

Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003

LUIS RICO ROMERO

Universidad de Granada
lrico@ugr.es

Es un empeño de los países de la OCDE conocer en qué medida los jóvenes que finalizan la escolaridad obligatoria están preparados para la sociedad del siglo XXI y sus desafíos. El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (Programme for International Student Assessment, PISA) se establece para llevar a cabo la organización e implementación de esta tarea.

El modo en que los sistemas educativos preparan a los estudiantes de 15 años para desempeñar un papel como ciudadanos activos es un dato importante del desarrollo de una sociedad. Finalidad principal de la evaluación PISA/OCDE consiste en establecer indicadores de calidad con los que expresar cómo los sistemas educativos alcanzan esa formación.

El proyecto PISA se concibe como una herramienta para contribuir al desarrollo del capital humano de los países miembros de la OCDE. Tal capital lo constituyen los conocimientos, destrezas, competencias y otros rasgos individuales, que son relevantes para el bienestar personal, social y económico.

Esta evaluación cubre los dominios de la lectura comprensiva y la alfabetización matemática y científica, no tanto en los términos establecidos por el currículum escolar cuanto sobre los conocimientos y destrezas necesarios para la vida adulta. La evaluación de competencias transversales se contempla con la inclusión de un nuevo dominio sobre resolución de problemas. Se destacan la maestría en los procesos, la comprensión de conceptos y la habilidad para actuar en distintas situaciones dentro de cada dominio.

Los conocimientos y destrezas evaluados no proceden, principalmente, del núcleo común de los currículos nacionales sino de aquello que se juzga esencial para la vida adulta. Se considera que esta es la principal característica del proyecto PISA/OCDE. El currículum tradicional se construye mediante piezas de información y técnicas que hay que dominar; este currículum enfatiza escasamente las destrezas que se desarrollan en cada dominio y su uso general en la vida adulta. Incluso destaca menos las competencias generales para resolver problemas y aplicar ideas para la comprensión de situaciones cotidianas. El proyecto PISA/OCDE no excluye el currículum basado en el conocimiento pero lo valora en términos de la adquisición de conceptos y destrezas amplios, que pueden aplicarse. Por tanto, el programa de PISA no queda reducido a aquello que se enseña específicamente en los centros y escuelas de los países participantes.

Las competencias en matemáticas se consideran parte principal de la preparación educativa y, por ello, la evaluación en matemáticas es un componente esencial del programa PISA. El foco de evaluación en el programa se centra en cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido.

Las competencias que se estudian incluyen el compromiso del estudiante con el proceso de su aprendizaje, y contemplan el género y el entorno familiar. El programa también muestra una visión general de cómo determinadas características de las escuelas, tales como la organización de la enseñanza y la disponibilidad y administración de los recursos, están relacionadas con el éxito educativo.

Las evaluaciones se llevan a cabo cada tres años, y ofrecen a los responsables de la política educativa de los países participantes información relevante para dar continuidad a la interpretación de los resultados de los estudiantes a lo largo del tiempo, evaluar las fortalezas y debilidades de sus propios sistemas y conocer la relación con los resultados de otros países. El estudio anterior finalizó en el año 2000; el estudio recién concluido, en 2003.

Por lo que se refiere a la evaluación en matemáticas, el Proyecto PISA 2003 ha supuesto un esfuerzo ambicioso por construir instrumentos de intervención en la enseñanza de las matemáticas, con los que vehicular una política educativa basada en desarrollos recientes de investigación en educación matemática, llevados a cabo en los países de la Unión Europea, Australia, Estados Unidos y Japón.

En el estudio PISA 2003 las matemáticas han sido el principal dominio de estudio. Han intervenido entre 5.000 y 10.000 estudiantes de 42 países, pertenecientes al menos a 150 centros diferentes en cada caso.

