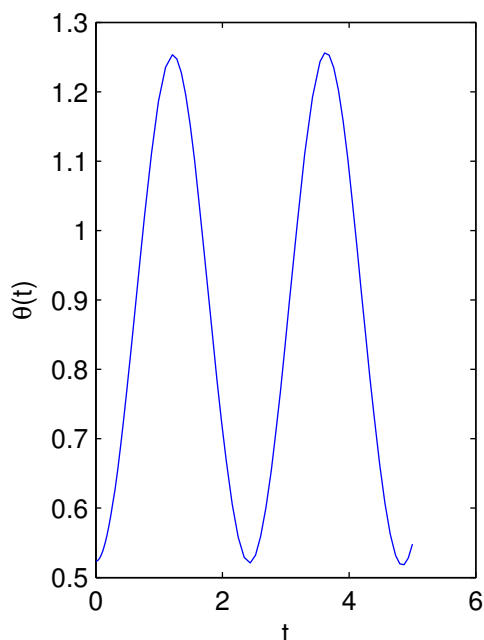


La solución del movimiento se obtendría de la integral

$$t = \int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$$

y conocida la solución $u(t) = \cos(\theta(t))$ se pueden integrar los otros dos ángulos,

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{a - bu}{1 - u^2} \quad \text{y} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{I_1}{I_3} a - \frac{a - bu}{1 - u^2} u$$



15.7. Condición de precesión estacionaria

Determinaremos ahora las condiciones en que se da el movimiento de precesión estacionaria. Se llama así al caso en el que el trompo se mueve manteniendo el ángulo de nutación constante de manera que las rotaciones de precesión y rotación propia son también uniformes. Para que esto ocurra la energía debe coincidir con el mínimo del potencial efectivo y por tanto, $\theta = \theta_0$, donde

$$\left. \frac{dV_{ef}}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\ell \sin \theta_0 - \frac{(L_z - L_3 \cos \theta_0)(L_3 - L_z \cos \theta_0)}{I_1 \sin^3 \theta_0} = 0$$



Sustituyendo las constantes del movimiento por su relación con los ángulos de Euler, se obtiene,

$$\left\{ (I_1 - I_3) \dot{\psi}^2 \cos \theta_0 - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} + m g \ell \right\} \sin \theta_0 = 0$$

Olvidándonos de los casos en los que el trompo está en equilibrio vertical ($\theta = 0$ ó $\theta = \pi$), la condición de precesión estacionaria

$$(I_1 - I_3) \cos \theta_0 \dot{\psi}^2 - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} + m g \ell = 0$$

es una ecuación de segundo grado en la precesión y tendrá dos soluciones,

$$\dot{\psi} = \frac{I_3 \dot{\phi} \pm \sqrt{(I_3 \dot{\phi})^2 - 4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0}}{2 (I_1 - I_3) \cos \theta_0}$$

siempre que se cumpla

$$\dot{\phi}^2 \geq \frac{4 m g \ell (I_1 - I_3) \cos \theta_0}{I_3^2}$$

Escuela Politécnica Superior



16. Pequeñas oscilaciones alrededor del equilibrio

- 16.1 Pequeñas oscilaciones alrededor de posiciones de equilibrio.
- 16.2 Determinación de frecuencias naturales de oscilación.
- 16.3 Caracterización del movimiento según los distintos modos de oscilación. Estabilidad del movimiento.
- 16.4 Respuesta temporal del sistema ante fuerzas aplicadas. Vibraciones en máquinas como oscilaciones forzadas.

Las pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio son uno de los ejemplos más bellos de la potencia de los métodos analíticos de la mecánica, a la vez que sirven de base para el estudio de otros problemas de gran importancia como la Física del Estado Sólido, Vibraciones Mecánicas, Estabilidad de Estructuras, Circuitos Eléctricos Acoplados, etc.

16.1. Pequeñas oscilaciones alrededor de posiciones de equilibrio.

Las oscilaciones de cualquier sistema por complejo que sea pueden estudiarse siguiendo un procedimiento general que surge de la simplificación de que los movimientos sean pequeños. Para mayor claridad aplicaremos el método primero a un sistema con 1 grado de libertad y luego lo extenderemos a sistemas con N grados de libertad.

Oscilaciones libres en un sistema con 1 grado de libertad.

