

# *¿Qué ponen en juego los alumnos al resolver problemas? Diferencias entre alumnos de 12 y 14 años*

*JORGE CRUZ*

Escola Básica dos 2º e 3º Ciclos Santiago Maior de Beja, Portugal

*JOSÉ CARRILLO*

Universidad de Huelva

## *Resumen:*

*Esta comunicación presenta resultados parciales de una investigación más amplia, realizada en Portugal, con alumnos de 12 y 14 años de edad. Se analizan los recursos, heurísticos y estrategias de control puestas en juego al resolver problemas. Los resultados permiten concluir la ausencia de diferencias significativas respecto de las tres componentes anteriores en función de la edad, lo que nos hace reflexionar sobre la utilidad del conocimiento matemático y estratégico enseñado y aprendido en la escuela.*

## *Abstract:*

*This paper presents some partial results of a wider research, which has been carried out in Portugal, with 12 and 14 pupils. Resources, heuristics and control strategies applied by the pupils when solving problems are analysed. The results lead us to reach the conclusion that there are not meaningful differences concerning the three above mentioned components according to the age. It helps us to reflect on the usefulness of the mathematical and strategical knowledge which is taught and learnt in the school.*

## 1. INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas no necesita ya ser justificada como vehículo de aprendizaje matemático, poseyendo también interés en sí misma como medio que favorece el desarrollo de estrategias aplicables en contextos escolares y cotidianos, así como actitudes positivas hacia la matemática.

Sin embargo, interesa indagar en lo que realmente aprenden los alumnos. Tras unos años en la escuela, ¿qué han aprendido?, ¿cómo aplican su conocimiento al enfrentarse a situaciones que les resultan problemáticas?

Sólo es posible acercarse humildemente a las respuestas a las preguntas anteriores, ya que tras ellas existe una gran complejidad, inherente a cualquier fenómeno educativo. Lo haremos sobre la base del análisis de protocolos de resolución de problemas por alumnos de 7º y 9º cursos (12 y 14 años). Concretamos los objetivos de la investigación en:

- A) Obtención de datos relativos a recursos, heurísticos y control puestos en práctica por alumnos de nivel 7 y 9 durante la resolución de problemas.
- B) Definir perfiles de actuación de alumnos de nivel 7 y 9.

Comenzaremos presentando los elementos teóricos respecto a los cuales puede interpretarse el estudio.

## 2. ASPECTOS TEÓRICOS SOBRE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Asumimos una caracterización amplia de problema como cualquier situación o tarea que requiere cierta deliberación por parte del resolutor, para la que no posee, de modo inmediato, regla, fórmula, algoritmo o cualquier herramienta matemática que la resuelva, pero que se encuentra al alcance de sus posibilidades.

Aplicaremos el modelo de análisis de resolución de problemas propuesto por Schoenfeld (1985), que establece 4 categorías, de las que analizaremos las 3 primeras: recursos (conocimiento informal e intuitivo acerca del dominio del problema, hechos y definiciones, procedimientos de rutina o conocimientos sobre reglas del discurso), heurísticos (técnicas generales que permiten descubrir caminos para proseguir cuando se encuentra una dificultad), control (decisiones con vista a la aplicación de recursos y heurísticos) y creencias y afectos (que determinan una visión personal de la matemática y constituyen un conjunto, que puede ser inconsciente, de condicionantes del comportamiento).

Asimismo, nos basamos en el concepto de heurística de Puig (1996):

“lo que es propio de la heurística es el estudio de los *modos* de comportamiento al resolver problemas y los medios que se utilizan en el proceso de resolverlos que son *independientes del contenido* y que no *suponen garantía* de que se obtenga la solución, y calificaremos, por tanto, de «heurísticos» a tales modos y medios”(p. 38),

que distingue claramente los heurísticos de los recursos de Schoenfeld.