El Grupo de expertos en matemáticas (Mathematics Expert Group, MEG) en el Proyecto PISA 2003, responsable de estudiar las muestras de ítems, revisar sus enunciados, analizar los resultados de estudios piloto y proponer los ítems finales, ha estado coordinado por el Australian Council of Educational Research (ACER) y el Instituto Freudenthal; ha tenido como miembros a Jan de Lange (Chair), Ray Adams (ACER), Werner Blum, Vladimir Burjan, Sean Close, John Dossey, Mary Lindquist, Zbigniew Marciniak, Mogens Niss, Kyung-Mee Park, Luis Rico, Tom Romberg (Consultant), Hanako Senuma (NIER), Yoshinori Shimizu, Ross Turner (ACER) y Margaret Wu (ACER).

Las ideas que aquí se presentan son un resumen e interpretación de las publicadas en el capítulo *Mathematics Literacy*, incluido en el documento editado en 2003 por la OCDE *The PISA 2003 Assessment Framework* y aparecen en el documento *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*, que ha sido publicado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.

ALFABETIZACIÓN MATEMÁTICA

El dominio que se evalúa en el proyecto OECD/PISA se denomina *Alfabetización Matemática* (Mathematical Literacy). Dicha alfabetización se refiere a la capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando identifican, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones.

Un buen nivel en el desempeño de estas capacidades muestra que un estudiante está matemáticamente alfabetizado o letrado. Reducir la noción de alfabetización a sus aspectos más funcionales resulta excesivamente elemental. En este estudio la noción de alfabetización tiene, por el contrario, una interpretación comprensiva: debe mostrar la capacidad de los estudiantes para enfrentarse con los problemas cotidianos más variados por medio de las matemáticas. Atreverse a pensar con ideas matemáticas es la descripción de un ciudadano matemáticamente ilustrado, versión actualizada del *sapere aude* establecido por Kant como signo distintivo del pensamiento ilustrado.

En sus relaciones con el mundo natural y social y en su vida cotidiana los ciudadanos se enfrentan regularmente a situaciones en las que hacen planes y organizan su tiempo, presupuestan y compran, viajan, hacen estimaciones, cocinan y se alimentan, optimizan sus recursos y gestionan sus finanzas personales, abordan problemas técnicos, juzgan cuestiones políticas, toman decisiones en las que usan el razonamiento cuantitativo o espacial u otras nociones matemáticas y ayudan a clarificar, formular y resolver múltiples problemas.

Los ciudadanos de todos los países se ven progresivamente implicados en multitud de tareas que incluyen conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos u otras nociones matemáticas. La Alfabetización Matemática del OECD/PISA se ocupa del modo en que los estudiantes de 15 años actúan como ciudadanos informados y reflexivos y como consumidores inteligentes. Se concentra en su capacidad para leer e interpretar formularios, evaluar y pagar costes, no ser engañados en tratos que impliquen dinero, determinar la compra más adecuada a las propias necesidades en el mercado, y muchas otras situaciones.

Podemos apreciar en la Alfabetización Matemática una versión básica de las competencias prácticas generales que se postulan para los profesionales de la matemática, según las nuevas directrices de los planes de estudios españoles. Las competencias prácticas para la nueva Titulación de Licenciado en Matemáticas, dentro del marco de la Convergencia Europea, son:

1. "Resolver problemas de Matemáticas, mediante habilidades de cálculo básico y otras técnicas
2. Proponer, analizar, validar e interpretar modelos de situaciones reales sencillas, utilizando las herramientas matemáticas más adecuadas a los fines que se persigan
3. Planificar la resolución de un problema en función de las herramientas de que se disponga y de las restricciones de tiempo y recursos" (Campillo, 2004; pp. 129-130)

Vemos pues que la Alfabetización Matemática es condición necesaria para la formación de los futuros especialistas en matemáticas y trabaja sobre las mismas competencias.

Para el estudio OCDE/PISA *Alfabetización Matemática* es "la capacidad individual para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos de la vida en que se le presenten necesidades y tenga que actuar como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo."