Consideremos un sistema conservativo, holónomo y esclerónomo cuya posición viene determinada por una única coordenada q . Si el potencial $V = V(q)$ tiene un mínimo en $q = q_0$ se cumple,

$$\left(\frac{dV}{dq}\right)_{q_0} = 0$$

$$\left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)_{q_0} > 0$$

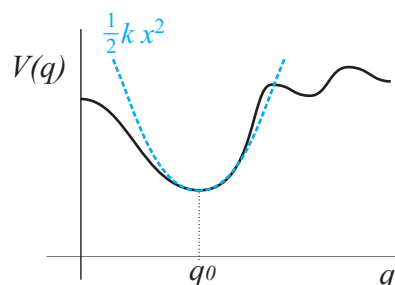
de manera que para posiciones próximas al equilibrio $q = q_0$ podemos desarrollar el potencial en serie de potencias,

$$V(q) = V(q_0) + \left(\frac{dV}{dq}\right)_{q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dq^2}\right)_{q_0} (q - q_0)^2 + \dots \approx Cte + \frac{1}{2}k (q - q_0)^2$$

siendo $k = (d^2V/dq^2)_{q_0}$ una constante positiva. Utilizando como coordenada el desplazamiento desde la posición de equilibrio, $x \equiv q - q_0$, el potencial quedaría

$$V(x) \approx \frac{1}{2}k x^2$$

que tiene la misma forma que el potencial elástico de un muelle de rigidez k siendo x el alargamiento. Desde el punto de vista del potencial lo que estamos haciendo es aproximarlos alrededor del mínimo por una parábola con la misma curvatura.



La energía cinética también se expresa en función de q y su derivada ya que para cualquier partícula del sistema $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q)$ y entonces

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q} \right)^2 \dot{q}^2 = \frac{1}{2} f(q) \dot{q}^2$$

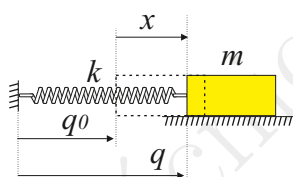
es una función cuadrática de la derivada de la coordenada. Para valores próximos a la posición de equilibrio podemos aproximar $f(q) \approx f(q_0)$ que es una constante positiva ya que $T > 0$ si $\dot{q} \neq 0$. Llamando $m \equiv f(q_0)$ y teniendo en cuenta que $\dot{x} = \dot{q}$,

$$T \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

El lagrangiano del sistema se aproximaría por

$$\mathcal{L} = T - V \approx \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2$$

que tiene la misma forma que el de una masa m moviéndose sobre una línea recta y unida a un muelle de rigidez k , siendo x la separación desde la posición de equilibrio, es decir, el lagrangiano de un oscilador armónico.



La ecuación del movimiento será,

$$m \ddot{x} + k x = 0$$

y su solución

$$x(t) = q(t) - q_0 = A \cos(\omega t + \delta)$$

donde $\omega = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia de las oscilaciones, A la amplitud y δ la fase inicial. Nótese que A y δ dependen de las condiciones iniciales ($x(0) = A \cos \delta$, $\dot{x}(0) = -A\omega \sin \delta$) mientras que ω no y su valor depende de las propiedades del sistema. Además como k y m son positivas ω es siempre un número real.

Si tomamos como ejemplo el péndulo formado por una masa puntual,

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + m g \ell \cos \theta$$

el potencial tiene un mínimo para $\theta_0 = 0$ y la segunda derivada en el equilibrio nos daría la constante

$$k_{\text{eq}} = \left(\frac{d^2 V}{d\theta^2} \right)_{\theta_0} = m g \ell \cos \theta_0 = m g \ell$$

De forma similar para la energía cinética

$$m_{\text{eq}} = \left(\frac{d^2 T}{d\dot{\theta}^2} \right)_{\theta_0} = m \ell^2$$

de manera que la frecuencia propia resulta

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{\text{eq}}}{m_{\text{eq}}}} = \sqrt{\frac{m g \ell}{m \ell^2}} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

que coincide con el valor que obtuvimos en la aproximación de ángulos pequeños.

**16.1.1. Oscilaciones libres en un sistema con N grado de libertad.**

Extenderemos el proceso anterior para un sistema conservativo, holónomo y esclerónomo con N grados de libertad, q_1, \dots, q_N . En la posición de equilibrio el potencial es estacionario:

$$V(q_1, \dots, q_N) \Rightarrow Q_i = - \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_0, i = 1, \dots, N$$

Desarrollando el potencial alrededor del equilibrio se tiene una constante, el término lineal sería nulo y el primer término significativo sería el cuadrático,

$$V(q_1, \dots, q_N) = V_0 + 0 + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N k_{ij} (q_i - q_i^0) (q_j - q_j^0) + \dots$$

siendo

$$k_{ij} = \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right)_0$$

Utilizando los desplazamientos desde el equilibrio $x_i = q_i - q_i^0$, entonces:

$$V(x_1, \dots, x_N) \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j$$

donde ya hemos prescindido de la constante V_0 que no tiene ningún efecto. El potencial se convierte en una forma cuadrática cuya matriz de coeficientes es simétrica. Si la posición de equilibrio es estable, el potencial debe tener un mínimo lo cual hace que la forma cuadrática sea definida positiva.