Adoptamos la lista de heurísticos de Carrillo (1998, p. 108-112), organizada según las fases del proceso de resolución de problemas:

- Comprensión: C1: Organizar la información; C2: Ejemplificar; C3: Expresar en otros términos
- Planificación y Exploración: PE1: Simplificar; PE2: Estimar; PE3: Buscar regularidades con intención de generalizar; PE3a: Tantear; PE4: Considerar problemas equivalentes; PE5: Argüir por contradicción; PE6: Asumir la solución; PE7: Partir de lo que se sabe; PE8: Planificar jerárquicamente a solución; PE9: Descomponer el problema; PE10: Explorar problemas similares; PE11: Conjeturar
- Ejecución: Registrar todos los cálculos; Resaltar los logros intermedios; Actuar con orden y con precisión; Explicar el estado de la ejecución
- Verificación: V1: Analizar la consistencia de la solución; V2: Expresar de otra forma la solución; V3: Analizar la consistencia del proceso; V4: Analizar si se puede llegar al resultado de otra manera.; V5: Generalizar

Dada la diferencia entre los dos subgrupos principales de resolutores (7º y 9º), cabe esperar diferencias significativas respecto a su comportamiento. Relativas a los recursos, pues tras 2 años de escolaridad los alumnos deberán haber adquirido conocimientos aplicables (aunque no de imprescindible uso) en estos problemas. Relativas a heurísticos, ya que el Programa de Matemática (Ministério da Educação, 1991) propone el trabajo con problemas para:

- Desarrollar la capacidad de resolver problemas;
- Desarrollar el razonamiento;
- Desarrollar la capacidad de comunicación.” (p. 10, 11)

Relativas al control, pues en ese tiempo se desarrollan capacidades de control de procesos y toma de decisiones, asociado también al desarrollo natural (Schoenfeld, 1992).

Sobre la base de los elementos aquí presentados (caracterización de problema, modelo de Schoenfeld, concepto y lista de heurísticos) y teniendo presente la importancia que los currículos atribuyen a la resolución de problemas, interesa analizar la prestación de los resolutores respecto a las 3 componentes seleccionadas: recursos, heurísticos y control.

### 3. METODOLOGÍA

El propósito de este estudio es describir e interpretar las acciones y decisiones tomadas en los protocolos de resolución. Se trata de un estudio enmarcado en el ámbito de la Didáctica de la Matemática, usando un método cualitativo bajo el paradigma interpretativo. La información se obtiene sin aplicar método específico de enseñanza. No hemos pretendido constatar o refutar ninguna teoría, sino acercarnos a comprender mejor cómo resuelven los alumnos y qué evolución muestran al cabo de dos años. Dicha evolución ha de entenderse de modo aproximado, ya que no son los mismos los alumnos de 7º y 9º, sino aquellos que presentan un perfil similar de logro académico.

La técnica de recogida de datos es la prueba escrita con problemas de tipo escolar. Los alumnos recibieron el enunciado por escrito en una hoja donde aparecía una línea al margen derecho y se les indicaba que en ese hueco debían explicar las razones de las decisiones que tomaran. Se efectúa un análisis de protocolos según los recursos, heurísticos y control puestos en juego. Asimismo, tras las sesiones, los alumnos fueron preguntados acerca de aspectos menos claros de sus protocolos a través de entrevistas cortas.

Los alumnos son de *Terceiro Ciclo do Ensino Básico*, niveles 7 y 9, de una escuela portuguesa. Participaron 6 alumnos de cada nivel, 2 con buena calificación en Matemáticas, 2 en la media y 2 con malas notas. Para designar cada resolutor se usó la notación nXs (n: nivel 7 o 9; X: A o B, para distinguir resolutores del mismo tipo; s: <, = o >, conforme a la calificación). Así 7A> se refiere al resolutor A de 7º año con buena calificación. Para este artículo hemos tomado los resolutores de calificación superior y uno de calificación media de 7º por la originalidad de su resolución, por lo que contaremos con 5 alumnos.

Cada resolutor se enfrentó a 5 problemas de Números y 5 de Geometría, de los que hemos seleccionado uno para este artículo. Para la elaboración de los problemas consultamos, además de libros de texto, Guzmán (1991), Krulik y Rudnick (1993), Nunokawa (2000), Polya (1989) y Wood (1998).

