

# Teoría fractal y efecto de cambio de escala: aplicación al estudio de la porosidad del suelo

## Fractal theory and scale change effect: application for studying soil porosity

VIVAS MIRANDA J. GARCIA <sup>1</sup>, CHOMICZAK S.<sup>2</sup>, PAZ GONZÁLEZ A.<sup>1</sup>

### **ABSTRACT**

In this article the fractal theory and its application to soil structure and porosity is reviewed. Fractal geometry may provide a reliable description of soil structure, particularly in the case of heterogeneous soil. The review illustrates how the geometry of complex porous media may be represented with simple fractal scaling models. Furthermore, three main classes of models proposed in the literature for soil porous space representation are discussed.

A case study was presented based on quantitative evaluation of pore size distributions carried on nine pairs of cultivated and uncultivated neighbour located soils. The fractal approach appears to be a useful tool for understanding domains of organization as found in soil aggregates

<sup>1</sup> Facultad de Ciencias. Universidad de A Coruña, A Zapateira 15.071 – A Coruña.

<sup>2</sup> Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Nordeste. Argentina.

## INTRODUCCIÓN

Los procesos de transporte en medios porosos no saturados, suelen ser descritos, a escala macroscópica, utilizando modelos matemáticos tales como el de Darcy-Buckingham o las ecuaciones de Richards. Dichos modelos fueron ampliamente utilizados en la predicción y modelización del transporte de agua, coloides, microorganismos y energía en suelos. En algunas situaciones, particularmente en suelos muy heterogéneos, se ha comprobado en los últimos años que el uso de estos modelos macroscópicos encontró serias dificultades.

Se admite que es necesaria una buena caracterización de la variabilidad espacial en cualquier intento de modelizar los procesos de transporte en dichos medios porosos heterogéneos. De hecho, el estudio de la heterogeneidad a diferentes escalas fue el principal incentivo para la introducción, en la ciencia del suelo, de la geometría fractal, que, al menos en principio, debe de permitir analizar su complejidad geométrica y su caracterización con sólo pocos números, los índices fractales.

En este trabajo se presenta, en primer lugar, un resumen de la bibliografía disponible sobre los conceptos fractales aplicados a la porosidad del suelo. En segundo lugar, se presenta un ejemplo del análisis fractal aplicado a datos obtenidos mediante un porosímetro de intrusión de mercurio.

La estructura del trabajo, por lo tanto, consta de una introducción básica a la geometría fractal y sus conceptos, seguida de una breve revisión histórica de su aplicación en modelos de porosidad de suelos, para finalizar con un análisis de los métodos más

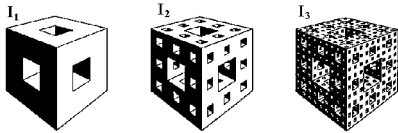
recientes y, como ejemplo, la aplicación a datos de porosidad diferencial, obtenidos sobre un amplio rango de escalas.

## FRACTALES

Fue en 1975 cuando Mandelbrot, apoyado en las nuevas ideas sobre la topología de los objetos irregulares y en las recientes investigaciones acerca de las leyes de distribución con comportamiento Parencial (Pareto, 1897), establece las bases de la denominada por él, *geometría fractal*. En su libro "*The Fractal Geometry of Nature*" (1977), él acuña la palabra fractal, que proviene del adjetivo en latín *fractus* que significa "irregular" (verbo correspondiente *frangere* que significa "quebrar"). De esta forma, la geometría fractal sería el estudio topológico de las formas irregulares.

La geometría fractal establece un conjunto de herramientas matemáticas para el análisis de objetos irregulares de características específicas, que hasta entonces habían sido convenientemente olvidadas por la "ciencia lineal". El término fractal fue introducido para definir aquellos objetos o fenómenos espaciales y/o temporales que son continuos pero no diferenciables y que exhiben correlaciones espaciales sobre muchas escalas.

Durante las dos últimas décadas la geometría fractal ha progresado hasta llegar a desarrollar un aparato conceptual y metodológico muy importante. De este modo, hoy en día se habla de diversos tipos de fractales, tales como los fractales autosimilares, autoafines y los multifractales (Korvin, 1992).



**Figura 1 – Ejemplo de una figura fractal: Esponja de Menger. Se representan 3 iteraciones de la misma, de modo que como límite de infinitas iteraciones el cubo inicial se convierte en un fractal. Si se amplía un fragmento de la construcción  $I_3$ , se apreciaría como el detalle ampliado es semejante al todo, por lo que esta figura presenta autosimilitud.**

La idea básica tras estos conceptos es la de autosimilaridad ilustrada en la Figura 1, que implica la propiedad de invariabilidad de escala.

De acuerdo con Mandelbrot (1982), *un fractal es una figura construida, de alguna forma, de partes similares al todo.*

Por otra parte, la mayor contribución cualitativa del concepto de fractal, es lo que se denomina dimensión fractal, parámetro con el que objetos heterogéneos pueden ser convenientemente medidos.

Existen diversos modos de introducir formalmente el concepto de fractal. Todos ellos se basan en la idea de medida. El carácter, un tanto técnico, de algunos conceptos matemáticos hace aconsejable complementar algunas definiciones formales y conceptos con aproximaciones más intuitivas o, a veces, menos rigurosas. Por ejemplo, una línea costera es un clásico ejemplo de estructura fractal, ya que cuando se amplía aparecen bahías y promontorios. En consecuencia su longitud no podría ser medida, ya que al hacerse más precisa la medida (disminuir la escala) se encontrarían

an más y más detalles, aumentando el valor de su longitud. De esta forma, ¿Cual sería la longitud de una línea costera?

La duda tras esta pregunta tal vez esté en la definición de dimensión y no en la cuestión en sí.

## 1 CONCEPTOS BÁSICOS

De las diversas definiciones existentes de dimensión, nos restringiremos solamente a las que son útiles al concepto de fractal.

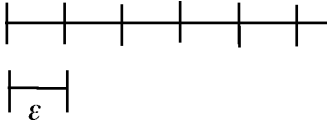
Dimensión Topológica ( $D_t$ ): Se define de forma recurrente. Un punto por definición tiene dimensión cero. Para separar una línea en dos partes desconectadas sólo necesitamos retirar un punto; de esta forma la dimensión topológica de una línea es la dimensión topológica del punto más uno,  $D_t=0+1=1$ . De forma similar, para separar un plano en dos partes desconectados necesitamos una línea con un valor de  $D_t$  igual a 1, por lo que la  $D_t$  del plano será 2, y del mismo modo la dimensión topológica de la esfera será 3.

Dimensión de Inmersión ( $D_i$ ): O dimensión Euclidiana. Es la menor dimensión en que el objeto puede estar inmerso. Por ejemplo un alambre recto tiene  $D_t=1$  y  $D_i=1$ , si lo doblamos en forma de aro tendrá  $D_t=1$  y  $D_i=2$ , y si lo doblamos en forma de anteojos tendrá  $D_t=1$  y  $D_i=3$ .