Nota. La condición que debe cumplir la matriz k_{ij} para que la forma cuadrática sea definida positiva es que todos los menores principales tienen determinante positivo,

$$|k_{11}| > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} k_{11} & \dots & k_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ k_{N1} & \dots & k_{NN} \end{vmatrix} > 0$$

Para determinar el movimiento será necesario conocer además la energía cinética. Considerando otra vez la situación más sencilla que es el sistema llamado “natural” (holónomo y esclerónomo):

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_N) \Rightarrow \vec{v}_\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt}$$

La energía será en este caso una función cuadrática de las velocidades,

$$T \equiv \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{ij} f_{ij}(q_1, \dots, q_N) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

siendo las funciones

$$f_{ij}(q_1, \dots, q_N) = \sum_{\alpha} \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} = f_{ji}$$

En la aproximación de pequeños movimientos puede considerarse que estas funciones no varían apreciablemente de su valor en el equilibrio y escribirse:

$$T \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

siendo $m_{ij} = m_{ji} = f_{ij}(q_1^0, \dots, q_N^0)$.

La energía cinética es también una función cuadrática dada por una matriz simétrica que además es definida positiva (la energía cinética siempre es positiva).

Podemos escribir la función lagrangiana como diferencia de dos formas cuadráticas:

$$\mathcal{L} = T - V \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j \quad (16.34)$$

o en forma matricial

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\dot{x}_1 \quad \cdots \quad \dot{x}_N] \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} - \frac{1}{2} [x_1 \quad \cdots \quad x_N] \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}$$

La ecuación del movimiento de la coordenada genérica x_i será:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j = 0$$

donde ya hemos utilizado que las matrices son simétricas.

Se observa claramente que los elementos no diagonales hacen que en la ecuación de la coordenada x_i aparezcan los desplazamientos de todas las coordenadas x_j y sus aceleraciones \ddot{x}_j . El efecto de estos términos es que el movimiento de una coordenada influyen los de todas las demás, se dice que las oscilaciones están acopladas. Por ello ha de esperarse que el movimiento se realice también de forma colectiva.

Escribiendo de forma conjunta todas las ecuaciones del movimiento tenemos:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.35)$$

lo que constituye un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineal, de coeficientes constantes y homogéneo.

16.2. Determinación de frecuencias naturales de oscilación.

Las soluciones de la ecuación 16.35 han de describir un movimiento del sistema de forma colectiva lo que puede obtenerse utilizando la misma dependencia temporal para todas las coordenadas pero con diferentes amplitudes y fases:

$$x_j = a_j e^{i\omega t} \quad (16.36)$$

con a_j constantes complejas. En forma matricial:

$$X = A e^{i\omega t}$$

Introduciendo esta función en la ecuación del movimiento del sistema se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\{\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\} A = 0 \quad (16.37)$$

que constituye un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones (problema de valores propios). Se sabe de Álgebra Lineal que para que exista solución no trivial el determinante de la matriz de coeficientes ha de ser nulo:

$$\det \{\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}\} = \begin{vmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & \cdots & k_{1N} - \omega^2 m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} - \omega^2 m_{NN} \end{vmatrix} = 0 \quad (16.38)$$

es la llamada *ecuación característica o secular*. Esta última ecuación conduce a un polinomio de grado N en ω^2 que tendrá, en principio, N raíces diferentes

$$\{\omega_\lambda^2; \lambda = 1 \dots N\}$$



que se denominan *frecuencias naturales o propias* del sistema y que dependen únicamente de los coeficientes k_{ij} y m_{ij} . Estas frecuencias naturales son características del sistema y constituyen los únicos valores para los que existe una solución armónica del tipo (16.36) alrededor de la posición de equilibrio.

Se puede demostrar (véase Apéndice al final de este tema) que en el problema de valores propios (16.37) todos los autovalores son reales cuando las matrices \mathbf{K} y \mathbf{M} son hermíticas, es decir, coinciden con su transpuesta conjugada. También es fácil comprobar que si las dos formas cuadráticas son definidas positivas los autovalores serán además positivos.