El término "alfabetización" está elegido para subrayar que el conocimiento matemático y las destrezas, tal como están definidos en el currículo tradicional de matemáticas,

no constituyen el foco principal de atención. Por el contrario, el énfasis se pone en el conocimiento matemático puesto en funcionamiento en una multitud de contextos diferentes, por medios reflexivos, variados y basados en la intuición personal, es decir, en las capacidades personales.

Por supuesto, para que este uso sea posible y viable, son necesarios una buena cantidad de conocimientos matemáticos básicos y de destrezas; tales conocimientos y destrezas forman parte de esta definición de alfabetización.

El término "el mundo" significa, para los responsables del Proyecto PISA 2003, la posición natural, cultural y social en la que viven los individuos.

"Usar e implicarse con las matemáticas" significa no sólo utilizar las matemáticas y resolver problemas matemáticos sino también *comunicar, relacionarse con, valorar* e incluso, *apreciar y disfrutar* con las matemáticas. Las matemáticas no se reducen a sus aspectos técnicos sino que están inmersas en el mundo social, impregnadas de sentido práctico, comprometidas con los valores de equidad, objetividad y rigor, pero también con la creatividad, el ingenio y la belleza. Todas estas facetas se contemplan en el uso de las matemáticas y en la implicación que con ellas tienen las personas.

La frase: "su vida individual" se refiere a la vida privada, la vida profesional, la vida social con compañeros y familiares así como a la vida de los estudiantes como ciudadanos de una comunidad.

BASES TEÓRICAS PARA EL MARCO MATEMÁTICO DEL ESTUDIO PISA

El marco matemático del estudio OCDE/PISA se sostiene en la creencia de que aprender a *matematizar* debe ser un objetivo básico para todos los estudiantes. La actividad de matematización se identifica en el proyecto, en términos generales, con la resolución de problemas.

Tradicionalmente se han distinguido distintas fases en el proceso de resolución de problemas. Así Dewey (1933), señala las siguientes:

1. "Se siente una dificultad: localización de un problema.
2. Se formula y define la dificultad: delimitación de problema en la mente del sujeto.
3. Se sugieren posibles soluciones: tentativas de solución.
4. Se obtienen consecuencias: desarrollo o ensayo de soluciones tentativas.
5. Se acepta o rechaza la hipótesis puesta a prueba."

Polya (1945), por su parte, establece cuatro fases de trabajo:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Examinar la solución obtenida."

En esta misma tradición, los responsables del estudio OCDE/PISA de matemáticas (2003) caracterizan por cinco fases la actividad de hacer matemáticas:

1. Comenzar con un problema situado en la realidad.
2. Organizarlo de acuerdo con conceptos matemáticos.
3. Despegarse progresivamente de la realidad mediante procesos tales como hacer suposiciones sobre los datos del problema, generalizar y formalizar.
4. Resolver el problema.
5. Proporcionar sentido a la solución matemática, en términos de la situación real inicial.

Es la actuación secuenciada por medio de estos procesos lo que caracteriza, en sentido amplio, cómo los matemáticos hacen matemáticas, cómo las personas emplean las matemáticas en una variedad de profesiones y trabajos de manera completa y competente.

El programa OCDE/PISA se enfrenta a una cuestión operativa, que consiste en evaluar si los estudiantes de 15 años están debidamente alfabetizados y han desarrollado eficazmente su capacidad de matematizar. Los responsables del estudio reconocen la dificultad de llevar ésto a cabo mediante una simple prueba escrita de evaluación ya que el proceso completo de actuación desde la realidad a las matemáticas, y vuelta a la realidad, implica con frecuencia trabajo en colaboración y búsqueda de recursos; el proceso completo toma un tiempo considerable.

Debido a estas limitaciones el programa OCDE/PISA ha elegido preparar ítems que evalúen diferentes partes de este proceso. A continuación se describe la estrategia escogida para construir un banco de ítems que, de manera equilibrada, cubra las cinco fases antes señaladas en el proceso de matematización.