Dimensión de Hausdorff ( $D_h$ ): O dimensión de medida, de Hausdorff Besicovitch o de similitud. Fue introducida por Hausdorff en 1919 y está relacionada con el concepto de medida. Por ejemplo si queremos medir una recta y para ello

escogemos una escala  $\epsilon$ , su longitud  $L$  vendrá definida por:

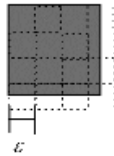
$$L = N(\epsilon) \epsilon$$



**Figura 2. Obtención de una longitudinal  $a$  a partir de un segmento.**

Donde  $N(\epsilon)$  es el número de veces que la escala  $\epsilon$  es aplicada, como en el caso de la Figura 2, donde la longitud sería aproximadamente  $5 \epsilon$ .

En el caso de un área  $A$  (ver Figura 3) tendremos:



$$A(\epsilon) = N(\epsilon) \epsilon^2 .$$

**Figura 3. Obtención de un área a partir de un cuadrado de lado  $E$ .**

Y análogamente para un volumen  $V$ :

$$V(\epsilon) = N(\epsilon) \epsilon^3 .$$

Podemos percibir en la Figura 2 y en la Figura 3 que al reducir nuestra escala  $\epsilon$  la medida (longitud, volumen, etc.) se vuelve más precisa. Por tanto, podemos definir, de forma genérica, la medida  $M$ :

$$M = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) \epsilon^{Dm} \quad (1)$$

Donde  $Dm$  es la dimensión del instrumento de medida; si estamos midiendo con rectas  $Dm = 1$ , y en el caso de planos  $Dm = 2$ .

Evaluando  $N(\epsilon)$  tenemos que, en el caso de una recta, a medida que  $\epsilon$  disminuye el número de intervalos  $N(\epsilon)$  necesarios para cubrir toda la figura aumenta en razón inversa, o sea,

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-1}$$

Para un plano tenemos que:

$$N(\epsilon) \sim \epsilon^{-2}$$

De esta forma:

$$N(\epsilon) = C \epsilon^{-D_b} \quad (2)$$

donde  $C$  es una constante de proporcionalidad.

Entonces, usando  $\epsilon$  como escala relativa  $\epsilon = \epsilon'/L$  (donde  $L$  es la longitud total) y aplicando la ecuación (2) en (1) se obtiene,

$$M = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C \epsilon^{-D_b} \epsilon^{Dm}$$

$$M = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C \epsilon^{(Dm-D_b)} \quad (3)$$

O sea, la medida sólo será definida para  $Dm = D_b$ , pues para  $Dm > D_b$ , en el límite de  $\epsilon \rightarrow 0$  la medida será cero, y para  $Dm < D_b$  infinito. Esta conclusión es razonable, pues al intentar medir una recta con planos obtendremos área cero, y en el caso inverso (un plano con rectas) obtendremos longitud infinita.

La dificultad está en medir objetos como el de la Figura 1. En efecto, al intentar medir su contorno con segmentos de tamaño  $\epsilon$  ( $Dm = 1 = Df$ ), a medida que  $\epsilon$  disminuye se encuentran más detalles; de esta forma su longitud será infinita. Entonces, de acuerdo con lo dicho anteriormente su dimensión ( $D_b$ ) debe ser mayor que 1. Intentando medir esta dimensión con pla-

cas cuadradas de lado  $\varepsilon$  ( $D_m=2=D_i$ ), el resultado obtenido es cero, por tratarse de un objeto de topología unidimensional.

De esta forma se puede concluir que la dimensión del contorno de la Figura 1 debe estar entre 1 y 2.

Una explicación más precisa sobre el concepto de la dimensión de Hausdorff puede ser obtenida mediante unas pocas definiciones matemáticas (Falconer,1990).

Siendo  $U$  un sub-conjunto  $n$ -dimensional en el espacio Euclidiano ( $U \subset \mathbb{R}^n$ ), el diámetro de  $U$ ,  $|U|$ , es la mayor distancia

que separa cualquiera par de puntos en  $U$ . Si  $F$  (mostrado en la Figura 4a) es un sub-conjunto en  $\mathbb{R}^n$ , se le puede recubrir con un número de sub-conjuntos  $U_i$  de  $\mathbb{R}^n$  (posiblemente grande pero contable), de forma que cada uno de ellos tenga un diámetro por lo menos igual a un valor dado  $\xi$  ( $0 < |U_i| \leq \xi$ , para cada  $i$ ). Este recubrimiento esta hecho de forma esquemática en la Figura 4b.  $F$  esta incluido en la unión de todos los  $U_i$ , o sea  $F \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ . Un conjunto  $\{U_i\}$  que tenga estas propiedades se considera como un recubrimiento  $\xi$  de  $F$ .

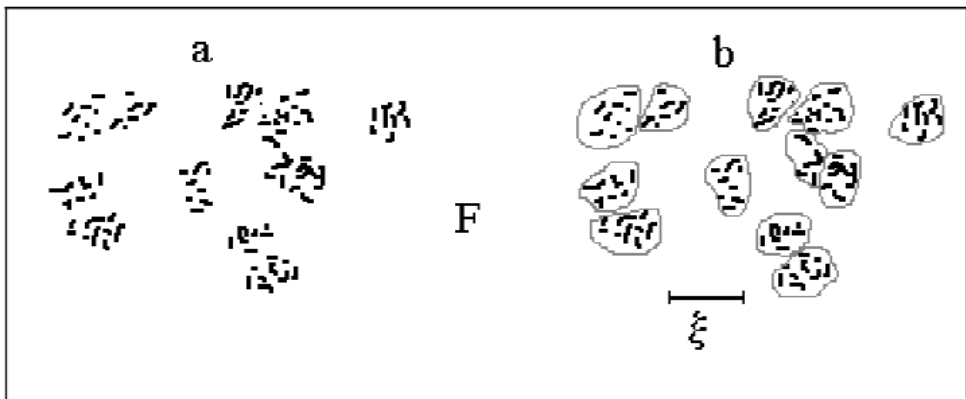


Figura 4 – a) Un conjunto F y b) una posible realización de un recubrimiento  $\xi$ .

Entre todos los posibles recubrimientos  $\xi$  de  $F$ , podríamos estar interesados en determinar cual de ellos es, de alguna forma, menor. Esta realización podría ser definida como aquella que la suma de los diámetros de los sub-conjuntos  $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|$  fuera menor.

Sería igualmente aceptable minimizar las sumas  $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^2$  o  $\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^3$ , que representarían la área o el volumen respectivamente. En el caso general, podríamos elevar a los diámetros  $|U_i|$  a una potencia no negativa  $s$ . Luego, para  $s < 0$ , se define que,

$$H_{\text{inf}}^s = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\} \text{ es un recubrimiento de } F \right\} \quad (4)$$

donde  $\inf$ , representa el *infimum*, el mayor límite, dentro de los inferiores, de un conjunto. En otras palabras la ecuación (4) busca el recubrimiento de  $F$  que minimice la suma de las  $s$ -ésimas potencias de los diámetros; sería el equivalente a una medida de la longitud, área o volumen del conjunto a una escala  $\xi$ .

De la mismísima forma que hicimos anteriormente en esta misma sección, aplicamos el límite de  $\xi \rightarrow 0$ , para obtener la medida exacta, y así resulta:

$$H^s(F) = \lim_{\xi \rightarrow 0} H_{\xi}^s(F) \quad (5)$$

que se denomina la *medida  $s$ -dimensional de Hausdorff* en el conjunto  $F$ . Para valores de  $s$  enteros, la medida de Hausdorff se reduce a la tradicional medida  $n$ -dimensional de Lebesgue (el usual  $n$ -dimensional volumen), multiplicado por una constante. Para valores no enteros de  $s$  tenemos que  $s = D_b$ , o dimensión de Hausdorff.