En el caso que estamos considerando las matrices son reales y simétricas y por tanto hermíticas. La energía cinética es una magnitud siempre positiva y por ello la forma cuadrática correspondiente es definida positiva. Para que el potencial sea definido positivo lo que tiene que ocurrir es que debe aumentar para cualquier valor del desplazamiento alrededor del equilibrio y esto sucede cuando el potencial es un mínimo. Por tanto podemos establecer que:

$$\text{Holónomo y Esclerónomo} + \text{Posición de Equilibrio Estable} \Rightarrow \omega_\lambda^2 > 0 \quad \lambda = 1 \dots N$$

16.3. Caracterización del movimiento según los distintos modos de oscilación. Estabilidad del movimiento.

Para cada una de las frecuencias naturales ω_λ puede resolverse el sistema lineal de ecuaciones (16.37), que ya no serán todas independientes, para determinar, por ejemplo, las relaciones entre la primera y el resto de las amplitudes:

$$a_{i\lambda} = a_{i\lambda}(a_{1\lambda}) ; i = 2 \dots N$$

Esas relaciones serán reales ya que los coeficientes del sistema (16.37) son reales y por ello las amplitudes pueden tomarse todas reales (véase Apéndice). La indeterminación planteada permite exigir una condición adicional de normalización:

$$\mathbf{A}_\lambda^t \mathbf{M} \mathbf{A}_\lambda = \mathbf{1}$$

Se obtienen por tanto N soluciones independientes del sistema, correspondientes a los N valores de las frecuencias naturales ω_λ . La solución general será la combinación lineal de estas:

$$X = \sum_{\lambda=1}^N C_\lambda A_\lambda e^{i\omega_\lambda t}$$

siendo C_λ constantes complejas. Tomando la parte real se obtiene:

$$X = \sum_{\lambda=1}^N A_\lambda \zeta_\lambda(t) \tag{16.39}$$

donde

$$\zeta_\lambda(t) = \text{Re}(C_\lambda e^{i\omega t}) = b_\lambda \cos(\omega_\lambda t + \delta_\lambda)$$

La solución general (16.39) del sistema (16.35) consiste en la superposición de N movimientos armónicos independientes, ζ_λ , con amplitudes (b_λ) y fases (δ_λ) arbitrarias pero con frecuencias totalmente determinadas que son precisamente cada una de las frecuencias naturales del sistema, ω_λ . A estas oscilaciones que representan los N movimientos diferentes que realiza el sistema se les llama *modos normales*.

La relación (16.39) entre los modos normales y los desplazamientos puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_N \end{bmatrix}$$

que es formalmente idéntica a la de una transformación de coordenadas, donde los desplazamientos desde el equilibrio x_j vienen dados en función de N nuevas cantidades, ζ_λ , que reciben el nombre de *coordenadas*

normales. Estas coordenadas normales cumplen una importante propiedad, su ecuación del movimiento es la del oscilador armónico:

$$\ddot{\zeta}_\lambda + \omega_\lambda^2 \zeta_\lambda = 0; \quad \lambda = 1 \dots N$$

y por tanto, utilizando estas nuevas coordenadas el sistema pasa de N osciladores acoplados a N osciladores independientes, cuyas frecuencias son precisamente las frecuencias naturales del sistema:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} (\dot{\zeta}_\lambda^2 - \omega_\lambda^2 \zeta_\lambda^2)$$

Relación entre la estabilidad y las frecuencias propias.

Los modos normales permiten establecer de forma sencilla como el signo de las raíces de la ecuación característica (16.38) es el que determina la estabilidad del movimiento alrededor de la posición de equilibrio:

$$\begin{aligned} \omega_\lambda^2 > 0, \forall \lambda &\Rightarrow \zeta_\lambda = b_\lambda \cos(\omega_\lambda t + \delta_\lambda) && \text{movimiento acotado} &\Rightarrow & \text{ESTABILIDAD} \\ \exists \lambda, \omega_\lambda^2 < 0 &\Rightarrow \zeta_\lambda = b_\lambda e^{p_\lambda t} + c_\lambda e^{-p_\lambda t} && \text{con } p_\lambda = \sqrt{-\omega_\lambda^2} &\Rightarrow & \text{INESTABILIDAD} \\ \exists \lambda, \omega_\lambda^2 = 0 &\Rightarrow \zeta_\lambda = b_\lambda + c_\lambda t && \text{mov. uniforme} &\Rightarrow & \text{INESTABILIDAD} \end{aligned}$$

Oscilaciones libres en presencia de rozamiento.