ORGANIZACIÓN DEL DOMINIO

El marco matemático del estudio OECD/PISA se propone justificar y describir cómo evaluar la amplitud con que los estudiantes de 15 años pueden manejar las matemáticas de manera fundada cuando se enfrentan con problemas del mundo real.

Para mejor describir el dominio que se evalúa se distinguen tres componentes:

1. La *situación o contexto* en que se localiza el problema.
2. El *contenido matemático* que se debe utilizar para resolver el problema.
3. Las *competencias* que deben activarse para conectar el mundo real, donde surge el problema, con las matemáticas.

Situaciones y Contextos

Utilizar y hacer matemáticas en una variedad de situaciones y contextos es un aspecto importante de la Alfabetización Matemática. Se reconoce que trabajar con cuestiones que llevan por sí mismas a un tratamiento matemático, a la elección de métodos mate-

máticos y representaciones, depende frecuentemente de las situaciones en las cuales se presentan los problemas.

La situación es la parte del mundo del estudiante en la cual se sitúa la tarea.

El contexto de un ítem es su posición específica dentro de una situación.

Ejemplo: Cuenta de ahorros. Se colocan 1000 euros en una cuenta de ahorros en un banco. Hay dos opciones: se puede conseguir el 4% de interés anual o bien se puede conseguir del banco una bonificación inmediata de 10 euros y una tasa anual del 3% de interés. ¿Cuál es la mejor opción para un año? ¿y para dos años?

La situación de este ítem es "finanzas y bancos", que es una situación procedente de la sociedad y la comunidad local, denominada como "pública".

El contexto del ítem se refiere a dinero (euros), tasas de interés y cuentas bancarias.

Este tipo de problema proporciona autenticidad al uso de las matemáticas, ya que puede formar parte de la experiencia usual o de la práctica de los participantes en alguna situación real.

Los problemas, así como sus soluciones, pueden presentarse en una variedad de situaciones y contextos. En primer lugar los problemas surgen en situaciones amplias que tienen sentido y son relevantes para la vida del estudiante. Las situaciones forman parte del mundo real. En segundo término, dentro de estas situaciones, los problemas tienen un contexto más específico.

Contextos y situaciones permiten establecer la localización de un problema en términos de los fenómenos de los que surge y que condicionan la situación problemática planteada. Los responsables del proyecto no mencionan explícitamente la fenomenología como un organizador relevante en el diseño y selección de las tareas escogidas para la evaluación de los estudiantes por lo que se refiere a contextos y situaciones. Sin embargo, está claro que la consideración de situaciones y contextos como una de las componentes para organizar el dominio incorpora el análisis fenomenológico dentro del marco teórico que sustenta el proyecto OCDE/PISA.

Las situaciones y contextos de un problema se pueden también considerar en términos de la distancia entre el problema y las matemáticas implicadas. Si la tarea se refiere sólo a objetos matemáticos, estructuras o símbolos, el contexto de la tarea se considera como intra-matemático, y se podrá aceptar como una situación de tipo científico. Hay un número limitado de tales tareas que se incluyen en el banco de ítems del proyecto OCDE/PISA, en las que el vínculo entre el problema y las matemáticas involucradas se hace explícito en el contexto del problema. Sin embargo, problemas con contextos extra-matemáticos, que influyen en la solución y en su interpretación, son preferibles como instrumentos para evaluar la alfabetización matemática ya que resultan más fáciles de encontrar en la vida cotidiana y, además, movilizan distintos tipos de conocimientos para su tratamiento y resolución.

Contenidos Matemáticos

Las ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han inventado como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, social y mental.

Las escuelas organizan el currículo de matemáticas mediante contenidos temáticos: aritmética, geometría, álgebra, etc, y sus tópicos, que reflejan ramas bien establecidas del pensamiento matemático, facilitan el desarrollo estructurado de un programa.

No obstante, los fenómenos del mundo real que llevan a un tratamiento matemático no están organizados lógicamente.