En realidad, en esta idea se basa una de las definiciones del término fractal, es decir: Un objeto es considerado fractal cuando su dimensión de medida,  $D_b$  es mayor que su dimensión topológica,  $D_t$  y menor que su dimensión de inmersión,  $D_i$ .

Por lo tanto, en  $D_b$  está la idea de ocupación del espacio; así a medida que  $D_b$  aumenta, el grado de relleno del espacio, desorden o irregularidad también aumenta, como algo contínuo, pudiendo asumir valores no enteros. Todo ello difiere de la idea común clásica sobre dimensión geométrica o Euclidiana. Por lo tanto, al determinar la dimensión fractal de un objeto, estamos obteniendo información acerca de la capa-

cidad de ocupación del espacio por parte del mismo.

### La esponja de Menger

Como ejemplo de aplicación de la teoría fractal volvemos a considerar la esponja de Menger presentada en la Figura 1, ya que el concepto que subyace a esta construcción, ha demostrado ser de gran utilidad en diversas ciencias, como geofísica y edafología.

La construcción de la esponja de Menger es bastante sencilla: el iniciador es un cubo de lado unitario; el generador ( $I_1$  en la Figura 1) se construye creando tres huecos cuadrados de lado  $1/3$ , que cruzan el cubo en el centro de cada cara del iniciador. De esta forma se puede subdividir el volumen restante del cubo en 20 pequeños cubos de lado  $1/3$ ; con éstos se repetiría el mismo procedimiento perforándoles hasta formar una figura infinitamente agujereada (Figura 1).

Esta construcción iterativa puede ser representada desde un punto de vista físico, caracterizandola mediante el análisis fractal de su densidad y porosidad. Las nociones de densidad y porosidad son también de gran utilidad en la modelización de la fase sólida y los poros del suelo y se han utilizado para elaborar modelos de organización jerárquica de los agregados, como se discutirá posteriormente.

Para obtener la dimensión fractal de la esponja de Menger se considera el cubo iniciador de lado  $r_0$ , hecho de un material cualquiera con densidad  $\rho_0$ ; el primer estado, el generador, tendrá una porosidad  $\phi_1$  (volumen de huecos partido por volumen

total) igual a 7/27 y una densidad de masa  $\rho_r$  (masa partido por volumen total) igual a  $20\rho_o/27$ . En la  $n$ -ésima iteración la densidad será dada por la masa restante partida por el volumen total del cubo:

$$\rho_n = \frac{\rho_o 20^n r_n^3}{r_o^3} \tag{6}$$

donde  $r_n$  es el lado del cubo resultante de la  $n$ -ésima iteración.

De acuerdo con el procedimiento descrito, el lado de los cubos subdivididos en la  $n$ -ésima iteración vendrá dado por:

$$r_n = \frac{r_o}{3^n} \tag{7}$$

Aplicando el logaritmo en ambos términos de las ecuaciones (6) y (7), se obtienen las relaciones:

$$\ln \frac{\rho_n}{\rho_o} = n \ln 20 + 3 \ln \frac{r_n}{r_o} \tag{8}$$

y

$$\ln \frac{r_n}{r_o} = -n \ln 3 \tag{9}$$

Haciendo explícito  $n$  en la ecuación (9), substituyendolo en la expresión (8) y aplicando el exponencial en ambos términos, obtenemos la dependencia espacial de la densidad:

$$\frac{\rho_n}{\rho_o} = \left( \frac{r_n}{r_o} \right)^{3 \frac{\ln 20}{\ln 3}} \tag{10}$$

Por lo que, finalmente, utilizando la relación entre porosidad y densidad,  $\phi_n = 1 - (\rho_n/\rho_o)$ , llegamos a:

$$\phi_n = 1 - \left( \frac{r_n}{r_o} \right)^{3 \frac{\ln 20}{\ln 3}} \tag{11}$$

Las ecuaciones (11) y (10) ilustran algunas características de la esponja de Menger. En el límite de  $n \rightarrow \infty$  (o  $r_n \rightarrow 0$ ), la porosidad  $\phi_n$  será igual a 1 y la densidad  $\rho_n/\rho_o$  será igual a 0.

La ecuación (10) define una ley de potencia para la dependencia espacial de la densidad, y en el límite de  $n \rightarrow \infty$ , constituye un objeto autosimilar formado de un conjunto incontable de puntos con dimensión topológica cero.

## 2 ANTECEDENTES DEL USO DE FRACTALES EN POROSIDAD DEL SUELO

La estructura de los suelos puede ser considerada según dos puntos de vista opuestos pero complementarios. De acuerdo con el primero el suelo sería un medio coherente, donde el empaquetamiento de los elementos sólidos forma agregados, que a su vez generan lagunas o poros. Para el segundo sería un medio poroso formado por una red de poros, con más o menos conexiones, rodeadas por elementos sólidos. Ambos casos presentan una distribución de tamaños dependiente de la escala.

Chepil en 1950 había observado un comportamiento que tenía poco que ver con lo intuitivo, desde el punto de vista da geometría tradicional, al estudiar la rela-

ción entre la densidad y tamaño de agregados de suelos. En efecto, se observaba un decrecimiento sistemático en la densidad, al aumentar el tamaño de los agregados.

Turcotte, en 1986, fue el primero en incluir en su modelo de distribución de partículas de un material geológico una ley de potencia:

$$N R_i^{D'} = \text{constante.} \quad (12)$$

Donde  $N$  es el número total de partículas de radio mayor que  $R_i$  y  $D'$  es la dimensión fractal de la distribución del tamaño de las partículas.

En 1981, Arya y Paris establecen un modelo físico-empírico para la predicción de la curva característica de humedad a partir de la distribución de tamaño de las partículas, mediante una relación entre el tamaño de las partículas y el tamaño de los poros, dada por la ecuación:

$$r_i = R_i \left[ \frac{2}{3} e N_i^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

siendo  $\alpha$  un parámetro empírico mayor que la unidad, y  $e$  el índice de poros.

Ese modelo recibió críticas debido al carácter empírico en el procedimiento utilizado para la determinación de  $\alpha$ . Tyler y Wheatcraft (1989) desarrollaron un modelo que elimina el carácter empírico del parámetro  $\alpha$ , relacionándolo directamente con la dimensión fractal del trazado del poro, o dimensión de capilaridad.

Basado en la misma idea de una distribución fractal de poros Bird *et al.* (1996) analizan las consecuencias de asumir dis-

tribuciones fractales para modelos de retención en superficies de suelos. De acuerdo con los autores, aquellos modelos que asumían una distribución fractal de los poros basados en una distribución fractal de los agregados, deberían ser tomados con cautela. La explicación, en términos generales, proceden del simple hecho de que los espacios vacíos creados por los agregados mayores son rellenados por los agregados menores; eso implica una distribución de tamaños de rango menor, sugiriendo una distribución distinta de la distribución que resulta de considerar los espacios vacíos de los agregados.