Podemos ver el efecto de las fuerzas de rozamiento sobre las oscilaciones del sistema alrededor del equilibrio considerando por simplicidad que las fuerzas de rozamiento son del tipo viscoso y pueden caracterizarse por la función de disipación de Rayleigh,

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}(q_1, \dots, q_n) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

que cerca de la posición de equilibrio puede aproximarse por

$$\mathcal{F} \approx \frac{1}{2} \sum_{ij} \alpha_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

Las ecuaciones del movimiento son ahora:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \dot{x}_j + \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j = 0$$

es decir

$$\begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & m_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \vdots \\ \ddot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N} \\ & & \vdots \\ & & \alpha_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16.40)$$

que de nuevo es un sistema lineal homogéneo de ecuaciones diferenciales de segundo orden que admite una solución del tipo armónica (16.36) cuyas amplitudes son la solución del sistema lineal,

$$\{\mathbf{K} + i\omega\boldsymbol{\alpha} - \omega^2\mathbf{M}\} \mathbf{A} = 0 \quad (16.41)$$

y las frecuencias propias son las soluciones de una nueva ecuación secular,

$$\begin{vmatrix} k_{11} + i\omega\alpha_{11} - \omega^2 m_{11} & \cdots & k_{1N} + i\omega\alpha_{1N} - \omega^2 m_{1N} \\ & & \vdots \\ & & k_{NN} + i\omega\alpha_{NN} - \omega^2 m_{NN} \end{vmatrix} = 0 \quad (16.42)$$

cuyas raíces serán en general complejas, $\omega_\lambda = a_\lambda + i b_\lambda$.



Como las fuerzas de rozamiento son disipativas, la energía disminuye con el tiempo

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(T + V)}{dt} = -2\mathcal{F} < 0$$

y por ello la parte imaginaria de las frecuencias es negativa, $b_\lambda < 0$, por lo que los modos serían una oscilación armónica modulada por una exponencial decreciente,

$$\zeta_\lambda = B_\lambda e^{-b_\lambda t} \cos(a_\lambda t + \delta_\lambda)$$

Nótese que hemos tomado para los modos normales el caso subamortiguado porque es el que mantiene las oscilaciones. Si el rozamiento es grande desaparecen las oscilaciones (caso sobreamortiguado) y en medio se encuentra el caso crítico. Evidentemente, al haber varios grados de libertad, se pueden mezclar distintos casos de amortiguamiento en los diferentes modos.

16.4. Respuesta temporal del sistema ante fuerzas aplicadas. Vibraciones en máquinas como oscilaciones forzadas.

Es de enorme importancia el estudio de las pequeñas oscilaciones en presencia de fuerzas externas variables con el tiempo. Se puede obtener una idea del comportamiento general de estos sistemas en la configuración más sencilla. Para ello añadiremos a las ecuaciones (16.40) del movimiento una fuerza variable en cada coordenada,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \boldsymbol{\alpha} \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (16.43)$$

La solución de este sistema no homogéneo será la suma de la solución general de la parte homogénea y una solución particular de la completa:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}^h + \mathbf{X}^{nh}$$

siendo (16.39) la solución general de la homogénea pero con las frecuencias complejas.

Para encontrar la solución particular de la completa es conveniente “cambiar” a las coordenadas normales, así, la ecuación del movimiento será ahora:

$$\ddot{\zeta}_\lambda + \omega_\lambda^2 \zeta_\lambda = Q_\lambda(t); \quad \lambda = 1 \dots N \quad (16.44)$$

siendo Q_λ la fuerza generalizada asociada con la coordenada normal y que se obtiene según la forma habitual:

$$Q_\lambda(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial x_i}{\partial \zeta_\lambda} F_i(t) = \sum_{i=1}^N a_{i\lambda} F_i(t) = [F_1 \quad \dots \quad F_N] \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ & \ddots & \\ & & a_{NN} \end{bmatrix}$$

La variación temporal de estas Q_λ dependerá de la forma de las fuerzas variables. El caso más sencillo corresponde a una dependencia armónica común para todas las fuerzas, $Q_\lambda(t) = Q_\lambda^0 \cos(\omega t + \phi)$, donde ω sería la frecuencia del agente excitador externo.