La estrategia asumida en el proyecto PISA/OCDE consiste en definir el rango del contenido que puede evaluarse haciendo uso de una aproximación fenomenológica para describir ideas, estructuras y conceptos matemáticos. Esto significa describir el contenido en relación con los fenómenos y los tipos de problemas de los que surgieron.

Los responsables del proyecto hacen una revisión cuidadosa y completa de diferentes modos de organizar los contenidos matemáticos. Mencionan los textos de Steen (1990) y Devlin (1994). También consideran los bloques de contenidos establecidos por los Estándares Curriculares del NCTM del 2000 y por los estudios del NAEP.

Las ideas fundamentales, que satisfacen las condiciones de respetar el desarrollo histórico, cubrir el dominio y contribuir a la reflexión de las líneas principales del currículo escolar, son:

Cantidad
Espacio y forma
Cambios y relaciones
Incertidumbre

Conviene recordar que el Diseño Curricular Base (1989), que dio lugar al currículo de matemáticas de secundaria español en 1991, consideraba categorías similares pero no idénticas: Números y operaciones; Medida, estimación y cálculo de magnitudes; Representación y organización del espacio; Interpretación, representación y tratamiento de la información; Tratamiento del azar. La categorización del proyecto PISA/OCDE es una versión actualizada más general, comprensiva y mejorada que aquella de los años 90.

Con las cuatro categorías mencionadas el contenido se organiza en un número de áreas suficiente, que aseguran una distribución de ítems a lo largo del currículo, pero al mismo tiempo en un número no muy amplio que evite una división excesiva.

A continuación se enumeran las ideas principales que estructuran cada una de las categorías anteriores.

Cantidad.- Esta categoría subraya la necesidad de cuantificar para proceder a organizar el mundo. Incluye todos aquellos conceptos involucrados en la comprensión de tamaños relativos, reconocimiento de patrones numéricos, uso de números para representar cantidades y atributos cuantificables de los objetos del mundo real. Mas aún, la cantidad se refiere al procesamiento y comprensión de números que se nos presentan de varios modos. Un aspecto importante es el razonamiento cuantitativo, que incluye el sentido numérico, la representación de números de varios modos, los tamaños relativos, la comprensión del significado de las operaciones, cálculo, mental y estimación.

Espacio y forma.- Las formas pueden considerarse como patrones. Casas, edificios, puentes, estrellas de mar, copos de nieve, planos de ciudades, cristales y sombras,

son algunos ejemplos de formas del mundo real en la que se pueden localizar patrones. Los patrones geométricos sirven como modelos relativamente simples de muchos tipos de fenómenos y su estudio es posible y deseable a todos los niveles.

El estudio de las formas y construcciones requiere buscar similitudes y diferencias cuando se analizan los componentes de las formas y se reconocen según distintas representaciones y diferentes dimensiones.

El estudio de las formas está relacionado con el concepto de *espacio cercano*, lo cual requiere de la comprensión de las propiedades de los objetos y de sus posiciones relativas (Freudenthal, 1973). También significa entender las relaciones entre las formas y las imágenes o representaciones visuales. Debemos ser conscientes de cómo vemos las cosas y por qué las vemos así; los estudiantes tienen que aprender a desenvolverse a través del espacio, de las formas y de las construcciones. Igualmente hay que entender cómo los objetos tridimensionales pueden representarse en dos dimensiones, cómo se interpretan las sombras, cuáles son sus perspectivas y sus funciones.

Cambios y relaciones.- Cada fenómeno natural es una manifestación del cambio; el mundo en nuestro entorno muestra una multitud de relaciones temporales y permanentes entre fenómenos. Algunos ejemplos los proporcionan los organismos y sus cambios cuando crecen, los ciclos de las estaciones, el flujo y reflujo de las mareas, los ciclos de empleo y desempleo, los cambios climáticos y los cambios en los indicadores económicos.