La naturaleza jerárquica de la estructura interna de los agregados también se ajusta a modelos fractales. Hallett *et al.* (1998) la evaluó mediante dos técnicas distintas, volumen específico y distribución del tamaño de los poros, ambas se ajustarán a distribuciones fractales, pero con valores distintos variando entre 2,70 y 2,98, lo que sugiere una limitación al uso de la dimensión fractal en predicciones del comportamiento de propiedades físicas del suelo a partir de parámetros o propiedades medidas a diferentes escalas.

Esta limitación puede ser explicada por el hecho de que ambas técnicas están íntimamente relacionadas con la distribución de los poros a distintos rangos de escala. De acuerdo con Childs (1969) la estructura de poros en un suelo puede presentar distribuciones bimodales; así al ajustar una única función estaríamos enmascarando los resultados para el rango de escala utilizado. Como cada técnica de medida tiene una precisión que la limita a rangos de escala distintos, los valores de la dimen-



sión fractal serán distintos. De esta forma al evaluar la dimensión fractal de las propiedades físicas de los suelos es primordial un cuidadoso análisis de la forma de la distribución a distintos rangos de escala.

### 3 MÉTODOS DE ESTIMACIÓN DE LA DIMENSIÓN FRACTAL DE MEDIOS POROSOS

Los suelos, y en general, los materiales porosos, se caracterizan por su masa sólida,  $m$ , masa de poros,  $p$ , y por el área de la interfase sólido-poro,  $s$ . El termino "masa" es utilizado aquí denotando longitud, superficie o volumen de un dato material, dependiendo de su dimensión topológica.

Como ya se ha mencionado anteriormente, la primera propiedad de un objeto fractal es su capacidad para describir, en términos de reescalamiento, su autosimilitud. De acuerdo con diversos autores (Van Damme *et al.*, 1988; Van Damme y Ben Ohoud, 1990 y Pfeifer y Obert, 1989), es posible encontrar relaciones fractales simples en forma de ley de potencia entre las tres propiedades que definen la "masa"  $m$ ,  $p$  y  $s$  y el tamaño  $R$  del material estudiado. Estas relaciones se pueden expresar en forma de leyes de potencia y se definen a continuación.

$$m(R) \propto R^{D_m} \quad (14)$$

$$p(R) \propto R^{D_p} \quad (15)$$

$$s(R) \propto R^{2-D_s} \quad (16)$$

donde  $D_m$ ,  $D_p$  y  $D_s$  son las dimensiones fractales características de la masa sólida

$m$ , masa de poros  $p$  y de la superficie de interfase sólido-poro, respectivamente. La validez de la ley de potencia, a priori, no esta de todo garantizada; distribuciones en forma de ley de potencia (fractal) pueden existir aunque la distribución de masa o superficie no tenga bien definida la forma de campana de las funciones Gaussianas.

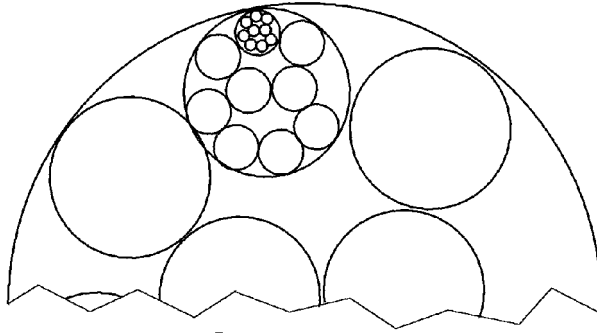
Al evaluar medidas efectuadas en substratos bidimensionales, tales como secciones delgadas de suelo, cada una de estas dimensiones  $D_m$ ,  $D_p$  o  $D_s$  pueden ser obtenidas adicionando 1 a sus correspondientes valores medidos en el plano de intersección del medio poroso (Mandelbrot, 1982).

En el caso particular en que  $D_m = D_p = D_s = 3$ , el material no es un fractal. Este es el caso para materiales homogéneos, regulares y tridimensionales, como la gel de silice (Avnir *et al.*, 1985) o la Caolinita (Van Damme y Ben Ohoud, 1990).

A continuación se describirán tres métodos de evaluación de las dimensiones mencionadas en las ecuaciones (14), (15) y (16).

#### 3.1 Evaluación de $D_m$ basado en la densidad aparente de agregados

Los resultados de la bibliografía (Wittmuss y Mazurak, 1958; Gumbs y Warkentin, 1976) coinciden en el hecho de que la densidad aparente de agregados o terrones de suelos disminuyen (o su porosidad crece) como una función de sus diámetros medios en el rango comprendido entre 0.1 a 2 mm para agregados, y entre 0.4 y 15 cm para terrones.



**Figura 5** – Ilustración del modelo de jerárquico de agregados de Currie (1966).

La primera interpretación racional de estos resultados fue la propuesta por Currie (1966), que mostró que el área de la superficie de los agregados podría afectar substancialmente a su densidad aparente. Este autor creó un modelo de agregados esféricos (Figura 5), considerando la magnitud del espacio poroso que se perdía con las subdivisiones sucesivas de los agregados, y desarrolló una ecuación para esta porosidad efectiva. Esta ecuación se ajusta parcialmente a los datos experimentales. Nótese la notable similitud entre el modelo jerárquico de agregados presentado en la Figura 5 y la esponja de Menger de la Figura 1.

El principio de exclusión de la porosidad (Currie, 1966; Dexter, 1988) inferido a partir de este concepto de organización jerárquica de los agregados (Figura 5) permite explicar, en esencia, porqué los agregados de menor tamaño poseen menos porosidad y mayor superficie de contacto entre partículas.

El modelo jerárquico de un agregado creado por Currie es un autosimilar típico, y fue, naturalmente, reinterpretado utili-

zando la geometría fractal estadística, por Rieu y Sposito (1991a,b).

La densidad aparente  $\rho_b$  de un medio poroso es, por definición, igual a la masa sólida  $m$  partido por el volumen del agregado  $V$ :

$$\rho_b = \frac{m}{V} \quad (17)$$

Si el medio poroso es un fractal de tipo masa sólida, la masa  $m$  se reescalará en forma de ley de potencia en función de  $R$  (ecuación (14)). Siendo el volumen una función de  $R^3$ , la densidad aparente  $\rho_b$  estará relacionada con la dimensión fractal de masa sólida  $D_m$  por:

$$\rho_b(R) \propto R^{D_m-3} \quad (18)$$

Aplicando la clásica ecuación de porosidad  $\phi(R) = 1 - \rho_b(R)$ , obtenemos:

$$\phi(R) \propto 1 - R^{D_m-3} \quad (19)$$

A pesar de que algunos de los datos publicados en la bibliografía disponible presenten una dispersión considerable en cuanto a los métodos de medida y en con-

secuencia en cuanto a los resultados obtenidos, todos ellos son consistentes, desde el punto de vista estadístico, con las ecuaciones (18) y (19) (Figura 6). Téngase en cuenta que la ecuación (19) es semejante a

la ecuación (11) deducida empíricamente para la esponja de Menger, que al igual que la proporción de las fases porosa y sólida del suelo, también se caracterizaba mediante la densidad.