La solución será también armónica con la misma fase que la fuerza pero con una amplitud dada por la ecuación del movimiento (16.44),

$$\zeta_\lambda^{nh} = \frac{Q_\lambda^0}{\omega_\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \phi)$$

pasando a los desplazamientos

$$x_i^{nh} = \sum_{\lambda=1}^N a_{i\lambda} \frac{Q_\lambda^0}{\omega_\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \phi)$$

y finalmente

$$x_i(t) = \sum_{\lambda=1}^N a_{i\lambda} \zeta_\lambda + \sum_{\lambda=1}^N a_{i\lambda} \frac{Q_\lambda^0}{\omega_\lambda^2 - \omega^2} \cos(\omega t + \phi)$$

En presencia de rozamiento la solución homogénea desaparece rápidamente (transitorio) por lo que a tiempos grandes sólo se advierte la particular de la no homogénea (permanente):

$$x_i^{\text{perm}}(t) = A_i \cos(\omega t + \phi)$$

donde

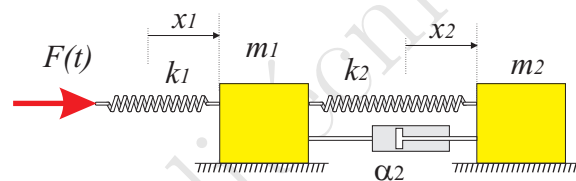
$$A_i(\omega) = \sum_{\lambda=1}^N \frac{a_{i\lambda} Q_{\lambda}^0}{\omega_{\lambda}^2 - \omega^2} = \frac{\text{polinomio}(N-1; \omega^2)}{\text{polinomio}(N; \omega^2)}$$

La solución particular de la ecuación completa, obtenida en el caso más simple, muestra ya el fenómeno más característico de las oscilaciones forzadas: la *resonancia*. El acoplamiento entre las oscilaciones produce para un sistema de N grados de libertad:

- N picos de resonancia coincidiendo con las N frecuencias naturales del sistema.
- hasta $N - 1$ valores de la frecuencia para los que la amplitud se anula.

Ejemplo. Absorbedor dinámico de vibraciones.

Como acabamos de ver en un sistema con N grados de libertad hay N resonancias y $N - 1$ valores a los que se anula la amplitud. Este último resultado puede utilizarse para absorber las vibraciones que puede generar sobre un cuerpo la existencia en su interior de un motor oscilatorio, por ejemplo una máquina de afeitar, una sierra de vaivén, etc.



Para analizar el fenómeno utilizamos el modelo simplificado de la figura, una fuerza excitadora periódica $F(t)$, una masa m_1 y un muelle k_1 al que se añade otra masa m_2 con otro muelle k_2 con el objetivo que esta segunda masa absorba las vibraciones. En principio consideraremos nulo el rozamiento $\alpha_2 = 0$. La fuerza aplicada al extremo del muelle 1 se traduce realiza por medio de un desplazamiento $a(t)$ de manera que el potencial es,

$$V = \frac{1}{2} k_1 (x_1 - a(t))^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2$$

mientras que la energía cinética es simplemente

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

y las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 a(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si la fuerza es armónica $F(t) = k_1 a(t) = k_1 h e^{i\omega t}$ buscamos una solución del régimen permanente con la misma frecuencia,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\text{perm}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}$$

se obtiene para las amplitudes a_i la siguiente solución

$$\frac{a_1}{h} = \frac{\omega_{01}^2 (\omega_{02}^2 - \omega^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)}$$

$$\frac{a_2}{h} = \frac{\omega_{01}^2 \omega_{02}^2}{(\omega^2 - \omega_1^2) (\omega^2 - \omega_2^2)}$$

donde por comodidad hemos definido

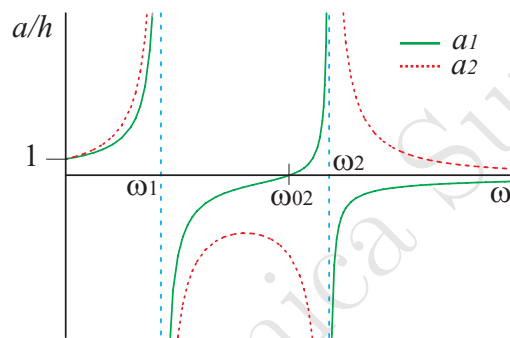
$$\omega_{01}^2 = \frac{k_1}{m_1}$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{k_2}{m_2}$$