Algunos de los procesos de cambio se pueden describir y modelar directamente mediante funciones matemáticas: lineales, exponenciales, periódicas o logísticas, discretas o continuas. Las relaciones matemáticas tienen forma de ecuaciones o de desigualdades, usualmente, pero también se presentan relaciones de naturaleza más general.

El pensamiento funcional, es decir, pensar en términos de y acerca de relaciones, es una de las metas disciplinares fundamentales en la enseñanza de las matemáticas. Las relaciones pueden representarse mediante una diversidad de sistemas, incluyendo símbolos, gráficas, tablas y dibujos geométricos. Distintas representaciones pueden servir para propósitos diversos y tener propiedades diferentes.

Incertidumbre.- Por incertidumbre se entienden dos tópicos relacionados: tratamiento de datos y azar. Estos fenómenos son la materia de estudio de la estadística y de la probabilidad, respectivamente.

Los conceptos y actividades que son importantes en esta área son la recolección de datos, el análisis de datos y sus representaciones, la probabilidad y la inferencia.

En el currículo español de los 90 el estudio de las funciones y la estadística se contemplaban en un mismo bloque: *Interpretación, representación y tratamiento de la información*, de manera artificial, mientras que el estudio de las relaciones se consideraba en el bloque de *Números y operaciones*.

La clasificación de contenidos del PISA/OCDE 2003 se sustenta en el análisis fenomenológico y supone una mejora en aquellos aspectos que resultaban forzados en el currículo español.

PROCESOS MATEMÁTICOS

Matematización

El proceso de hacer matemáticas, que conocemos como *matematización*, implica en primer lugar traducir los problemas desde el mundo real al matemático. Este primer proceso se conoce como *matematización horizontal*.

La *matematización horizontal* se sustenta sobre actividades como las siguientes:

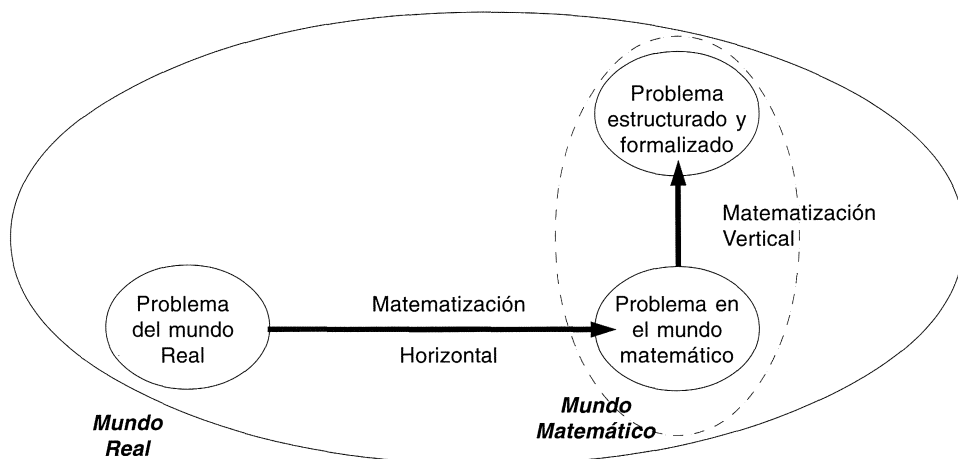
- * Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes respecto a un problema.
- * Representar el problema de modo diferente.
- * Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal.
- * Encontrar regularidades, relaciones y patrones en la situación que se considera.
- * Reconocer isomorfismos con otros problemas ya conocidos.
- * Traducir el problema a un modelo matemático.
- * Utilizar herramientas y recursos adecuados.

Una vez traducido el problema a una expresión matemática el proceso puede continuar. El estudiante puede plantearse a continuación cuestiones en las que utiliza conceptos y destrezas matemáticas. Esta parte del proceso se denomina *matematización vertical*.

La *matematización vertical* incluye:

- * Utilizar diferentes representaciones.
- * Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.
- * Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.
- * Argumentar.
- * Generalizar

La conexión entre ambos procesos se puede expresar gráficamente:



El paso posterior en la resolución de un problema implica reflexionar sobre el proceso completo de matematización y sus resultados.