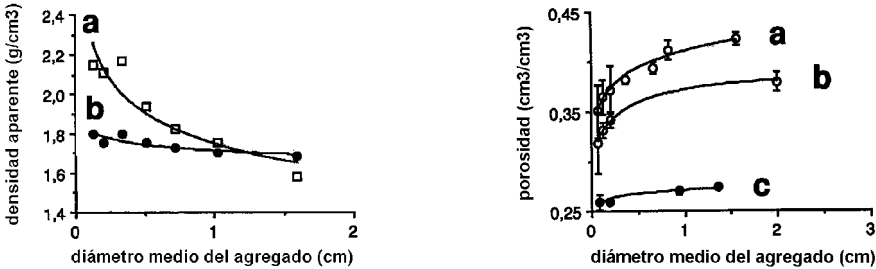


Figura 6 – Izquierda: densidad aparente para distintos tamaños de agregados. Derecha: Porosidad en función del diámetro medio de agregados para suelos franco-limosos (a), franco-arcillo-limosos (b) y arcillosos (c) (datos de Monnier et al. 1973). Los datos fueron ajustados utilizando las ecuaciones (18) y (19) ( $D_m=2,94$  con  $P<0.001$ ,  $D_m=2,95$  con  $P<0.001$  y  $D_m=2,98$  con  $P<0.025$  para (a), (b) y (c), respectivamente).

Alguno de estos resultados se presentan en la Figura 6, e indican que la distribución de masa de los agregados se hace más homogénea al aumentar el contenido en arcilla, para el rango de diámetros en que se aprecia comportamiento fractal (entre 0,1 y 1,6 mm y entre 1 y 20 mm en los gráficos izquierda y derecha de la Figura 6, respectivamente).

### 3.2 Evaluación de $D_p$ mediante el método "Box-Counting"

El método conocido como "box-counting", fue introducido en la ciencia del suelo por Hetano *et al.* (1992) y Crawford *et al.* (1993b). La imagen binaria digitalizada de una sección delgada de suelo, es recubierta con una rejilla formada de celdas cuadradas de lado  $r$ . El número de cel-

das cuadradas  $N(r)$  que contengan un poro (bien un poro individual o bien una fracción del espacio poroso) será considerado fractal si se puede establecer la siguiente relación:

$$N(r) \propto r^{-D_p} \quad (20)$$

donde  $D_p$  es la dimensión fractal del espacio poroso.

Hetano *et al.* (1992) estudiaron el espacio poroso en horizontes B de suelos del grupo de los Andisoles teñidos con azul de metileno. Los patrones de manchas formados por tinción fueron atribuidos a la presencia de fenómenos de flujo preferencial. Estos autores encontraron que la dimensión fractal del espacio poroso disminuye al aumentar la profundidad en el suelo, desde 0,59 hasta 2,0 m. Es interesante el

resultado encontrado al analizar regiones con abundantes grietas y canales de raíces. En estas zonas se observaron valores de  $D_p$  menores que 1, mientras que se encontró un valor mayor que 1.7 considerando grandes manchas que se extendían por toda la columna del suelo. El Regosol volcánico, del que procede el Andisol, tiene un valor medio de  $D_p$  de 1,48, con una varianza relativamente pequeña.

Crawford *et al.* (1993b) utilizaron el mismo método con 200 puntos, cuyo origen fue elegido aleatoriamente. La heterogeneidad de la red de poros fue mayor para suelos con estructura en bloques angulares separados por patrones regulares de agrietamiento ( $D_p = 1,71$ ) que en los suelos con estructura migajosa ( $D_p = 1,94$ ).

Skjeltorp y Meakin (1988), en su trabajo sobre simulación de fracturas en monocapas, encontraron resultados similares al de Crawford, con redes de grietas que presentaban un patrón de agrietamiento similar al del suelo ( $D_p = 1,68 \pm 0,06$ ). En ambos casos, lo fundamental para el proceso de crecimiento de grietas trazados por estos autores sugiere claramente que los patrones de agrietamiento deben ser descritos en términos conceptuales propios de la geometría fractal.

### 3.3 Determinación de $D_p$ a partir de distribuciones de poro/volumen

Un método disponible para identificar indirectamente los contornos de las interfases sólido-poro, es el uso de una medida indirecta de la superficie específica mediante un fluido tal como el nitrógeno (Avnir *et al.*, 1985) o del espacio poroso

mediante técnicas como la intrusión de mercurio (Bartoli *et al.*, 1993). En estos casos, la dimensión fractal de superficie  $D_s$  es solamente una dimensión de similitud pues la superficie medida describe principalmente la superficie accesible para la sonda y no la superficie real sólido-poro. La accesibilidad puede variar tanto con la escala como con el tipo de sonda utilizada. Por ejemplo, un gran poro cuyo acceso hacia el exterior de la muestra de suelo este formado solamente por un canal delgado, será considerado como un poro relativamente pequeño.

Comparando el método tradicional que usa nitrógeno ( $N_2$  - B.E.T) para estimar la superficie específica de suelos, la porosimetría de intrusión de mercurio, como una medida de la estructura intergranular, este último tiene la desventaja de delimitar las interfaces sólido-poro con menor resolución (efectos cuellos de botella "bottle neck"), pero presenta la ventaja de que puede ser analizado un rango mayor de tamaños. Comparado con las técnicas de análisis de imagen (que permiten medir macroporos), las medidas con intrusión de mercurio tienen la gran ventaja de su mayor rapidez.

La estructura superficial de los poros puede ser caracterizada por una distribución,  $V_p(R)$ , definida como el volumen acumulado de los poros con radio límite mayor que  $R$ . Si  $V_p(R)$  sigue una distribución en forma de una ley de potencia, su escalamiento será del tipo (ver ecuación (3)):

$$V_p(R) \propto R^{3-D} \quad (21)$$

donde  $D$  es la dimensión del volumen poroso y el exponente 3 se refiere a la dimensión topológica del volumen de los poros.

El área total de la superficie de poros  $S(R)$  con radio límite mayor que  $R$  viene dado por:

$$S(R) \propto \frac{dV_p(R)}{dR} \quad (22)$$

Substituyendo la ecuación (21) en (22), obtenemos la relación:

$$S(R) \propto R^{2-D_s} \quad (23)$$

donde  $D_s$  es la dimensión fractal de la interfase sólido-poro.

Escribiendo la ecuación (23) en la forma diferencial tenemos:

$$\frac{dV_p}{dR} \propto R^{(2-D_s)} \quad (24)$$

Que para el volumen de poros residual ( $V_R = V_{total} - V_p$ ):

$$\frac{dV_R}{dR} \propto -R^{(2-D_s)} \quad (25)$$

Por lo tanto la dimensión fractal de la superficie puede ser obtenida como la pendiente del ajuste lineal de la ecuación (25) en un gráfico doble logarítmico. De acuerdo con lo comentado anteriormente la interpretación de  $D_s$  como una dimensión fractal lo restringe al intervalo  $2 < D_s < 3$ .

Por otra parte, se pueden considerar los conceptos anteriores, en combinación con la ecuación de Laplace (o Washburn):

$$P = \frac{2\delta \cos \alpha}{R} \quad (26)$$

donde  $P$  es la presión aplicada en las experiencias con mercurio y las demás variables ( $\alpha$  y  $\delta$ ) son parámetros del medio y no dependientes de la escala.