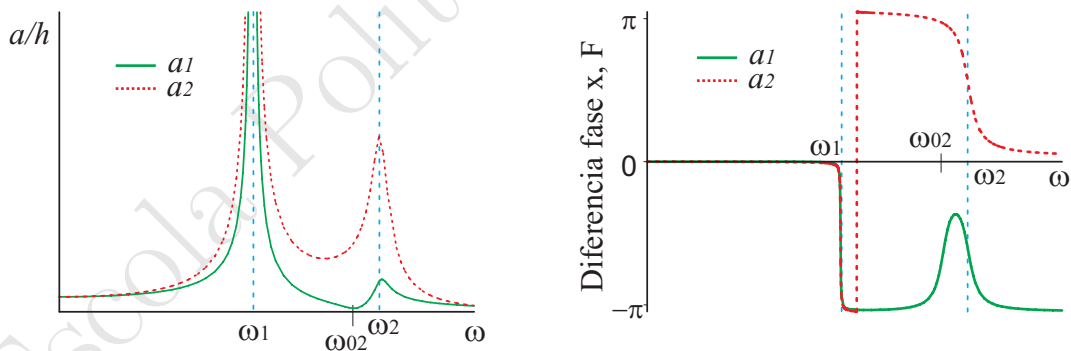
y siendo ω_1 y ω_2 las dos frecuencias propias

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \frac{k_2}{m_1} \mp \sqrt{\left(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + \frac{k_2}{m_1} \right)^2 - 4\omega_{01}^2\omega_{02}^2} \right]$$

Puede demostrarse que $\omega_1 < \omega_{02} < \omega_2$ por lo que entre las dos resonancias se encuentra en valor de la frecuencia para el que anula la amplitud del movimiento de la masa 1, $\omega = \omega_{02}$.



Si se tiene en cuenta el rozamiento los valores de las frecuencias de resonancia y la que anula el movimiento de la masa 1 se ven afectadas por el valor del amortiguamiento pero la conclusión se mantiene.

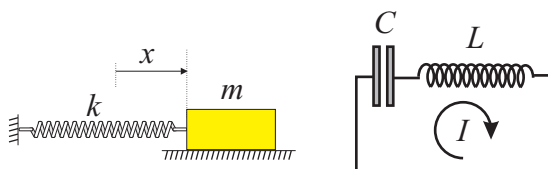


Analogías eléctricas

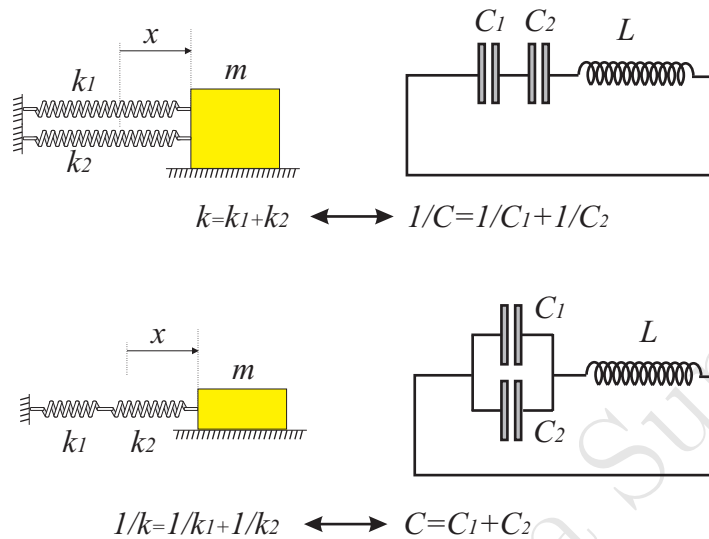
La ecuación del movimiento del oscilador armónico es formalmente idéntica a un resonador eléctrico formado por una bobina de inductancia L y un condensador de capacidad C , si tenemos en cuenta la relación entre la corriente eléctrica y la carga, $I = dQ/dt$,

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0 \quad \Rightarrow \quad L \ddot{Q} + \frac{1}{C} Q = 0$$

sin más que identificar el desplazamiento x con la carga Q , la masa m con la inductancia L y la rigidez k con la inversa de la capacidad $1/C$. La energía acumulada en la bobina $\frac{1}{2} L I^2$ es análoga a la energía cinética $\frac{1}{2} m \dot{x}^2$ y la acumulada en el condensador $\frac{1}{2} Q^2/C$ a la energía potencial $\frac{1}{2} k x^2$.



Para utilizar correctamente la analogía debe tenerse en cuenta que la capacidad de los condensadores se suman cuando están en paralelo lo mismo que ocurre con los muelles pero la analogía tiene lugar entre la inversa de la capacidad y la rigidez del muelle, véase la figura siguiente.