La señora García hizo dos tipos de tartas. Las tartas de fresas<sup>1</sup> necesitan dos tazas de azúcar y dos tazas de harina. Las tartas de nata<sup>2</sup> necesitan dos tazas de harina pero una de azúcar. Al final se han gastado diez tazas de harina y siete de azúcar. ¿Cuántas tartas de fresas y cuántas tartas de natas hizo?

El problema puede resolverse aplicando operaciones aritméticas básicas o a través de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 incógnitas; conocimiento este último sólo enseñado en 9º.

Los heurísticos esperados son (ver apartado 2):

- C1: Es importante la selección de los datos importantes.
- C3: La traducción al lenguaje algebraico facilita la relación entre los elementos del problema.
- PE1: Es posible explorar el comportamiento de una incógnita dejando fija la otra, opción adecuada para los que no formulan algebraicamente el problema.
- PE2: La magnitud de las cantidades es pequeña, por lo que presuponer un valor aproximado (entero) puede conducir a una respuesta razonable.
- PE3a: Si la simplificación y la estimación no tienen éxito, se abre el camino al proceso de tanteo hasta encontrar la solución.
- PE6: Asumir una solución lleva a profundizar en la resolución con un fuerte carácter exploratorio. No supone el descubrimiento y verificación de una respuesta (PE2).
- PE7: Comenzar por relacionar los datos puede ser útil a fin de extraer alguna sugerencia para la estimación, el tanteo o el planteamiento del sistema de ecuaciones.
- V1: Aplicar las condiciones a los resultados obtenidos permite certificar la consistencia de la resolución.
- V4: Analizar si se puede llegar al resultado de otra manera se considera un heurístico apropiado para problemas con diferentes posibilidades de exploración. Un resolutor que haya hecho un proceso PE7→PE6→PE3a, por ejemplo, podría intentar una resolución más “económica”.

<sup>1</sup> En portugués se utilizó la expresión “tarte”.

<sup>2</sup> En portugués se utilizó la expresión “bolo”.

## 4. ANÁLISIS

En este epígrafe se analizan los pasos dados por cada resolutor, enfatizando los recursos y heurísticos puestos en práctica. A continuación se traza un esbozo de su posible perfil donde se destaca el comportamiento del resolutor en las fases del proceso de resolución de problemas (comprensión, planificación y exploración, ejecución, y verificación), así como las decisiones relativas al control. Se presentan los protocolos de los alumnos.

Resolutor 7A>

$x = 2 + 2$   
 $y = 2 + 1$

TARTES      bolos

	TARTES	bolos
frutilla	5	
manzana	5	

  

	TARTES	bolos	ACICAR
TARTES	3	6	6
bolos	1	2	1
TOTAL		8	7
		5	5
		4	2
TOTAL		10	7
	2	4	4
TARTES	3	6	3
bolos	3	6	3
TOTAL	5	10	7

Resolva o problema com tentat

faz 2 tartes e 3 bolos

*Análisis*

Selecciona los datos subrayándolos en el enunciado. Intenta expresar en otros términos (C3) al escribir " $x = 2 + 2$ " e " $y = 2 + 1$ ", pero abandona la estrategia. Organiza la información en una tabla y subraya los datos en el enunciado (C1). Hace tentativas aleatorias (no aparentan sistematización) (PE3a). Muestra persistencia y cuestionamiento sobre la estrategia escogida, pues hay tentativas iniciadas y abandonadas en el protocolo, de donde se pueden inferir capacidades metacognitivas (control). Utiliza las 4 operaciones aritméticas básicas y llega a la respuesta correcta.

*Esbozo de Perfil*

El resolutor atribuye importancia a la fase de comprensión, pues se esfuerza por organizar la información en una tabla.

Es crítico en cuanto a la estrategia de resolución que sigue, pues intenta de dos formas hasta decidirse por una tercera, la cual le proporciona la respuesta al problema. La actitud crítica y la preocupación por el proceso revelan mecanismos de control activos.

Intenta matematizar situaciones, en particular intenta una traducción algebraica, aunque superficial.