De donde tenemos que la diferencial  $dR \sim dP(-P^{-2})$ , lleva a una relación más conveniente desde el punto de vista operativo:

$$\frac{dV_R}{dP} \propto -P^{(D_s-4)} \quad (27)$$

#### 4 ESTUDIO DE UN CASO: DIMENSIÓN FRACTAL DEL ESPACIO POROSO DEL SUELO CARACTERIZADO POR INTRUSIÓN DE MERCURIO

A continuación se discute la aplicación la relación (27) a 16 muestras de agregados procedentes de diferentes localidades, con distintas composiciones de suelo. Las muestras estaban agrupadas en pares tomados en parcelas adyacentes dedicadas a pradera y cultivo, y se analizó la distribución de tamaño de poro mediante la técnica de la intrusión de mercurio.

La técnica de porosimetría de mercurio permite conocer no solo el volumen total de poros, sino también su distribución por tamaños de diámetro en el intervalo comprendido entre 200  $\mu\text{m}$  y 60 nm, es decir en un rango de escala que abarca cinco ordenes de magnitud.

La composición y las propiedades de los suelos estudiados se han descrito detalladamente en trabajos anteriores (Paz y Guerif, 1993 y Fernandez Rueda, 1997). En la Tabla 1 se presentan los resultados del análisis granulométrico y contenido en

materia orgánica de los mismos. Se aprecia que la textura oscila entre moderadamente gruesa y media, destacando la cantidad poco importante de arcilla. El conjunto de

los suelos seleccionados presenta una amplia gama de contenido en materia orgánica que oscilan desde aproximadamente 2 hasta 12,1%.

Localidad y símbolo		Granulometría						
		P %	LF %	LG %	AF %	AG %	MO %	Porosidad
Dedicación: Cultivo								
Raigoso	(RAC)	17,10	42,10	20,40	10,10	10,30	6,11	35,28
Sigüeiro	(SIC)	14,40	15,90	11,70	30,70	27,30	4,87	42,14
La Silva	(LSC)	13,70	31,30	13,50	14,90	26,60	13	48,94
Mabegondo	(MAC)	16,40	41,70	18,40	14,30	9,20	3,47	43,88
Monforte	(MOC)	18,00	29,10	21,40	23,10	12,50	2,03	35,90
Barreiro	(BAC)	8,70	26,80	19,00	22,60	22,90	2,92	47,15
Bonxe	(BOC)	16,50	19,20	12,70	28,60	21,40	4,8	41,20
Castro	(CAC)	13,20	13,70	11,90	26,90	34,30	6,5	29,25
Dedicación: pradera								
Raigoso	(RAP)	21,00	49,30	17,20	8,50	4,00	7,96	41,20
Sigüeiro	(SIP)	14,90	20,20	10,70	28,30	25,90	3,85	46,33
La Silva	(LSP)	12,40	34,00	13,40	15,40	24,80	10,2	54,50
Mabegondo	(MAP)	20,80	57,40	10,70	8,00	3,10	7,55	54,55
Monforte	(MOP)	13,10	27,00	20,20	25,80	14,00	2,25	36,76
Barreiro	(BAP)	9,10	25,00	18,20	20,60	27,10	3,42	51,16
Bonxe	(BOP)	18,10	19,00	13,50	28,20	21,30	6,5	49,57
Castro	(CAP)	16,50	16,40	10,30	22,50	34,30	12,12	35,97

**Tabla 1 – Información general sobre los suelos estudiados (P= contenido en arcilla; LF=limo fino; LG=limo grueso; AF=arena fina; AG=arena gruesa; MO=materia orgánica).**

La distribución de tamaño de poro se midió en muestras de 1,7 a 2 g formada por diversos agregados individuales de 2 a 3 mm de diámetro. Se utilizó un porosímetro Micromeritics 9310 con dos unidades que permiten operar desde  $3 \cdot 10^{-3}$  hasta 200 Mpa (Fiès y Bruand, 1990). Admitiendo que los poros son cilíndricos, el radio medio equivalente,  $R$ , se calcula a partir de la presión  $P$  ejercida para forzar la entrada de mercurio, la tensión superficial,  $\Gamma$ , y el ángulo de contacto,  $\theta$ , de acuerdo con:

$$R = \frac{-2\Gamma \cos \theta}{P} \quad (28)$$

Para efectuar los cálculos se empleó un valor medio de  $\theta=130^\circ$  y de  $\Gamma=0,484$  N/m<sup>-1</sup>.

Los datos de porosidad diferencial de los suelos estudiados han sido discutidos por Paz y Guerif (1993), Benito *et al.*(1991), Pini *et al.* (1993) y Fernández Rueda (1997).

En la Figura 7 se presenta la representación gráfica (en gráficos doble logarítmicos) de la ecuación (25) para las muestras estudiadas. En estas gráficas se nota un comportamiento lineal bimodal, con una leve pendiente inicial para el rango aproxi-

mado de  $R$  entre  $3 \times 10^{-3}$  y  $4 \times 10^{-1} \mu\text{m}$  y un aumento de la pendiente para valores de  $R > 4 \times 10^{-1} \mu\text{m}$ . Resultados similares han sido obtenidos por Bartoli *et al.* (1992, 1997).

A pesar de que en ambas regiones se tiene un buen ajuste lineal, no podemos asignar a la segunda ( $R > 4 \times 10^{-1} \mu\text{m}$ ) una dimensión fractal, debido a que su valor sería mayor que la dimensión topológica del medio 3, por lo tanto sin significado físico.

El rango de comportamiento fractal coincide aproximadamente con el rango de los mesoporos (poros que almacenan el agua útil para las plantas), y que de acuerdo con lo comentado anteriormente un medio fractal es una de las estructuras más eficiente de ocupación del espacio, o sea las plantas se adaptaron para extraer el agua del medio que mejor la almacena.