El efecto del rozamiento viscoso (proporcional a la velocidad) es análogo al de la resistencia, así el oscilador armónico amortiguado equivale al circuito RLC en serie,

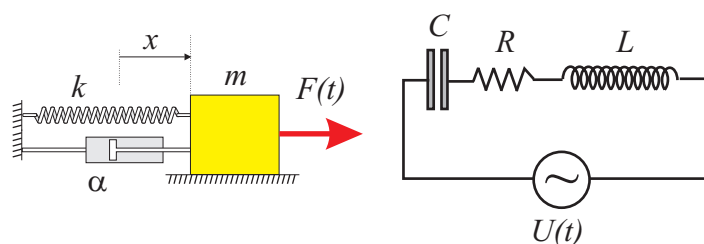
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = 0$$

De la misma forma una fuerza externa (oscilador forzado) es equivalente a la presencia de una fuerza electromotriz $U(t)$

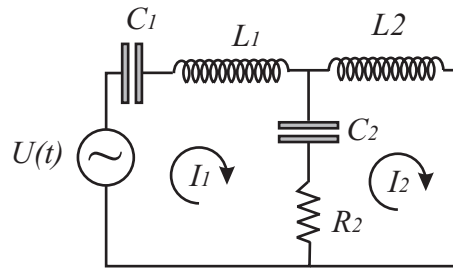
$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t) \Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = U(t)$$

Entonces,

desplazamiento,	$x \longleftrightarrow Q$,	carga
masa,	$m \longleftrightarrow L$,	inductancia
rigidez,	$k \longleftrightarrow \frac{1}{C}$,	inversa de la capacidad
amortiguamiento,	$\alpha \longleftrightarrow R$,	resistencia
fuerza,	$F(t) \longleftrightarrow U(t)$,	fuerza electromotriz



Estas analogías pueden extenderse al caso de oscilaciones acopladas dando lugar a una red circuitos eléctricos cuya solución es análoga a la del sistema mecánico. En la figura siguiente se muestra el cricuito eléctrico análogo al absorbedor dinámico de vibraciones que hemos visto anteriormente.



Escuela Politécnica Superior

Apéndice: Problema de valores propios

Sea el problema de valores propios:

$$\mathbf{K} A_\lambda = \omega_\lambda^2 \mathbf{M} A_\lambda \quad (1)$$

Entonces:

$$A_\mu^\dagger \mathbf{K} A_\lambda = \omega_\lambda^2 A_\mu^\dagger \mathbf{M} A_\lambda \quad (2)$$

Tomando adjuntos (transpuesto + complejo conjugado):

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{K}^\dagger A_\mu = \omega_\lambda^{2*} A_\lambda^\dagger \mathbf{M}^\dagger A_\mu$$

Si las matrices son hermíticas (autoadjuntas) se tiene:

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{K} A_\mu = \omega_\lambda^{2*} A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu$$

y utilizando (2) se obtiene:

$$\omega_\mu^2 A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu = \omega_\lambda^{2*} A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu \Rightarrow (\omega_\mu^2 - \omega_\lambda^{2*}) A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu = 0 \quad (3)$$

De esta ecuación se obtienen dos conclusiones importantes:

- i) Si $\mu = \lambda \Rightarrow \omega_\lambda^2 = \omega_\lambda^{2*}$, todas las raíces son reales.
- ii) Si $\omega_\mu^2 \neq \omega_\lambda^2 \Rightarrow A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\mu = 0$, los autovectores procedentes de raíces distintas son ortogonales.

Además, los autovalores pueden elegirse reales. Suponiendo que son complejos se podrá escribir:

$$A_\lambda = \vec{\alpha}_\lambda + i \vec{\beta}_\lambda$$

por lo que:

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\lambda = \{ \vec{\alpha}_\lambda^t - i \vec{\beta}_\lambda^t \} \mathbf{M} \{ \vec{\alpha}_\lambda + i \vec{\beta}_\lambda \} = \vec{\alpha}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\alpha}_\lambda + \vec{\beta}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\beta}_\lambda + i \{ \vec{\alpha}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\beta}_\lambda - \vec{\beta}_\lambda^t \mathbf{M} \vec{\alpha}_\lambda \}$$

y si \mathbf{M} es hermítica,

$$A_\lambda^\dagger \mathbf{M} A_\lambda$$

es siempre real. Esto hace posible elegir los autovectores reales y ortonormales:

$$A_\mu^t \mathbf{M} A_\lambda = \delta_{\mu\lambda} \quad (4)$$

Reescribiendo la ecuación (2) se tiene:

$$\omega_\lambda^2 = \frac{A_\lambda^t \mathbf{K} A_\lambda}{A_\lambda^t \mathbf{M} A_\lambda}$$

Si las dos matrices corresponden a formas cuadráticas definidas positivas los autovalores serán todos positivos y finitos:

$$\mathbf{M}, \mathbf{K} \text{ hermíticas y definidas positivas} \Rightarrow 0 < \omega_\lambda^2 < \infty, \forall \lambda$$