Resolutor 7B>

<p>(7A)      (2A)</p> $\begin{array}{r} 10 \quad 7 \\ 2 \mid 2 \quad 2 \mid 1 \\ \hline 0 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline 0 \end{array}$	$10 - 2 - 2 = 6 \quad -2 - 2 = 2 - 2$ $\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1_B \quad 1_B \quad 1_B \quad 1_T \quad 1_T \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 7 - 2 - 2 = 3 \quad -2 - 1 = 1 - 1 \end{array}$ $10 - 2 - 2 = 6 \quad -2 - 2 = 2 - 2 = 0$ $\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 1_B \quad 1_T \quad 1_B \quad 1_T \quad 1_T \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 7 - 2 - 1 = 4 \quad -2 - 1 = 1 - 1 = 0 \end{array}$	<p>Diminuí as chaves de açúcar e farinha ao total de cada um</p>
<p>R.: Ery dois Bolos e Três Tartes.</p>		

Análisis

Parte de lo que sabe (PE7) e por tentativas (PE3a) ejecuta, controlando siempre los resultados obtenidos, para llegar a una respuesta compatible. Comete un error de representación de la información, al atribuir las condiciones de una incógnita (tarta de fresas –bolo en el original) a otra incógnita (tarta de natas –tarte en el original) y vice versa. Revela control del proceso, concentrado en la fase de ejecución. No verifica desde la fase de comprensión, por lo que no llega a detectar el error. Utiliza las 4 operaciones aritméticas básicas y no llega a la respuesta correcta, debido al cambio en la designación de las incógnitas.

Esbozo de perfil

Prima la acción, centrando su trabajo en las fases de planificación y exploración y ejecución. En esta fase revela buen sistema de control y vuelta atrás. Lamentablemente parece considerarse bastante seguro de las interpretaciones que hace; por eso no vuelve atrás hasta la fase de comprensión, por lo que no siempre detecta los errores cometidos. Piensa que puede cometer errores en los cálculos, pero no en la comprensión del enunciado.



Resolutor 9A>

<p>tante = 2 chavesas de fanimha + 2 chavesas de açúcar</p> <p>Bolo = 2 chavesas de fanimha + 1 chaveira de açúcar</p> <p>10 chavesas de fanimha 7 chavesas de açúcar</p> <p><del>1 tante &gt; 4 ch. +</del> <del>1 bolo</del></p> <p>6 ch + 7 ch + a</p> <p><del>3 tante = 6 + 6 a</del> <del>4 bolos = 8 + 4 a</del></p> <p><del>2 bolos = 4 + 2 a</del> <del>3 tantes = 6 + 6 a</del></p> <p><del>3 tantes = 6 + 6</del> <del>2 bolos = 4 + 2</del></p> <p>4 2 0 6 4 2</p> <p>2 tantes = 4 + 4 3 bolos = 6 + 3</p> <p>4 + 6 = 10 4 + 3 = 7</p> <p>A semhana faz 2 tantes e 3 bolos</p>	<p>Foi fazendo por tentativas até me dar certo.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------

*Análisis*

Organiza la información (C1). Usa tentativas (PE3a). Parece haber intencionalidad, por lo que se puede considerar su uso sistemático (los resultados muestran una sucesiva aproximación a la respuesta final).

Puede también considerarse la aplicación de V1, pues tras la obtención de una respuesta, verifica su consistencia confrontándola con las condiciones del problema. Llega a la respuesta correcta.

*Esbozo de perfil*

Utiliza heurísticos de comprensión, de planificación/exploración y de verificación. Sabe tantear de forma sistemática, utilizando la información obtenida en un intento para orientar el siguiente hacia la respuesta pretendida. Tiene buen control, pues no pierde información (ni de los datos iniciales ni de los logros intermedios).

Resolutor 9B>

<p>2 claveros familia } 7 caca 1 " " azucar</p>	<p>10 familia 7 azucar</p>
<p>2 claveros familia } bolo 1 " " azucar</p>	
<p>2 tortas } 4 familia " " " azucar</p>	<p>4 + 6 = 10 clav. de familia</p>
<p>3 bolos } 6 familia " " " azucar</p>	<p>4 + 3 = 7 claveros de azucar</p>

En este problema +3' de cabeza, tanto dividida en cosas de forma a ver mas o menos como inicio luego e chequei a esta conclusã

*Análisis*

Selección toda la información relevante del problema y la organiza (forma pares de valores afines y esquematiza) (C1).