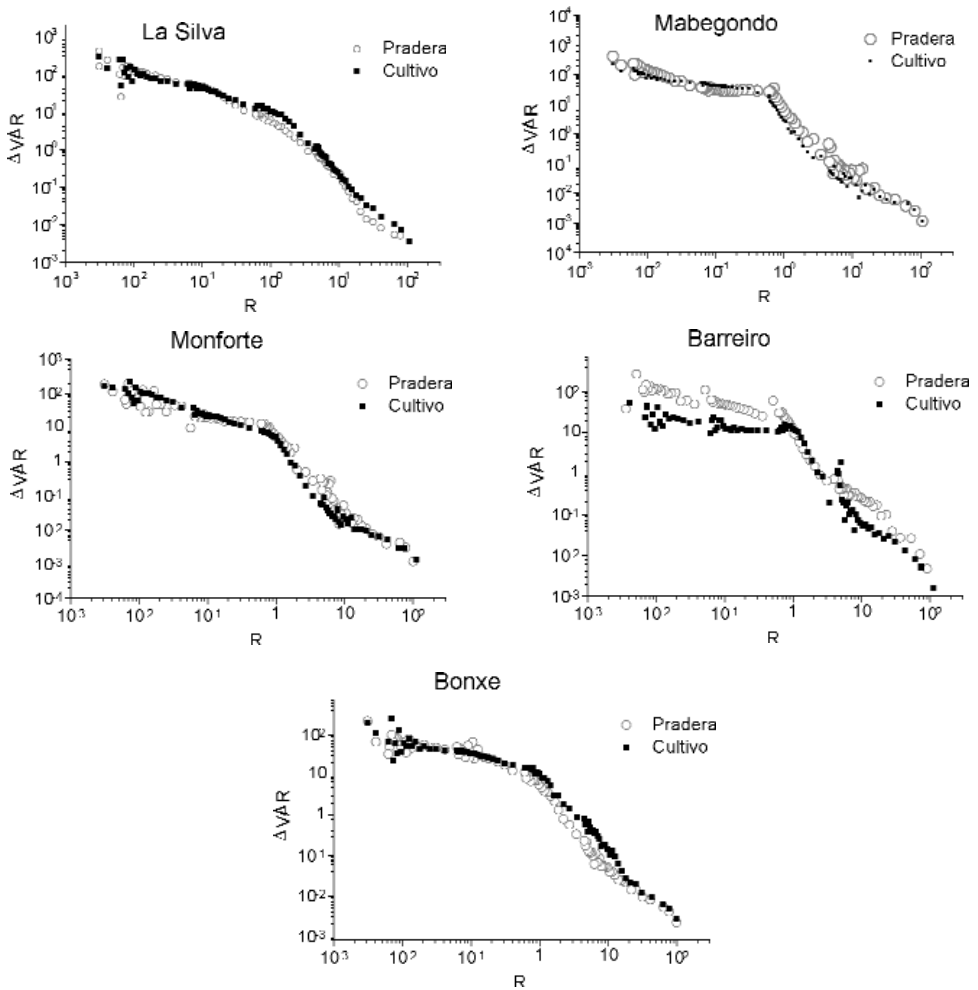


Figura 7 – Relación entre variación del volumen y radio medio de los poros. ( $R$  en  $\mu\text{m}$ ).

Los resultados obtenidos para  $D_s$ , calculados para la primera región ( $3 \times 10^{-3} < 4 \times 10^{-1} \mu\text{m}$ ), se consignan en la Tabla 2, y se representan gráficamente en la Figura 8.

Al examinar los valores de  $D_s$  en la Tabla 2 (o Figura 8) se puede observar una

clara diferencia entre los dos tipos de uso del suelo, los valores para pradera son casi siempre, con excepción de Monforte, mayores que para cultivo.

Nombre	CULTIVO			PRADERA		
	$D_s$	Error	R	$D_s$	Error	R
Monforte	2,61	0,03	0,9604	2,52	0,05	0,872
Bonxe	2,31	0,04	0,7908	2,33	0,05	0,758
Castro	2,41	0,06	0,7447	2,45	0,06	0,785
La Silva	2,43	0,03	0,9516	2,51	0,03	0,953
Raigoso	2,26	0,01	0,9649	2,36	0,02	0,941
Barreiro	2,25	0,04	0,7289	2,38	0,03	0,932
Sigueiro	2,27	0,03	0,8519	2,43	0,02	0,953
Mabegondo	2,36	0,02	0,9593	2,55	0,03	0,954

**Tabla 2 – Resultados de la dimensión fractal para los suelos estudiados (Dimensión fractal error de cálculo y coeficiente de correlación de los ajustes).**

La correlación entre los  $D_s$  calculados para cultivo y pradera indican que únicamente algo menos del 47% de la variabilidad ( $R^2=0,4667$ ) puede ser explicada por las diferencias de composición (distinto contenido de arcilla y materia orgánica), restando otros 53% sin explicar debido a otros factores como: laboreo del suelo, compactación, etc.

Se comprueba que son precisamente las muestras más compactas, las del suelo tomado en Monforte, las únicas que presentan una dimensión fractal superior a 2,5, tanto bajo cultivo como bajo pradera. En los restantes pares de muestras la dimensión fractal solo supera 2,5 en dos casos (La Silva y Mabegondo); lo más destacable, sin embargo, de estos ocho pares de muestras es que el valor de la dimen-

sión fractal parece depender de la dedicación, de modo que es mayor bajo pradera que bajo cultivo.

Estos resultados parecen sugerir que existe una relación entre la dedicación, o lo que es lo mismo, el efecto de la materia orgánica, y la dimensión fractal, de modo, que la dedicación a pradera parece que tiende a incrementar el valor de la dimensión fractal. Un valor de dimensión fractal más alto significa una mayor homogeneidad de los tamaños de poro, lo que no se observa por el simple análisis directo de las curvas de intrusión de mercurio. Por tanto el análisis fractal aporta nuevos elementos para comprender el efecto de la materia orgánica sobre la organización estructural de los agregados.



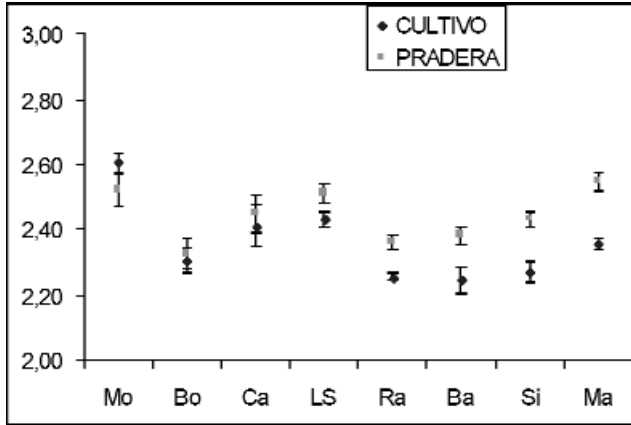


Figura 8 – Valores de la dimensión fractal separados por la forma de uso del suelo.

Los  $R^2$  entre los elementos de la Tabla 1 y  $D$ , no sobrepasan 0,1, lo que indica que, al considerar  $D$ , como índice caracterizador de la estructura de los poros, se puede concluir que la granulometría del suelo no afecta su estructura.

Entre tanto, al relacionar las diferencias entre cultivo y pradera para los elementos de la Tabla 1 y las correspondientes diferencias en la dimensión, obtenemos una correlación de 0,51 entre diferencia de limo fino y diferencia de  $D$ . Esto concuerda con resultados previos que señalan la importancia de la fracción limo para establecer distinciones entre las muestras estudiadas, dado que los contenidos en arcilla de las mismas son muy pocos variables.

### 5 RESUMEN Y CONCLUSIONES

La geometría fractal aporta a la Ciencia del Suelo una herramienta fiable para la descripción de la estructura del suelo, particularmente en el caso de medios heterogéneos.

Los resultados más recientes sobre descripciones cuantitativas de la estructura "desordenada" del suelo fue la incorporación de la dimensión fractal del suelo y/o otras dimensiones características de la estructura fractal, tales como la propagación y la conectividad dentro de modelos matemáticos de transporte de agua y ciclo de nutrientes (Bartoli *et al.* 1997).

El hecho de que algunas características del suelo se ajusten en el dominio de la geometría fractal implica una serie de cambios en la forma de medir, modelizar y extrapolar medidas en estos medios. Al contrario de lo que se pensaba, el cambio de escala afecta el valor de medida, y de acuerdo con lo visto en este trabajo la suposición de homogeneidad entre escalas implica errores en ordenes de potencia. Así dentro del contexto de la geometría fractal las hipótesis de cambio de escala deben ser cuidadosamente estudiadas.

Del análisis de la dimensión fractal de una serie de curvas de porosimetría de mer-

curio se aprecia que dicha propiedad del suelo presenta comportamiento fractal en un rango de diámetros que viene a coincidir con las dimensiones de los mesoporos.

La dimensión fractal parece estar relacionada con el contenido en materia orgánica y en consecuencia puede ser una herramienta que ayude al estudio de los mecanismos de agregación.