Los estudiantes deberán interpretar los resultados con actitud crítica y validar el proceso completo.

Algunos aspectos de este proceso de validación y reflexión son:

- Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos.
- Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.
- Comunicar el proceso y la solución.
- Criticar el modelo y sus límites.

Contextos, contenidos y procesos proporcionan la dimensión conceptual para la evaluación del proyecto PISA/OCDE, muestran las claves que articulan el dominio desde la perspectiva predominante de la disciplina. La dimensión cognitiva, el papel relevante del sujeto que aprende, viene establecido en este estudio por las competencias que delimitan el dominio. Las competencias que aquí se postulan sostienen que es el sujeto quien moviliza los contenidos y articula procesos que dan respuesta a cuestiones planteadas desde el mundo real.

LAS COMPETENCIAS

Las competencias que establece un plan de formación se constituyen en elementos determinantes para establecer su calidad y permiten llevar a cabo su evaluación. La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se propone, mientras que su eficacia responde al modo en que éstas se logran.

El proyecto PISA enfatiza que la educación debe centrarse en la adquisición de unas competencias determinadas por parte de los alumnos de 15 años al término del periodo de su educación obligatoria, competencias que tienen por finalidad formar ciudadanos alfabetizados matemáticamente. Las competencias muestran los modos en que los estudiantes actúan cuando hacen matemáticas.

El concepto de competencia en el proyecto PISA/OCDE pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de los conceptos y destrezas. Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso.

Las competencias elegidas por el proyecto PISA son:

1. Pensar y razonar
2. Argumentar
3. Comunicar
4. Modelar
5. Plantear y resolver problemas

6. Representar
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
8. Uso de herramientas y recursos

El estudio no se propone elaborar ítems que evalúen individualizadamente cada una de las anteriores competencia. Hay una considerable vinculación entre ellas y, por lo general, es necesario trabajar simultáneamente con varias de ellas al hacer matemáticas. Por ello cualquier esfuerzo por evaluarlas individualmente puede resultar artificial y producir una compartimentación del dominio de alfabetización matemática innecesaria.

El proyecto PISA considera que los logros de los estudiantes en la resolución de problemas se puede expresar mediante este conjunto de competencias. Conviene observar que las tres primeras son competencias cognitivas de carácter general, mientras que las cuatro siguientes son competencias matemáticas específicas, relacionadas con algún tipo de análisis o reflexión conceptual.

A continuación se presentan algunos indicadores que ejemplifican cada una de las competencias.

Pensar y Razonar.- Esto incluye la capacidad de:

- * Plantear cuestiones propias de las matemáticas (Cuántos hay? Cómo encontrarlo? Si es así, ... entonces? etc.);
- * Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones;
- * Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas);
- * Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.

Argumentar.- Esto incluye las capacidades de:

- * Conocer lo que son las pruebas matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático;
- * Seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos;
- * Disponer de sentido para la heurística (Qué puede (o no) ocurrir y porqué?);
- * Crear y expresar argumentos matemáticos.

Comunicar.- Esto incluye las capacidades de:

- * Expresarse en una variedad de vías, sobre temas de contenido matemático, de forma oral y también escrita,
- * Entender enunciados de otras personas sobre estas materias en forma oral y escrita.

Modelar.- Incluye las capacidades de:

- * Estructurar el campo o situación que va a modelarse;
- * Traducir la realidad a una estructura matemática;
- * Interpretar los modelos matemáticos en términos reales;
- * Trabajar con un modelo matemático;
- * Reflexionar, analizar y ofrecer la crítica de un modelo y sus resultados;

- * Comunicar acerca de un modelo y de sus resultados (incluyendo sus limitaciones);
- * Dirigir y controlar el proceso de modelización.

Plantear y resolver problemas.- Incluye las capacidades de:

- * Plantear, formular y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados);
- * Resolver diferentes tipos de problemas matemáticos mediante una diversidad de vías.