Consigue una buena elaboración mental del problema, lo que le permite hacer una apuesta plausible (PE2) la cual, una vez comprobada, verifica que se trata de la respuesta al problema.

Analiza la consistencia de la solución (V1).

*Esbozo de perfil*

Utiliza heurísticos de comprensión, de planificación/exploración y de verificación. Tiene buena representación mental, lo que supone buen control. Sintetiza los registros.

## 5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

### *Recursos*

El problema presentado proporciona a los resolutores de nivel 9 la posibilidad de aplicar conocimiento matemático inaccesible para los de nivel 7: sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Sin embargo, no movilizan ese conocimiento. Se registra un intento de formulación algebraica, pero en el resolutor 7A>. Puede decirse que los resolutores (estudiados) de 9º año no evidencian más recursos provenientes del aprendizaje de la matemática escolar que los de 7º en situaciones problemáticas iguales.

### *Heurísticos*

Los resolutores de nivel 7 revelan más disciplina en la organización de datos en tablas, listas secuenciales o a través de objetos manipulativos. En un primer momento esta organización podría considerarse dentro de la fase de comprensión, pero casi siempre el aprovechamiento de estas formas de organización se extiende, al menos, hasta la fase de ejecución. En la fase de Planificación y Exploración el heurístico preferido por lo general fue el Tanteo (PE3a), por lo que no hay diferencias significativas entre los grupos. Otros resolutores no usaron este heurístico, porque se basaron en Estimar (PE2) y Partir de lo que se sabe (PE7) (caso de 7A=, no incluido aquí), lo que no implica un potencial heurístico superior al tanteo (PE3a). El único caso que merece la pena destacar es el uso del heurístico Considerar problemas equivalentes (PE4), que, por su carácter más general, puede portar mayor potencial heurístico. No se concretó ninguna superioridad de los resolutores de 9º, como cabría esperar.

### *Control*

Entre los dos niveles de escolaridad estudiados, no se puede decir que haya superioridad de uno sobre otro. En general puede considerarse que no se detallan mucho las explicaciones, lo que permite suponer falta de trabajo en cuanto a la explicitación y reflexión sobre el razonamiento propio. En los casos de los dos resolutores que no llegaron a la respuesta correcta más algunos no referidos en el artículo, la insuficiencia en el control es bien evidente, pues no detectaron el error, ni fueron capaces de seleccionar ou explorar un heurístico de forma conveniente.

En resumen, puede decirse que tener más años de matemática escolar no implica necesariamente tener mejores capacidades de movilización de recursos, heurísticos ni mecanismos eficaces de control en resolución de problemas.

## REFERENCIAS

- CARRILLO, J. (1998) *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Servicio de Publicaciones Universidad de Huelva.
- GUZMÁN, M. (1991) *Aventuras Matemáticas*. Lisboa: Gradiva.
- KRULIK, S. e RUDNICK, J.A. (1993) *Reasoning and Problem Solving a Handbook for Elementary School Teachers*. Needham Heights (Massachusetts): Simon & Schuster, Inc.
- Ministério da Educação – D. G. E. B. S. – (1991) *Programa do Ensino Básico. Plano de organização do ensino-aprendizagem*. vol II. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda.
- NUNOKAWA, K. (2000) Heuristic Strategies and probing problem situations. En Carrillo, J. y Contreras, L. C. (Eds): *Resolución de Problemas en los Albores de Siglo XXI: Una visión Internacional desde Múltiples Perspectivas Y Niveles Educativos*. Huelva: Hegué, Editora Andaluza.
- POLYA, G. (1989) *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. (Traducción al Castellano de *How to solve it*)
- PUIG, L. (1996) *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.
- SCHOENFELD, A.H. (1985) *Mathematical Problem Solving*. Orlando, Florida: Academic Press.
- (1992) Learning to think mathematically: Problem Solving, Meta-cognition and Sense-Making in Mathematics. En Grouws, D. A. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan. Cap. 15.
- WOOD, L. (1998) *Estrategias de Pensamiento*. Barcelona. Editorial Labor.