## **AGRADECIMIENTOS**

Este trabajo se efectuó gracias a dos becas AECI del Ministerio de Asuntos Exteriores y, en parte, también fue financiado por la Xunta de Galicia en el marco del proyecto XUGA 29101B93.

**BIBLIOGRAFIA**

- ARYA, L. M. (1981): A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristics from particle-size distribution and bulk density data. *Soil Science Society of America Journal*, 45:1023-1030.
- AVNIR, D., FARIN, D., PFEIFER, P. (1985). Surface geometric irregular of particulate materials: the fractal approach. *Journal of Colloids Interface Science* 103:112-123.
- BARTOLI, F., PHILIPPY, R. Y BURTIN, G. (1992). Influence of organic matter on aggregation in Oxisols rich in gibbsite or in goethite. I. Structures: The fractal approach. *Geoderma*, 54:231-257.
- BARTOLI, F., BURTIN, G., PHILIPPY, R. Y GRAS, F. (1993). Influence of fir root zone on soil structure in a 23m forest transect: the fractal approach. *Geoderma* 56:67-85.
- BARTOLI, F., DUTARTRE, PH., GOMENDY, V., NIQUET, S., DUBUIT, M. Y VIVIER, H. (1997). Fractals and soil structure. In *Fractals in Soil Science*. Eds.: P. Baveye, J-Y. Parlange y B.A. Stewart. CRC press, New York. p.203-232.
- BENITO, E., PAZ, A. Y PINI, R. (1991). Aplicación de la técnica de porosimetría por intrusión de mercurio en el estudio de la porosidad de un conjunto de suelos del NW de España. *Suelo y Planta*, 1:28-42.
- BIRD, N.R.A., BARTOLI, F. AND DEXTER, A.R. (1996): Water retention models for fractal soil structures. *European Journal of Soil Science*, 47: 1-6
- CHEPIL, W.S. (1950): Methods of estimating apparent density of discrete soil grains and aggregates. *Soil Science*, 70:351-362.
- CHILDS, E.C. (1969): *An Introduction to the Physical Basis of Soil Water Phenomena*. Wiley interscience, Londres.
- CRAWFORD, J.W., RITZ, K. Y YOUNG, I.M. (1993b). Quantification of fungal morphology, gaseous transport and microbial dynamics in soil: an integrated framework utilising fractal geometry. *Geoderma*, 56:157-172.
- CURRIE, J.A. (1966). The volume and porosity of soil crumbs. *Journal of Soil Science* 17:24-35.
- DEXTER, A.R. (1988). Advances in characterization of soil structure. *Soil Tillage Research* 11:199-238.
- FALCONER, K.J. (1990): *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester.
- FEDER, J. (1988): *Fractals*. Plenum Press, New York.
- FERNANDEZ RUEDA, M.J. (1997). Características físicas y mecánicas de suelos de cultivo. *Tesis Doctoral*. Universidad de La Coruña. La Coruña – España. 283pp.
- FIÈS, J.C. Y BRUAND, A. (1990). Textural porosity analysis of a silt clay soil using pore volume balance estimation, mercury porosimetry and quantified backscattered electron scanning image (BESI). *Geoderma*, 47:209-219.
- GUMBS, F.A. Y WARKENTIN, B.P. (1976). Bulk density, saturation water content and rate of wetting of soil aggregates. *Soil Science Society of America Journal* 40:28-33.

- HALLETT, P.D., BIRD, N.R.A., DEXTER, A.R. AND SEVILLE, J.P.K. (1998): Investigation into fractal scaling of the structure and strength of soil aggregates. *European Journal of Soil Science*, 49: 203-211.
- HAUSDORFF, F. (1919). Dimension und usseres Mass. *Mathematical Annalen*, 79;157-179.
- HETANO, R., KAAWAMURA, N., IKEDA, J. Y SAKUMA, T. (1992). Evaluation of the effect of morphological features of flow paths on solute transport by using fractal dimensions of methylene blue staining pattern. *Geoderma* 53:31-44.
- KORVIN, G. (1992). *Fractal Models in Earth Science*. Elsevier, Amsterdam, 396 pp.
- MANDELBROT, B. B. (1975): Stochastic models of earth's relief, the shape and fractal dimension of coastlines, and number-area rule for islands. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 72:3825-3828.
- MANDELBROT, B. B. (1978): Les objets fractals. *La Recherche*, 9(85):5-13.
- MANDELBROT, B. B. (1984): *The fractal geometry of nature*. Freeman, New York. 468 pp.
- MEAKIN, P. (1991): Fractal aggregates in geophysics. *Review Geophysics*, 29(3):317-354.
- MONNIER, G., STENGEL, P. Y FIS, J.C. (1973). Une méthode de mesure de la densité apparente de petits agglomérats terreux. Application à l'analyse des systèmes de porosité du sol. *Annales de Agronomie*, 24:533-545.
- PAZ, A., GUERIF, J. (1993). Propiedades físicas y mecánicas a escala textural de suelos con cantidades limitadas de materiales hinchables. *Investigación Agrária, Producción y Protección Vegetales*, 8:387-410.
- PARETO, V. (1897). *Cours d'Economie Politique*. Volume 2. F.Rouge, Lausanne, Suiza.
- PFEIFER, P. Y OBERT, M. (1989). Fractals: basic concepts and terminology. En *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry*. Eds.: D. Avnir. Wiley and Sons, New York. p 11-43.
- PINI, R., BENEDITO RUEDA, E., PAZ, A. Y VIGNA GUIDI, G. (1993). Microporosity in cultivated and uncultivated soils. *Agricultura Mediterránea*, 123:261-266.
- RIEU, M. Y SPOSITO, G. (1991a). Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: I.Theory. *Soil Science of America. Journal*. 55:1231-1238.
- RIEU, M. Y SPOSITO, G. (1991b). Fractal fragmentation, soil porosity, and soil water properties: II.Aplications. *Soil Science of America. Journal*, 55:1239-1244.
- SKJELTORP, A.T. Y MEAKIN, P. (1988). Fracture in microsphere monolayers studied by experiment and computer simulation. *Nature*, 335:424-426.
- TURCOTTE, D.L. (1986): Fractals and fragmentation. *Journal of Geophysical Research*, 91(B2):1921-1926.
- TURCOTTE, D.L. (1992): *Fractals ans Chaos in Geology and Geophysics*. Cambridge Univ. Press., Cambridge, 210pp.
- TYLER, S.W. AND WHEATCRAFT, S.W. (1989): Application of fractal mathematics to soil water retention estimation. *Soil Science Society of America Journal*, 53:987-996.

- VAN DAMME, H. Y BEN OHOUD, M.  
(1990). From flow to fracture and fragmentation in colloidal media. II. Local order and fragmentation geometry. En *Disorder and fracture*, eds.: J.C. Charmet, S. Roux y E. Guillin. Plenum Press, New York. p.105-116.
- VAN DAMME, H., LEVITZ, P., GATINEAU, L., ALCOVER, J.F. Y FRIPIAT, J.J. (1988). On the determination of the surface fractal dimension of powders by granulometric analysis. *Journal of Colloids Interface Science*, 122:1-8.
- WITTMUSS, H.D. Y MAZURAK, A.P.  
(1958). Physical and chemical properties of soil aggregates in Brunizen soil. *Soil Science Society of America Journal*, 22:1-5.