Representar.- Incluye las capacidades de:

- * Decodificar, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones;
- * Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.

Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones.- Incluye las capacidades de:

- * Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y entender sus relaciones con el lenguaje natural;
- * Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal;
- * Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas;
- * Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

Uso de herramientas y recursos.- Lo cual implica utilizar los recursos y herramientas familiares en contextos, modos y situaciones que son distintos del usos con el que fueron presentados.

NIVELES DE COMPETENCIAS

Las competencias enunciadas admiten diferentes niveles de profundidad. Los expertos del proyecto PISA/OCDE consideran tres niveles de complejidad a la hora de considerar los ítems con los que evaluar las competencias:

Primer nivel: Reproducción y procedimientos rutinarios.

Segundo nivel: Conexiones e integración para resolver problemas estándar.

Tercer nivel: Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

El informe mencionado proporciona ejemplos sencillos de ítems por cada uno de estos niveles:

Ejemplos de ítems de Reproducción

Ejp. 1. Resolver la ecuación $7x-3 = 13x + 15$

Ejp. 2. Calcular la media de 7, 12, 8, 14, 15 y 9

Ejp. 3. Escribir 69% como fracción.

Ejp. 4. Si se colocan 1000 euros en una cartilla de ahorros con un interés del 4%, ¿Cuántos euros habrá en la cuenta después de un año?

Ejemplos de ítems de Conexión

Ejp. 1. María vive a 2 kilómetros del colegio, Martín a 5. ¿A qué distancia vive María de Martín?

Ejp. 2. Una Pizzería sirve dos tipos de pizza redonda, del mismo grosor y diferentes tamaños. La pequeña tiene un diámetro de 3 dm y cuesta 3 euros. La mayor tiene un diámetro de 4 dm y cuesta 4 euros. ¿Cuál es la pizza que tiene mejor precio? Explica tu razonamiento.

Ejemplo de ítem de Reflexión

Ejp. 1. En un cierto país el presupuesto de defensa es de 30 millones de dólares para 1980. El presupuesto total para ese año es de 500 millones de dólares. Al año siguiente el presupuesto de defensa es de 35 millones de dólares, mientras que el presupuesto total es de 605 millones de dólares. La inflación durante el periodo que cubren los dos presupuestos es del 10%.

A. Se le invita a hacer una exposición ante una sociedad pacifista. Intentas explicar que el presupuesto de defensa ha disminuido en este periodo. Explica cómo hacerlo.

B. Se le invita a hacer una exposición ante una academia militar. Intentas explicar que el presupuesto de defensa se ha incrementado en este periodo. Explica cómo hacerlo.

Finalmente, el informe final del marco para el proyecto PISA/OCDE 2003 presenta una serie muy interesante de 17 ítems acompañados por un análisis clúster de los niveles en términos de las competencias que se destacan en cada uno de ellos. También se acompaña una serie de 13 unidades, junto con su análisis completo en términos del marco conceptual presentado. Esta parte del informe permite ejemplificar con detalle los tres componentes del marco teórico propuesto para estructurar el dominio de estudio –alfabetización matemática– así como los niveles de profundidad con el que dicho dominio puede evaluarse.

REFERENCIAS

- CAMPILLO, A. (coord.) (2004) *Título de Grado en Matemáticas*. Madrid: Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.
- DEVLIN, K. (1994) *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: Scientific American Library
- DEWEY, J. (1933) *How we think*. Lexington, MA: Heath & Company.
- FREUDENTHAL, H. (1973) *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.
- Ministerio de Educación y Ciencia (1989) *Diseño Curricular Básico. Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000) *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM
- OCDE (2003) *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE.
- PAJARES, R.; SANZ, A. y RICO, L. (2004) *Aproximación a un modelo de evaluación: el proyecto PISA 2000*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deportes.
- POLYA, G. (1945) *How to solve it*. Princeton University Press.
- STEEN, L. (Ed.) (1990) *On the shoulders of Giants*. Washington DC: National Academy Press.